

**FORMALIZAÇÃO E AXIOMATIZAÇÃO DE PROVAS ONTOLÓGICAS: DAS
CONJECTURAS DE JEANS E SCHRÖDINGER À FORMULAÇÃO
COMPUTACIONAL DE BENZMÜLLER E WOLTZENLOGEL PALEO
DA PROVA DE GÖDEL**

Vinícius Carvalho da Silva¹

RESUMO

Kurt Gödel foi um dos maiores matemáticos do século XX, com contribuições para a lógica e também para o campo da cosmologia à partir da elaboração de soluções para as equações de Einstein. Como filósofo, Gödel dedicou-se à lógica e aplicou-se à axiomatização não formal de uma prova ontológica. Benz Müller e Woltzenlogel Paleo desenvolveram, por meios computacionais, uma formalização do sistema axiomático gödeliano. O trabalho pode abrir novas perspectivas para a aplicação de técnicas das ciências da computação no campo da lógica matemática, suscitar questões epistemológicas importantes, além de ser historicamente relevante por colocar em destaque um trabalho não publicado de Gödel. Apresentamos a tradução do trabalho de Benz Müller e Woltzenlogel Paleo, antecedida por um artigo com considerações gerais sobre diferentes provas ontológicas, cosmológicas e físico-teleológicas.

PALAVRAS-CHAVE: Formalização computacional. Sistema axiomático. Prova ontológica.

ABSTRACT

Kurt Gödel was one of the greatest mathematicians of the twentieth century, with contributions to logic and also in the field of cosmology from the elaboration of various relativistic models, with solutions to Einstein's equations. As a philosopher, Gödel devoted himself to logic and the non-formal axiomatization of an ontological proof. Benz Müller and Woltzenlogel Paleo developed, by computational means, a formalization of the Gödelian axiomatic system. The work may open new perspectives for the application of computer science techniques in the field of mathematical logic, raise important epistemological questions, and is historically relevant because it highlights an unpublished work by Gödel. We present the translation of the work of Benz Müller and Woltzenlogel Paleo, preceded by general considerations about different ontological, cosmological and physical-teleological proofs.

KEYWORDS: Computational formalization, axiomatic system, ontological proof.

**1 A RELEVÂNCIA DO ESTUDO DAS PROVAS ONTOLÓGICAS PARA AS
CIÊNCIAS PURAS**

¹ Doutor em Filosofia da Ciência e Teoria do Conhecimento pela UERJ. Professor da Universidade Estadual do Tocantins – UNITINS. Artigo recebido em 15/10/2019 e aceito em 16/11/2019.

Nesse trabalho assumimos a posição defendida por Weizsäcker em *The Structure of Physics*, obra em que o físico filósofo alemão propõe uma classificação da ciência em “ciências puras” e “ciências empíricas”. As ciências puras seriam a lógica e a matemática e as ciências empíricas seriam física, astronomia, química, biologia, psicologia, entre outras. A física seria a ciência empírica fundamental. Para Weizsäcker seria impossível desenvolver a física sem a lógica e a matemática, pois as “leis universais da natureza são essencialmente matemáticas” (WEIZSÄCKER. 2006, p. 334)². O platonismo de Weizsäcker fica evidente nesta passagem, pois ele trata da matemática não como uma invenção do sujeito cognoscente, mas como uma propriedade ontológica fundamental da estrutura do mundo. Assim, assumindo uma determinada metafísica, ele se inseriu na tradição da filosofia natural neoplatônica de Galileu, ao fazer da matematização da natureza, bem como Heisenberg e outros físicos filósofos, o pressuposto de sua filosofia da física (SILVA. 2016, p. 242)³.

Não somente concebemos, com Weizsäcker, que ao lado da matemática a lógica compõe o quadro das “ciências puras”, como partimos do pressuposto, com Einstein e Heisenberg, que as próprias teorias físicas são “sistemas lógicos de pensamento”⁴ (EINSTEIN. 2006, p. 21)⁵. Para Heisenberg “Uma ‘teoria fechada’ [como a mecânica newtoniana] é caracterizada por um sistema de definições e axiomas que estabelecem os

² WEIZSÄCKER, Carl Von. *The Structure of Physics*. Atlanta: Springer, 2006.

³ SILVA, Vinícius Carvalho da Silva. *Teoria Quântica, Física Nuclear e Filosofia Grega: Ensaio sobre os físicos filósofos do século XX*. Griot: Revista de Filosofia, Amargosa, Bahia – Brasil, v.1 5, n.1, p.233-250, junho/2017.

⁴ Em *Física e Realidade* Einstein considera que o sistema lógico de enunciados sobre o mundo, elaborados a partir de “conceitos primários” que tratam de entidades e eventos físicos, não pode ser construído pelo método indutivo. Embora as proposições da física devam concordar com os fatos naturais, o sistema lógico da teoria física só pode ser elaborado mediante o emprego da imaginação pura, da “especulação livre”. O objetivo da ciência é “em primeiro lugar, a mais completa compreensão conceitual de experiências sensíveis em toda sua variedade e sua interconexão lógica. Em segundo lugar porém, atingir este objetivo através do uso de um mínimo de conceitos e relações primárias (aspiração por uma visão de mundo unificada mais lógica possível ou simplicidade lógica de seus fundamentos)” (EINSTEIN. 2006, p. 10). Não é pela indução, no entanto, que podemos alcançar tal objetivo. A teoria física é um sistema lógico necessariamente dedutivo: “Não há método indutivo que conduza aos conceitos fundamentais da Física. O desconhecimento deste fato foi o erro filosófico básico de muitos pesquisadores do século XIX; ele foi certamente o motivo pelo qual a teoria molecular e a teoria de Maxwell só lograram se impor tardiamente. O pensamento lógico é necessariamente dedutivo e baseado em conceitos hipotéticos e axiomas” (p. 15-16). Ver: EINSTEIN, A. *Física e realidade*. *Rev. Bras. Ensino Fís.* [online]. 2006, vol.28, n.1, pp.9-22. A definição de teoria que Popper apresenta em *A Lógica da Pesquisa Científica* é próxima: as teorias são “sistemas de signos ou símbolos”, que formam “enunciados universais” (POPPER. 2013, p. 53). Ver: POPPER, K. *A Lógica da Pesquisa Científica*. São Paulo: Cultrix, 2013.

⁵ Idem.

conceitos fundamentais e suas interrelações” (HEISENBERG. 1974, p. 186)⁶. As chamadas provas lógicas que veremos a seguir possuem a mesma propriedade: são sistemas lógicos de definições e axiomas, que estabelecem conceitos fundamentais e chegam a conclusões formais. No entanto, as provas lógicas habitam o mundo da lógica pura, e delas não pretendemos extrair conclusões sobre o mundo natural ou a natureza da realidade física, embora muitas vezes sejam elaboradas com esse intuito.

A lógica é uma ciência exata, formal, e as formalizações das diversas provas ontológicas, como a de Gödel, e de “conjecturas ontológicas”, como as de Jeans e Schrödinger⁷, que veremos a seguir, constituem um importante objeto de investigação, não necessariamente pelo conteúdo conceitual do que está sendo “provado”, mas pela estrutura formal das provas, pela utilização de linguagens lógicas e pelos desenvolvimentos em lógica e ciências da computação que estes trabalhos podem demandar. É nesta exata medida que uma formalização computacional do sistema axiomático da prova ontológica de Gödel pode contribuir não somente para a História da Lógica como também para a epistemologia das ciências puras, na terminologia de Weizsäcker.

Antes de chegarmos ao trabalho de Gödel, passaremos de forma breve por diferentes argumentos ou provas, destacando o argumento ontológico de Anselmo, o argumento cosmológico de Newton em sua *Óptica*, o trabalho mais recente de Swinburne, e ofereceremos uma formalização para as conjecturas de Jeans e Schrödinger, que para as finalidades deste artigo chamaremos de “argumento de Jeans-Schrödinger”.

2 OS ARGUMENTOS OU PROVAS DA EXISTÊNCIA DE DEUS⁸

Diversos filósofos buscaram elaborar argumentos e provas lógicas da existência de Deus, de modo que tal existência fosse um objeto da razão e não somente de crença. De

⁶ HEISENBERG, W. *Across the Frontiers*. Michigan: Harper & Row, 1974.

⁷ Desconhecemos na literatura a utilização do termo “argumento de Jeans-Schrödinger” para se referir ao que James Jeans em *O Universo Misterioso* e Erwin Schrödinger em *Minha Concepção do Mundo* propuseram como solução para o problema da existência do mundo, e que nós consideramos nessa ocasião como argumentos ontológicos tão próximos epistemologicamente que podem ser unificados em uma mesma estrutura lógica. No entanto, cabe ressaltar que Jeans e Schrödinger não sistematizaram suas concepções metafísicas em um conjunto de premissas logicamente conectadas. Nosso exercício intelectual, abstrato, nesse sentido, é justamente converter o conteúdo conceitual de suas concepções metafísicas em um sistema lógico formal, composto por definições e axiomas.

⁸ Não é nossa intenção, nessa ocasião, discorrer detalhadamente sobre os argumentos e seus respectivos contra-argumentos, mas apresentar um panorama geral até culminarmos com a formalização do argumento de Gödel por Benz Müller e Woltzenlogel Paleo .

um modo geral, estes trabalhos podem ser classificados em três classes: “argumentos ontológicos”, “argumentos cosmológicos” e “argumentos teleológicos”. Grosso modo, estes argumentos são dedutivos⁹, mas podem ser indutivos e também abduativos. Não é nossa intenção uma reconstrução histórica ou epistemológica de tais argumentos, de modo que seremos brevíssimos em sua apresentação.

3 ARGUMENTOS ONTOLÓGICOS

Desde Anselmo de Cantuária¹⁰, os argumentos ontológicos visam deduzir Deus como *ens realissimum*, O Ser mais real, não a partir de fatos empíricos, mas de demonstrações lógicas¹¹. O argumento de Anselmo, em uma forma simplificada e atual, poderia ser apresentado da seguinte maneira:

A₁: Deus é o Ser mais perfeito que pode ser concebido.

A₂: É possível conceber um Ser perfeito que não existe.

A₃: É possível conceber um Ser perfeito que existe!

C₁: Posto que a existência seja uma perfeição, um ser existente é mais perfeito que um ser inexistente e mais perfeito que um ser meramente possível.

C₂: Disto se segue que o Ser mais perfeito que pode ser concebido deve existir necessariamente.

Podemos ainda resumir o argumento de Anselmo de outra maneira, nos valendo do trabalho de Glymour (2015):

Premissa 1: Podemos conceber um ser do qual nada maior pode ser concebido.

⁹ De acordo com Kant, a teologia natural possui caráter dedutivo (logo, seus argumentos também): “A teologia natural deduz os atributos e a existência de um autor do mundo a partir da constituição, da ordem e da unidade que se encontram neste mundo, no qual é necessário admitir uma dupla espécie de causalidade, assim como a regra de uma e de outra, ou seja, a natureza e a liberdade. Assim, ascende deste mundo até à inteligência suprema como ao princípio de toda a ordem e perfeição, seja na natureza seja no domínio moral. No primeiro caso denomina-se teologia física, no último teologia moral. Ver: KANT, Immanuel. *Crítica da Razão Pura*. Trad. Manuela Pinto dos Santos. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001. A 632 B 660

¹⁰ *Proslogion* II-IV.

¹¹ Ver: RUSSEL, Bertrand. *História da Filosofia Ocidental*. Trad. Breno Silveira. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1968. p.258.

Premissa 2: O que quer que seja concebido existe no entendimento de quem o concebe.

Premissa 3: Aquilo que existe no universo de quem o concebe e também existe na realidade é maior do que algo similar que existe apenas no entendimento de quem o concebe.

Portanto, um ser concebido, do qual nada maior pode ser concebido, deve existir na realidade assim como no entendimento.

Premissa 4: Deus é um ser do qual nada maior pode ser concebido.

Conclusão: Deus existe na realidade. (GLYMOUR, 2015, p. 16)

Várias formalizações do argumento de Anselmo foram propostas, como, p. ex., por Robinson (2004, p. 11)¹². Formalizações alternativas podem ser encontradas, por exemplo, no trabalho de Adams (1971) *The Logical Structure of Anselm's Arguments*¹³. O artigo de Silvestre (2017), *Sobre a formalização lógica do argumento ontológico de Anselmo*¹⁴ apresenta um panorama detalhado da formalização de Adams e de outros *papers* que trataram do mesmo objeto.

4 ARGUMENTOS COSMOLÓGICOS

Em Aristóteles encontramos as raízes dos argumentos cosmológicos na teoria do primeiro motor, que aparece em sua *Metafísica*¹⁵. A prova aristotélica da existência de um primeiríssimo ente foi cristianizada e reelaborada na Escolástica por Tomás de Aquino (Ver as “cinco vias”). Argumentos cosmológicos partem de verdades evidentes acerca do mundo natural, deduzindo a existência de Deus como sua melhor explicação. Uma forma atual e bastante simplificada do argumento cosmológico seria:

¹² ROBINSON, Timothy A. *A New Formalization of Anselm's Ontological Argument* (2004). Philosophy Faculty Publications. Paper 6. http://digitalcommons.csbsju.edu/philosophy_pubs/6

¹³ ADAMS, Robert. *The Logical Structure of Anselm's Arguments*. The Philosophical Review, 1971, 80:28-54.

¹⁴ SILVESTRE, Ricardo Souza. *Sobre a formalização lógica do argumento ontológico de Anselmo*. Revista Brasileira de Filosofia da Religião. / Brasília / v.2 n.2 / p 142-161 / dez. 2015 / ISSN.

¹⁵ De acordo com Aristóteles em sua *Metafísica* [1073a 23]: “O princípio, isto é, o primeiro entre os entes, é não-suscetível de movimento, em si mesmo e por concomitância, e promove o movimento primeiro e eterno, que é único. Dado que, necessariamente, aquilo que é movido é movido por algo; dado que o primeiro motor é, em si mesmo, não-suscetível de movimento; dado que o movimento eterno é promovido por algo eterno, e um movimento único, por algo único; dado que, além da locomoção simples do Todo, a qual dizemos que a primeira essência não-suscetível de movimento promove, vemos que há outras locomoções eternas, a dos planetas (de fato, o corpo que se move em círculo é eterno e sem repouso; provou-se isso nas discussões sobre a natureza), necessariamente, também cada uma dessas locomoções é movida por uma essência eterna que, em si mesma, é não suscetível de movimento”. Ver: ARISTÓTELES. Cad. Hist. Fil. Ci., Campinas, Série 3, v. 15, n. 1, p. 201-221, jan.-jun. 2005. Tal argumento aristotélico aparece nas cinco vias tomistas, a saber: 1. Primeiro motor; 2. Causa eficiente; 3. Ser necessário e Ser contingente; 4. Graus de perfeição e 5. Ordenamento teleológico. Para saber mais: TOMÁS, Aquino. *Suma de Teología*. Madri: Biblioteca de autores cristianos, 2001. p. 110-113. c.2 a.3.

A1: Se algo existe, então um Ser que o causou tem de existir necessariamente.

C1: O mundo existe.

C2: Disto se segue que necessariamente existe um Ser que é causa do mundo.

5 ARGUMENTO TELEOLÓGICO

O argumento do desígnio é um argumento teleológico, ou físico-teológico, conforme Kant. Argumentos de tal tipo partem da constatação da elevada ordem e beleza do mundo¹⁶. Como entender tal ordenamento senão assumindo a existência de um ordenador? Se o universo é ordenado como um projeto, tem de ser obra de um projetista. Um exemplo de tal argumento pode ser encontrado no Livro III, Parte I da Óptica¹⁷ de Isaac Newton, um tratado acerca da natureza da luz. Newton constata o “perfeito” funcionamento da mecânica natural, concluindo que a natureza é ordenada e o mundo é “governado” por leis universais¹⁸.

A questão fundamental colocada por Newton é: como se origina *“toda aquela ordem e beleza que vemos no mundo?”* (NEWTON. 2000, p. 279). Tudo nos revela de modo impactante que a natureza é dotada de ordem, beleza e unidade, da mecânica celeste à anatomia humana, o mundo funciona conforme leis que podem ser compreendidas pela razão, e comunicadas pela ciência por meio de uma linguagem matemática.

Não seria razoável concluir que o mundo surgiu por acaso, argumenta Newton. Como o acaso poderia produzir uma ordem tão complexa e vasta, mas unificada por meio de leis simples e cognoscíveis? (NEWTON. 2000, p. 297).

Newton sustenta que partindo da observação e da experimentação da natureza, concluímos que sua ordem pode ser explicada – somente – se admitimos a existência de um “princípio” ou Ente Supremo que organiza o real: um *“Ser incorpóreo, vivente, inteligente, onipresente” que imprimiu ordem a todas as coisas* (NEWTON. 2000, p. 280).

¹⁶ A quinta via, elaborada por Tomás de Aquino em sua *Suma Teológica*, parte da constatação da ordem no mundo para então assumir que tal ordem necessita de uma causa e que tal causa é Deus. Referências:

¹⁷ NEWTON, I. *Os Pensadores*. São Paulo: Editora Nova Cultural, 2000.

¹⁸ O filósofo alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz também apresentou um argumento da existência de Deus tendo como base a observação da ordem e beleza reinantes no mundo. Para saber mais: NEWNTON, Isaac; LEIBNIZ, Gottfried. *Os Pensadores*. São Paulo: Abril, 1983. E ainda: LEIBNIZ, Gottfried. *Os Pensadores* II. São Paulo: Abril, 1980.

O argumento físico-teleológico, em uma formulação simples, seria uma operação abdutiva:

- (a) Existe o mundo.
- (b) O mundo é ordenado.
- (c) Hipótese: Deus existe.
- (d) c explica a e b.
- (e) É muito provável que c.

6 O ARGUMENTO DE SWINBURNE

O filósofo Richard Swinburne (1934 -) buscou formular um argumento teleológico indutivo. Em tese, as críticas kantianas teriam atingido a dedução e a abdução. A indução estaria imune? Conforme Kant, o argumento físico-teleológico se reduz ao argumento ontológico, que é dedutivo. Já o argumento de Swinburne, sendo indutivo, partiria da existência do mundo e de regularidades naturais constatadas pela experiência até assumir a existência de Deus como a hipótese altamente provável, o que em certa medida nos remete ao argumento de Newton.

Swinburne elabora o argumento a partir de três observações:

- O₁: O mundo existe.
- O₂: O mundo é ordenado (tal ordenação é fantasticamente sofisticada).
- O₃: Este universo ordenado gerou estruturas orgânicas complexas.

A ciência ou o senso comum seriam capazes de explicar a origem do universo e das leis naturais? A resposta, conforme Swinburne, é negativa. A ciência poderia explicar *quais* leis fundamentais existem, mas não pode explicar *por que* elas existem. Como poderíamos entender o *por que* da existência do mundo? Uma hipótese razoável, talvez a única possível, seria assumir a existência de um Ser plenamente livre capaz de criar o mundo. Assim Swinburne chega ao seguinte argumento:

P₁: Observa-se F (F₁, F₂, F₃). [Que o mundo existe]

P₂: A hipótese D explica F. [Que Deus criou o mundo]
 C: Logo, é muito provável que D. [Logo, que Deus existe é muito provável]

7 OS ARGUMENTOS DE SCHRÖDINGER E JAMES JEANS COMO RECURSOS HEURÍSTICOS DE FUNDAMENTAÇÃO LÓGICA DO SISTEMA DE ENUNCIADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA¹⁹.

No tratamento ondulatório da mecânica quântica²⁰ (MQ), as partículas subatômicas são descritas como entidades matemáticas abstratas representadas por uma função de onda, cuja evolução temporal em um espaço de Hilbert é dada pela equação de Schrödinger²¹. Uma função de onda não ocupa uma posição pontual da métrica espaço-temporal e não pode ser concebida, em sentido usual, como um objeto material. No entanto, nos eventos de observação tais entidades aparecem, objetivamente, como partículas ou ondas

¹⁹ É possível afirmar que o tipo de interpretação idealista e de argumento ontológico de Schrödinger e Jeans já se encontra no pensamento do Bispo Berkeley: “Um dos argumentos centrais empregados por Berkeley a fim de fornecer a seu sistema imaterialista solidez lógica, profundidade metafísica, e eventualmente um importante meio de refutar quaisquer acusações de solipsismo é que a existência das coisas sensíveis é baseada em última instância nelas serem continuamente percebidas (concebidas) por Deus, ou – em outras palavras – nelas existirem na mente de Deus” p. 263. Ver: BRADATAN, C. Princípios. Natal, v.16, n.26, jul./dez. 2009, p. 257-284

²⁰ Formulado por de Broglie e Schrödinger. Para uma análise das diferenças entre as formulações ondulatórias da mecânica dos *quanta* de De Broglie e Schrödinger ver: MARTINS, R.A. De Louis de Broglie a Erwin Schrödinger: uma comparação In *Teoria Quântica: estudos históricos e implicações culturais* [online] (FREIRE JR, O., PESSOA JR, O., and BROMBERG, JL., orgs). Campina Grande: EDUEPB; São Paulo: Livraria da Física, 2011.

²¹ Na verdade desde que Schrödinger demonstrou, ainda nos anos 1930, a equivalência matemática entre a mecânica ondulatória e a mecânica matricial desenvolvida por Heisenberg, as entidades quânticas são representadas por funções de onda na mecânica quântica de um modo geral. O que está em disputa entre diferentes interpretações da MQ é o que provoca o colapso da função de onda e também qual é a natureza da função de onda. Em uma interpretação instrumentalista a função de onda pode ser compreendida como uma “constructo” (conceito desenvolvido por Wigner para se referir aos objetos da física teórica), um instrumento de cálculo, sem que com isso atribuamos a ela uma realidade física objetiva – o que se aproxima da abordagem positivista de Mach para o átomo. Já em uma abordagem realista, a ontologia da MQ se modifica, e à função de onda é atribuído o estatuto de uma entidade física objetiva cuja duração e extensão possuem valores reais na métrica espaço-temporal. Para ilustrar a contraposição entre tais posições, vale a pena destacar um trecho de David Bohm em *Causalidade e acaso na física moderna*, quando defende uma interpretação da MQ de acordo com a qual, para cada corpo (entidade quântica), há uma onda associada: “...essa onda é a oscilação de um novo tipo de campo, representado matematicamente pelo campo ψ de Schrödinger. Em outras palavras, não supomos mais que a função de onda de Schrödinger seja só um símbolo matemático conveniente para o cálculo de certas probabilidades. Em vez disso, ela passa a representar um campo objetivamente real, algo como os campos gravitacional e eletromagnético”. Ver: BOHM, D. *Causalidade e acaso na física moderna*. Rio de Janeiro: Contraponto, 2015, p. 2016. Para uma abordagem a um só tempo técnica (rica e detalhada quanto ao formalismo matemático) e histórica, com nuances epistemológicas, sugerimos capítulo 14 (principalmente a apresentação das várias formulações da equação de Schrödinger em p. 421-436) de *Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos* de Caruso e Oguri. Ver: CARUSO, F; OGURI, V. *Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos de Caruso e Oguri*. Rio de Janeiro: LCT, 2016.

detectadas pelo aparato de medida, com posição e *momentum* calculáveis conforme as relações de incerteza de Heisenberg²². Impõe-se, então, um dos mais tradicionais problemas da MQ: O que promove o colapso da função de onda?

John von Neumann propõe em *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (1932)²³ que é a medida (mensuração, ou “evento de observação”) que faz com que a “função de onda” se materialize em um objeto físico tal como um elétron (ou bem em forma particular (discreta) ou bem em forma ondulatória). Neumann assume que a medida pressupõe um observador e sustenta que qualquer tentativa de estabelecer uma demarcação precisa entre o sujeito senciante que realiza a medida, o evento de medição e o objeto medido, é arbitrária. A consciência do sujeito da medição constitui parte do sistema físico no qual a medida é tomada, de modo que o processo de medição só está completo quando se torna parte da consciência do medidor (NEUMANN. 1955, p. 419). Em última instância, é o observador²⁴ a peça chave do colapso da função de onda²⁵.

Conforme Santos e Pessoa Junior (2011)²⁶ a interpretação “mentalista” ou “subjetivista” da MQ surgiu quando Neumann (1932), London e Bauer (1939)²⁷ e Eugene Wigner (1960)²⁸, laureado com o Nobel de Física de 1963, defenderam que o “observador”

²² De acordo com o qual não podemos medir a posição e a velocidade de uma partícula com absoluta precisão. Quanto maior for a precisão da medida de um desses valores, proporcionalmente menor será a do outro valor. Quatro das diversas interpretações do princípio de incerteza podem ser consultadas em: SILVA, V. C. *O princípio de incerteza de Werner Heisenberg e suas interpretações ontológica, epistemológica, tecnológica e estatística*. In: Scientiarum História VII - É este lado o outro lado, 2014, Rio de Janeiro. É este lado o outro lado. Rio de Janeiro: UFRJ-HCTE, 2014. v. 1. p. 485-502.

²³ NEUMANN, J. v. *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1955. [Publicado originalmente em alemão em 1932 com o título *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin: Springer.]

²⁴ Conforme Freitas e Freire Jr: “Formalmente pode-se dizer que a passagem de uma superposição de estados para um estado específico é feita por um operador de projeção e, assim, essa redução de estado (ou redução do pacote de onda) acontece de acordo com o postulado de projeção. Como a medição, regida por esse postulado, é sempre feita por um observador que é externo ao sistema quântico e não pode ser descrito por esse formalismo (ao menos não enquanto no papel de observador), essa formulação também pode ser chamada de formulação da observação externa” (FREITAS; FREIRE JR. 2007, p. 2307-4). Ver: FREITAS, F; FREIRE JR., O. *A formulação dos 'estados relativos' da teoria quântica*. *Rev. Bras. Ensino Fís.* [online]. 2008, vol.30, n.2, pp.2307.1-2307.15.

²⁵ O que levanta diversas questões filosóficas acerca da relação mente-corpo, da natureza da mente e de seus modos de interação com a matéria. No campo da epistemologia da MQ um dos problemas mais conhecidos é o do “paralelismo psico-físico”.

²⁶ SANTOS, F. M; PESSOA JUNIOR, O. *Delineando o problema da medição na mecânica quântica: o debate de Margenau e Wigner versus Putnam*. *Sci. stud.* [online]. 2011, vol.9, n.3 [cited 2019-10-01], pp.625-644

²⁷ LONDON, F; BAUER, E. *La théorie de l'observation en mécanique quantique*. Paris: Hermann, 1939.

²⁸ Para saber mais sobre a relação entre Neumann e Wigner ler: SANTOS, F.M. *Na fronteira entre a ciência e a filosofia: reflexões filosóficas de Eugene P. Wigner*: Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Perspectivas - Revista do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UFT - v. 2 n. 2 (2017)

deve possuir uma consciência e que tal deve ser tomada como parte fundamental da descrição do sistema físico. Assim, Wigner considera que é uma “conclusão inevitável” que o conceito de “observador” não se refere a um aparato inanimado, mas a um ser dotado de consciência (Wigner, 1995) ²⁹.

Em certo sentido o mentalismo de Neumann, Fritz e Bauer e Wigner chega a uma conclusão semelhante à da Interpretação de Copenhagen: Não é possível falar do sistema observado sem fazer referência ao evento de observação. Mas enquanto para Bohr, Heisenberg et al., o aparato de medição e o evento de observação são descritos como objetos macroscópicos clássicos inanimados, para os mentalistas o tratamento deve incluir necessariamente a consciência (SANTOS, 2009). O observador não pode ser simplesmente um aparato de medida ou um arranjo experimental, implicando, a introdução no sistema, de um ser dotado de consciência, na qual se registrará a medida, concluindo-se a observação. Nessa “tradição mentalista” (Neumann, London e Bauer, Wigner), o observador é sempre tratado como o observador de um evento físico particular, o que significa que o universo em si nunca é tomado como uma entidade quântica, não havendo uma “função de onda do universo”. Sendo assim, seria desnecessário postular um “observador universal” ³⁰.

O que pretendemos explorar nessa oportunidade é o que chamaremos de “tradição do monismo idealista”, pouco explorada em nossa literatura especializada. Nessa outra perspectiva mentalista, representada pelos comentários filosóficos informais de James Jeans e Erwin Schrödinger, a mente que traz o mundo à realidade não é a mente particular do sujeito senciente que faz o papel de observador em um evento de medida ao colapsar a função de onda de um sistema quântico, mas a consciência de um “Observador Universal”, que realiza a medição não deste ou daquele sistema físico durante um evento experimental, mas que “observa” de modo único e simultâneo todos os objetos do universo.

Uma possível dificuldade conceitual parece se impor. Se o universo está sendo “observado”, então há um ente externo ao universo, o que nos leva a severas contradições. Se o universo é a totalidade do espaço-tempo então não há um lado de fora a partir do qual

Bahia, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, 2009. Além do fato de que o trabalho de Santos foi orientado por um de nossos maiores especialistas em História da Mecânica Quântica, Olival Freire Jr, o próprio autor se destaca pela meticulosidade de suas pesquisas sobre a obra de Wigner.

²⁹ WIGNER, E. *Philosophical Reflections and Synthese*. New York: Springer, 1995.

³⁰ A questão é abordada no debate entre Putnam, Wigner e Margenau. Wigner e Margenau, em resposta ao artigo de Putnam no qual o filósofo argumenta pela inconsistência lógica do formalismo da escola do observador externo para a MQ, sustentam que assumir uma função de onda do universo (e, portanto um observador universal que provoque seu colapso) é um passo desnecessário para o desenvolvimento da teoria. Detalhes sobre a querela podem ser lidos em Santos e Pessoa Junior (2011), op. cit.

poderia ser observado por uma entidade externa. A teoria de um observador universal seria conceitualmente imprecisa e logicamente inconsistente. Em *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*³¹ Hugh Everett, ao contrário de Wigner, postula uma “função de onda do universo”, mas nega o seu colapso, atacando o “observador externo” como postulado necessário para a mecânica quântica. Se o universo deve ser tratado como entidade quântica, existindo em uma miríade de estados superpostos, e se a função de onda não sofre nenhum tipo de redução, então para cada estado superposto há um mundo cuja realidade física objetiva é autônoma em relação aos mundos que correspondem aos outros estados superpostos. Everett nos brinda com a falsa promessa de simplicidade. Ele de fato elimina o observador externo da MQ, mas para tanto, multiplica ao infinito a existência de *Many-Worlds*, convertendo todos os mundos quanticamente possíveis em infindáveis universos objetivamente reais.

Nas concepções metafísicas de Jeans e Schrödinger, que podem ser simplesmente compreendidas como formas fortes de idealismo, não é necessário lidar com esta dificuldade específica que o conceito de “observador externo” traz quando aplicado ao universo. O observador não observa o universo fora, mas dentro de si. Todos os observadores particulares são externos às entidades físicas que observam. No espaço E no tempo T um contador Geiger registra a passagem de um elétron e um estudante toma nota dos dados, um arranjo de placas com emulsões nucleares em Chacaltaya registra a “trajetória” de uma partícula, e César Lattes identifica um méson- π , os subsistemas de detectores do ATLAS do LHC no CERN são acionados e a análise do evento nos leva a concluir que dos diversos produtos gerados pela colisão próton-próton, um se trata do bóson de Higgs. Em todos esses casos os eventos acontecem em $ET = xyz + t$ e são montados, executados e interpretados por observadores.

Entre esses observadores e tais eventos, por mais sofisticados que sejam, há uma relação cuja natureza é exatamente a mesma que a do evento trivial de um observador que vê uma caneta em sua mesa, ao alcance de suas mãos. Sujeito e objeto são duas entidades físicas independentes, cuja interação jamais violenta o que Einstein chamou de “princípio de separabilidade”³² dos objetos na métrica espaço-temporal. Por isso, afinal, o observador

³¹ EVERETT, H. *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton NJ: Princeton University Press, 1973.

³² Conforme Dahem: “sistemas espacialmente separados possuem realidades independentes” (DAHMEN, 2006, p. 7). Ver: DAHMEN, S. R. *Einstein e a Filosofia*. *Rev. Bras. Ensino Fís.* [online]. 2006, vol.28, n.1, pp.3-7.

é “externo” na MQ de Neumann e Wigner. Mas na metafísica de Jeans e Schrödinger o princípio de separabilidade é válido somente quando tratamos de eventos físicos particulares e seus respectivos observadores igualmente particulares. A relação entre o observador universal e o universo seria invertida, regida por uma inseparabilidade radical: o evento de observação é na verdade um evento de “introspecção” – ele ocorre no interior, ou na “consciência” do observador. O Observador Universal não observa o universo olhando em uma dada direção, ou tomando nota dos dados registrados em determinado arranjo experimental, mas tendo o universo presente como objeto de sua consciência³³.

Por conta de sua posição metafísica idealista Popper considerou que “Schrodinger era um parmediano confesso (interpretava o “ser uno” de Parmênides como pensamento ou consciência)” (POPPER. 2014, p 237)³⁴. Schrödinger desenvolveu uma filosofia idealista ou “mentalista” influenciada pelo pensamento indiano antigo³⁵, mas parece que Popper preferiu omitir a influência do pensamento oriental e enfatizar a presença de Parmênides no pensamento do formulador da mecânica ondulatória. Em linhas gerais, de sua obra *Minha Conceção do Mundo* podemos dizer que Schrödinger acreditava que todos os entes, tanto os psíquicos, para os quais cabem nomes como “eu” e “tu”, quanto os físicos, que chamamos de “elétrons”, “fótons” e assim por diante, formam uma unidade.

A impossibilidade de separação entre sujeito e objeto, já abraçada em obras como *Ciência e Humanismo* (Schrödinger, 1996)³⁶, é levada ao extremo em sua cosmovisão idealista quando defende em *Minha Conceção do Mundo* que a “hipótese do mundo exterior real” não é mais plausível ou menos metafísica do que a hipótese de que “em realidade todos somos unicamente aspectos diversos do Uno”³⁷ (SCHRÖDINGER, 1988, p. 125). É o Uno – e como Popper afirma, deve ser entendido como “consciência” na metafísica de Schrödinger – que estabelece a “totalidade do mundo” (SCHRÖDINGER, 1988, p. 38). Esse idealismo permitiria a Schrödinger reintroduzir o determinismo na mecânica quântica, pois, afinal, como destaca Piza, por meio dele poderíamos inferir que o

³³ Com essa explanação não assumimos simplesmente que o “postulado da observação interna” ou da “introspecção” seja mais consistente, sob qualquer aspecto, que a “teoria do observador externo”.

³⁴ POPPER, K. *O Mundo de Parmênides: Ensaio sobre o Iluminismo pré-socrático*. São Paulo: Editora Unesp, 2014.

³⁵ SILVA, V. C. A Filosofia da Natureza de Erwin Schrödinger. *Ensaio Filosófico*, v. IV, p. 167, 2011.

³⁶ SCHRÖDINGER, E. *A Natureza e os Gregos: seguido de Ciência e Humanismo*. Lisboa. Edições 70, 1996

³⁷ Importante frisar que Schrödinger não pretende extrair uma ontologia da filosofia indiana, tampouco afirma que a mesma pode ser organizada em um sistema de sentenças lógicas, enfatizando que dela podemos obter um postulado ético (1988, p. 125)

movimento aparentemente acausal de todos os átomos seria, em última instância, controlado, ou determinado, por uma variável oculta absoluta (PIZA. 2007, p. 277)³⁸.

Vamos assumir momentaneamente a teoria de Wigner de que são os eventos de observação dos sistemas físicos que promovem a passagem dos entes quânticos potenciais ou virtuais para entes quânticos “atuais”, mensuráveis³⁹, ou seja, de que é o observador que provoca o colapso da função de onda. Se os eventos de observação é que promovem a “atualização” da realidade, a passagem da possibilidade matemática à realidade física, o que ocorre com o universo, uma vez que nunca é globalmente observado?

Como responderíamos a tal questão a partir da “teoria da unidade e totalidade do mundo” de Schrödinger? Como o universo não oscila entre o ser e o não-ser, pois sempre é, então deve haver, necessariamente, um evento universal de observação, por meio do qual o universo não é somente uma miríade infindável de sistemas potenciais inobserváveis, mas se atualiza como o universo físico que observamos. O universo nunca deixa de ser “observado”, por que, na terminologia de Schrödinger, nunca perde sua totalidade e unidade, nunca deixa de estar presente no Uno⁴⁰.

³⁸ Conforme Piza ao se referir à adesão de Schrödinger ao pensamento indiano: “(...) o Eu, no sentido mais amplo do termo, é quem controla o movimento dos átomos de acordo com as leis da Natureza. Essa posição é confrontada com a dos Upanishads (Athman=Brahman, o eu pessoal identificado com o eu onipresente e eterno) e com a frase dos místicos: Deus Factus sum (Eu me fiz Deus)”. Ver: PIZA, A.F.R.T. *Schrödinger e Heisenberg: A Física além do senso comum*. São Paulo: Odysseus, 2007.

³⁹Hugh Everett oferece uma interpretação alternativa para tal questão em “*Relative State*” *Formulation of Quantum Mechanics*, negando qualquer passagem do “potencial ao atual”. Para Everett, em uma superposição quântica, todos os estados superpostos são igualmente atuais, todos são objetivamente existentes: “Toda a questão da transição do ‘possível’ para ‘real’ é tratada uma maneira muito simples na teoria - não existe essa transição, nem é necessária uma transição para que a teoria esteja de acordo com a nossa experiência. Do ponto de vista da teoria, todos elementos de uma superposição (todos os ‘ramos’) são ‘reais’, nenhum mais ‘real’ que todos os demais. É desnecessário supor que todos, exceto um, sejam de alguma forma destruídos, uma vez que todos os elementos separados de uma superposição obedecem individualmente à equação da onda com completa indiferença à presença ou ausência (‘atualidade’ ou não) de quaisquer outros elementos” (EVERETT. 1957, p. 15). Ver: EVERETT, H. “*Relative State*” *Formulation of Quantum Mechanics*. Rev. Mod. Phys. **29**, 454. 1957. Para nossos propósitos atuais é importante frisar ao menos dois pontos acerca da interpretação de Everett: (1) Na formulação da MQ de Everett é possível considerar a existência não somente de funções de onda de sistemas físicos particulares (desta ou daquela partícula, por exemplo), mas também da “função de onda do universo” (Um dos aspectos presentes no debate entre Wigner, Margeneau e Putnam), estendendo as implicações da MQ à cosmologia e (2) Se em uma superposição de estados quânticos emaranhados cada estado é igualmente “atual”, não havendo colapso da função de onda (pois quando o observador realiza a medição de um estado, todos os demais permanecem existindo de modo independente), se segue, na interpretação convencional da teoria de Everett, que cada estado “atual” não observado constitui parte de um mundo igualmente independente – daí a teoria ser também conhecida como “teoria dos muitos mundos”. Para saber mais ver Freitas e Freire Jr. (2008), op. cit.

⁴⁰ Para saber mais: SCHRÖDINGER, E. *Mi concépcion del Mundo*. Barcelona: Tusquets Editores, 1988.

O físico-filósofo britânico James Jeans também defendeu uma posição metafísica semelhante à de Schrödinger⁴¹. Para Jeans “Um pensamento ou ideia não existe sem que exista uma mente que o pensa” (JEANS. 1932, p. 1988). Em seguida assume que todos os objetos físicos existem enquanto “ideias”. Ora, o que promove a unificação do real se o mesmo objeto existe como ideia em n mentes diferentes? O que se passa com o objeto x quando ninguém o percebe e ele não se encontra presente em nenhuma mente? Desaparece? Deixa de ser? O problema só se resolve quando introduzimos no sistema uma mente que seja universal, na qual todos os objetos estejam ininterruptamente presentes:

O planeta Plutão, por exemplo, existia há muito tempo antes que uma mente humana existisse. (...) Considerações como essa levaram Berkeley a postular um Espírito Eterno, cuja mente observa todos os objetos que existem (...) A ciência moderna, me parece, nos conduz, por outras vias, a uma conclusão não muito diferente. (JEANS. 1932, p. 188-189)

E prossegue:

Não há discussão se “o objeto existe em minha mente ou na mente de outro indivíduo”; sua objetividade decorre de sua existência na mente de um “Espírito Eterno”. (JEANS. 1932, p. 188-189)

Embora sejam concepções distintas, com histórias e sutilezas filosóficas peculiares, vamos assumir, ainda que “instrumentalmente”, uma equivalência lógico-semântica entre o conceito de “ser único”⁴² de Schrödinger e o de “Espírito Eterno” de Jeans. De um modo geral e não sistemático, não como uma interpretação formal da mecânica quântica, mas como uma filosofia da natureza, uma concepção metafísica do mundo a partir dos resultados da ciência de seu tempo, o que basicamente os autores estão argumentando é que toda entidade existente é uma ideia na consciência, que a totalidade das entidades existentes (o universo) possui unidade, logo deve ser igualmente tratada como uma entidade existente, mas o universo não pode ser uma ideia em uma consciência particular, logo necessariamente deve existir uma consciência universal, que chamaremos de “observador universal”. Aplicando o raciocínio ao problema da “função de onda do universo”, poderíamos assumir que todos os universos superpostos existem potencialmente

⁴¹ Para saber mais, ver: JEANS, James. *L'universo misterioso*. Milão: Treves, 1932.

⁴² Ver Schrödinger, ao comentar a filosofia vedanta, que assume como “sistema ético”: “Em poucas palavras, a asserção é que nós, todos os seres vivos, estamos juntos por que em realidade somos todos os aspectos de um ser único, que na terminologia ocidental é chamado de Deus, mas nos *Upanishads* se chama Brahma” (SCHRÖDINGER. 1988, p. 114). Ora, se Deus é a realidade, em sua unicidade e totalidade, então o universo existe em Deus.

na consciência do observador universal, e que por algum “motivo”, que não faria sentido tentarmos “explicar”, o observador promove o colapso da função de onda, selecionando um desses universos potenciais e o atualizando como o universo físico objetivo, dentro do qual existem todos os demais seres⁴³.

Embora não seja um argumento ontológico clássico e explicitamente formulado, defendemos que as concepções metafísicas de Schrödinger e Jeans possuem um argumento ontológico implícito, que pode ser resumido em um sistema de definições (D), conclusões (C) e axiomas (A):

(A₁) Axioma 1: Algum universo é positivamente real⁴⁴.

R: ‘*x* é real’.

T: ‘*x* é um universo.’

⁴³ Com isso há uma conciliação entre o mais radical idealismo e o mais rigoroso realismo. O universo é um ente na mente de Deus, não em nossas mentes. Para cada um de nós a realidade física objetiva permanece sendo a mesma. Um elétron, por exemplo, existe independente de ser observado por este ou aquele indivíduo particular, e suas propriedades físicas não dependem de qualquer fenômeno de natureza subjetiva. Ora, se Deus é a realidade, em sua unicidade e totalidade, então o universo existe em Deus. Deus passaria aqui a ser “como” um conceito “físico”, e poderia ser pensado como um “campo”? Em realidade, o próprio nome “Deus” se tornaria logicamente desnecessário e fisicamente irrelevante? O que importaria conceitualmente seria a admissão de um “campo” *G* qualquer, com a propriedade de conter a função de onda do universo, registrando todos seus estados possíveis? Mas isso não nos traria grandes dificuldades conceituais? Afinal, um campo existe no espaço-tempo, e se o universo, em sentido geométrico, é a totalidade do espaço-tempo, como poderia haver um “campo” contendo-o? A natureza desse campo seria não-local? Tratar-se-ia de um “hiperespaço”? Para que o conceito de universo não se aplique também a esse campo, seria necessária uma descontinuidade, um “contorno de conjunto”, entre o campo e o universo por ele contido. Qual seria a natureza dessa “descontinuidade” ou “singularidade”? Quanto mais avançamos, mais se avolumam as dificuldades e os desafios, e maior se torna a demanda por uma definição clara dos conceitos. Qual resposta o idealismo – ou monismo psicofísico – de Jeans e Schrödinger oferece para o problema do colapso da função de onda, e da função de onda do universo? Aqui teríamos ao menos duas possibilidades. Ou bem há o colapso da função de onda por meio do evento de observação (interna/introspecção). Por meio de algum processo interno, dentre todos os mundos possíveis, superpostos na função de onda, ao *G* se “deter” em um, todos os demais “desvaneceriam”, como pensamentos que deixam de ser o objeto de concentração ou atenção de um sujeito, ou bem não há colapso da função de onda do universo, e todos os mundos quanticamente possíveis existem igualmente, e assim como esse universo em que habitamos existe objetivamente, associado a um dos estados quânticos da função de onda, existem inúmeros outros universos fisicamente objetivos, cada qual correspondendo a um estado possível dentre todas as superposições. Em última palavra, o idealismo de Jeans e Schrödinger parece compatível tanto com a teoria do colapso por ação do observador externo, de Wigner, quanto com a teoria dos muitos mundos, em que não há colapso, de Everett. Evidentemente o leitor deve estar atento para o fato de que nessa ocasião nosso interesse se volta exclusivamente para a exposição do tema, e para a análise de suas possibilidades e dificuldades conceituais e lógicas, e não para uma defesa ou adesão a nenhum sistema metafísico dentre os apresentados.

⁴⁴ Temos que tomar por autoevidente que ao menos um universo – este em que vivemos – é positivamente real. Por positivamente real entendemos aquilo cuja realidade física é objetiva e não apenas potencial. Temos que introduzir o conceito de “positivamente real” por conta do problema da função de onda, que estabelece as categorias de realidade positiva (ou objetiva) e realidade potencial como conceitos físicos.

$$\exists x(Tx \wedge Rx)$$

(A₂) Axioma: Se um observador é observador do universo⁴⁵ então é Deus.

A: ‘ x é o observador do universo’.

G: ‘ x é Deus’.

$$\forall x(Ax \rightarrow Gx)$$

(D₁) Definição 1: Para todo sistema quântico, uma entidade física é positivamente real se, e somente se, é objeto de um evento de observação.

F: ‘ x é uma entidade física’.

R: ‘ x é real’.

O: ‘ x é um objeto de observação’.

$$\forall x((Fx \rightarrow Rx) \leftrightarrow Ox)$$

(D₂) Definição 2: Para todo evento de observação, um observador é, necessariamente, positivamente real.

R: ‘ x é real’.

B: ‘ x é um observador’.

$$\forall x(Rx \leftrightarrow \exists x(Bx \wedge Rx))$$

(D₃) Definição 3: Para todo sistema quântico, algum universo, ao qual pertence, é uma entidade física.

F: ‘ x é uma entidade física’.

T: ‘ x é um universo’.

$$\forall x \exists x(Tx \wedge Fx)$$

⁴⁵ “Observador Universal”.

(C1) Conclusão 1: Se algum universo é positivamente real (R), então é objeto de um evento de observação .

T: ‘x é um universo.

R: ‘x é real’.

O: “x é um objeto de observação”.

$$\exists x(Tx \wedge Rx) \rightarrow Ox$$

(C2) Conclusão 2: Se algum universo é objeto de um evento de observação, então o observador do universo é positivamente real.

B: ‘x é um observador’.

T: ‘x é um universo.

R: ‘x é real’.

O: “x é um objeto de observação”.

$$\exists x(Tx \wedge Ox) \rightarrow \exists x(Ox \wedge Rx)$$

O axioma 2 é deduzido do pressuposto não formal de que somente um ser com os atributos de Deus poderia ser capaz de observar o universo globalmente, por ser onisciente e onipresente, evitando assim a sua absurda oscilação entre o ser e o não-ser. O que o axioma assume é que se há um observador do universo, então é Deus.

Nesta oportunidade representaremos formalmente o sistema de enunciados do argumento de Jeans-Schrödinger da seguinte maneira:

$$A_1. \exists x(Tx \wedge Rx)$$

$$A_2. \forall x(Ax \rightarrow Gx)$$

$$D_1. \forall x((Fx \rightarrow Rx) \leftrightarrow Ox)$$

$$D_2. \forall x(Rx \leftrightarrow \exists x(Bx \wedge Rx))$$

$$D_3. \forall x \exists x(Tx \wedge Fx)$$

$$C_1. \exists x(Tx \wedge Rx) \rightarrow Ox$$

$$C_2. \exists x(Tx \wedge Ox) \rightarrow \exists x(Ox \wedge Rx)$$

O que chamamos de argumento de Jeans-Schrödinger constitui um sistema lógico de enunciados que parte dos pressupostos (1) da realidade objetiva do mundo e (2) de que somente Deus poderia ser um observador universal, apresentados como os axiomas do sistema. A existência de tal observador universal é demonstrada na conclusão 2.

8 A PROVA ONTOLÓGICA DE GÖDEL⁴⁶

Kurt Gödel, (1906-1978) famoso por seu teorema da incompletude, é considerado um dos mais importantes lógicos do século passado, com importantes trabalhos em matemática pura e física teórica, tendo contribuído para a física relativística com soluções não estáticas para as equações de Einstein. Um universo relativístico de Gödel é um universo rotatório que permite o retrocesso temporal, ou a “viagem ao passado”⁴⁷ em que um viajante parte de Q e chega a P, sendo que $tP < tQ$ ⁴⁸.

Gödel deixou trabalhos não publicados, dentre os quais um argumento ontológico (publicado postumamente a partir da versão produzida por Dana Scott) e o esboço (não formal) de um argumento da duração do eu (*self*), ou seja, da sobrevivência do “eu” após a “morte”⁴⁹. Este argumento da “permanência do eu” é baseado no princípio de razão suficiente de Leibniz⁵⁰. Tudo o que existe possui uma razão. Para cada entidade X, Se X existe, então há uma razão R de X. Gödel argumenta que a vida humana não possuiria razão caso todas as possibilidades humanas não pudessem ser plenamente desenvolvidas. Como a vida humana, sem a permanência do eu, é curta demais para o pleno desenvolvimento de todas as suas possibilidades, o eu não pode simplesmente desaparecer. Quanto à prova ontológica do argumento de Gödel, uma versão bastante simplificada seria:

⁴⁶ Autor do famoso “teorema da incompletude”, de acordo com o qual há teorias consistentes que expressam a aritmética elementar, nas quais existem sentenças (ao menos uma), que embora sejam verdadeiras, não podem ser demonstradas. Para saber mais ver: NETTO, F. O. S. *Os teoremas de Gödel* in “Cadernos do IME – Série Matemática. Rio de Janeiro: IME. Vol. 23 (2011).

⁴⁷ Para saber mais ver: DAHMEN, Sílvia R.. Gödel e Einstein: e quando o tempo não resiste à amizade?. *Rev. Bras. Ensino Fis.* [online]. 2006, vol.28, n.4 [cited 2019-09-11], pp.531-539.

⁴⁸ K. Gödel, An example of a new type of cosmological solutions of Einstein’s field equations of gravitation, *Rev. Mod. Phys.* 21, n. 3 (1949)

⁴⁹ BRANQUINHO, João (Dir.); MURCHO, Desidério; GOMES; Nelson. *Enciclopédia de Termos lógico-filosóficos*. São Paulo: Martins fontes, 2006. p. 69-74.

⁵⁰ Para saber mais acerca de tal princípio, ver: HIRATA, Celi. *Leibniz e Hobbes: Causalidade e Princípio da Razão Suficiente*. Tese de Doutorado. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2012. p. 62,80,150,152,154,210,219.

Ax.1. Uma propriedade ou sua negação é positiva, mas não ambas [princípio aristotélico de não-contradição].

Th.1. Uma propriedade positiva existe necessariamente em algum caso particular (para cada propriedade positiva, há ao menos um ser que a possui).

Ax.2. Ser semelhante a Deus é uma propriedade positiva P porque é o conjunto de todas as propriedades positivas.

Th.2. Segue-se de Th.1. e Ax.2. que um ser que é semelhante a Deus tem de existir necessariamente, logo, Deus existe⁵¹.

A primeira formalização da prova ontológica de Gödel foi obtida por Benz Müller e Woltzenlogel Paleo, a partir de recursos computacionais (*theorem provers*). Os autores argumentam que tal desenvolvimento abre um novo campo de pesquisa para o desenvolvimento teórico da lógica pura, inserindo no campo o uso expressivo de sistemas computacionais. Os seres humanos devem continuar sendo os criadores e “intérpretes” dos sistemas lógicos, mas a computação pode ser muito útil nos processos de formalização e axiomatização. O resumo da formalização da prova ontológica de Gödel, *Formalização, Mecanização e Automatização da prova de existência de Deus de Gödel*, que traduzimos nessa oportunidade será apresentado ao final desse trabalho. Nela poderemos conferir as técnicas utilizadas, as linguagens empregadas, bem como uma explicação acerca dos axiomas, definições e teoremas desenvolvidos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo da história diversos autores apresentaram distintos tipos de “provas ontológicas”. Então, comprovaram a existência de Deus? Tal questão não se coloca. O que se pode demonstrar é que um determinado sistema de enunciados não é logicamente inconsistente. No caso do chamado argumento de Jeans-Schrödinger fizemos questão de destacar para nosso leitor que os autores não trabalharam em conjunto e não apresentaram nenhum argumento lógico que possa ser classicamente classificado de “prova ontológica”. No entanto, sustentamos que, de suas concepções metafísicas gerais, podemos as premissas básicas de um argumento ontológico implícito, que a bem da verdade, é mais facilmente identificável em Jeans e seu idealismo berkeliano, do que na “teoria da totalidade” de

⁵¹ Cristoph Benz Müller, da Universidade de Berlin, e Bruno Woltzenlogel, da Universidade de Tecnologia de Viena publicaram uma formalização computacional do argumento ontológico de Gödel, traduzida a seguir.

Schrödinger. Nesta primeira tentativa de formalização optamos por utilizar uma linguagem lógica clássica, sem o recurso à computação, estabelecendo quais seriam os axiomas e as definições subjacentes à filosofia dos autores, e quais conclusões podemos deduzir delas. Entretanto, necessitamos de estudos ulteriores para verificar a consistência lógica do sistema, a possibilidade de reescrevê-lo em outra linguagem e de submetê-lo a um “prorador de teoremas”.

Quanto ao trabalho de Benz Müller e Woltzenlogel Paleo, em sua formalização e axiomatização computacional da prova de Gödel, nos ativemos a uma discussão introdutória, não nos prolongando em uma apresentação minuciosa do formalismo, uma análise da linguagem, nem em discussões ulteriores acerca da consistência da prova. Evidentemente, seria apressado negar que o tema pode e deve ser mais bem estudado pela lógica matemática em busca de possíveis contribuições e desdobramentos. De um modo geral consideramos que a formalização da prova ontológica de Gödel de Benz Müller e Woltzenlogel Paleo é relevante e realmente importante em ao menos três sentidos:

- a. *Para a História da Ciência com especial interesse para a História da Lógica Pura:* Por retomar a abordagem de um problema tradicional e nos posicionar quanto ao seu tratamento no século XX. Em sentido biográfico lança luz sobre o trabalho não publicado de Gödel.
- b. *Para a Epistemologia, a Filosofia da Matemática e a Filosofia da Ciência:* Nestas áreas o trabalho de formalização computacional da prova de Gödel levanta diversas questões importantes. Qual é a natureza dos sistemas lógicos e como o desenvolvimento das ciências da computação pode contribuir para sua axiomatização? Como o entendimento humano e o automatismo computacional podem interagir na construção, formalização e axiomatização de sistemas lógicos? Como tais técnicas podem impactar o desenvolvimento das ciências exatas e ser aplicadas às ciências da natureza? Na descoberta matemática, qual papel cabe ao ser humano e qual aos sistemas computacionais?
- c. *Para a Metafísica:* Além das questões históricas e filosóficas pontuais, e dos problemas epistemológicos, a formalização e axiomatização de prova de Gödel pode realimentar discussões metafísicas, por exemplo, sobre a relação entre “essência” e “acidente” ou entre “existência actual” e “existência potencial”.

Nesta oportunidade destacamos os elementos epistemológicos de tal questão, ressaltando a relevância de investigações nessa direção para a História da Lógica, em sentido específico, e para a História da Ciência Pura, na concepção de Weizsäcker, de um modo geral, bem como para a Filosofia da Ciência.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Eduardo Simões da Universidade Federal do Tocantins pela leitura do manuscrito e por seus valiosos comentários sobre a discussão filosófica e o formalismo lógico. Agradeço ao professor Benz Müller da Freie Universität Berlin e ao professor Bruno Woltzenlogel Paleo da Vienna University of Technology pelo diálogo e pela autorização de publicar a tradução de seu texto. O Dr. Woltzenlogel Paleo revisou a tradução e nos brindou com uma interlocução instigante e fecunda. Agradeço a Clarissa Sousa de Oliveira McCoy, pesquisadora da University College Dublin, UCD, e colega de pesquisa na Universidade Estadual do Tocantins pela leitura da tradução e apontamentos. Pela discussão acerca de aspectos do jargão técnico da área de ciências da computação, agradeço ao professor Silvano Maneck Malfatti, do Núcleo de Inovação Tecnológica, NIT, da Unitins. Também pela leitura e pelo diálogo, agradeço ao professor André Carli Philot do Gentivm Schola Opitergvm.

REFERÊNCIAS

- ADAMS, R. *The Logical Structure of Anselm's Arguments*. The Philosophical Review, 1971, 80:28-54.
- ARISTÓTELES. *Cad. Hist. Fil. Ci.*, Campinas, Série 3, v. 15, n. 1, p. 201-221, jan.-jun. 2005.
- BOHM, D. *Causalidade e acaso na física moderna*. Rio de Janeiro: Contraponto, 2015.
- CARUSO, F; OGURI, V. *Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos de Caruso e Oguri*. Rio de Janeiro: LCT, 2016.
- BRADATAN, C. *Princípios*. Natal, v.16, n.26, jul./dez. 2009, p. 257-284
- BRANQUINHO, João (Dir.); MURCHO, Desidério; GOMES; Nelson. *Enciclopédia de Termos lógico-filosóficos*. São Paulo: Martins fontes, 2006. p. 69-74.

- DAHMEN, S. R. *Einstein e a Filosofia*. Rev. Bras. Ensino Fís. [online]. 2006, vol.28, n.1, pp.3-7.
- DAHMEN, Sílvio R. *Gödel e Einstein: e quando o tempo não resiste à amizade?* Rev. Bras. Ensino Fís. [online]. 2006, vol.28, n.4, pp.531-539.
- EINSTEIN, A. *Física e realidade*. Rev. Bras. Ensino Fís. [online]. 2006, vol.28, n.1, pp.9-22.
- EVERETT, H. “*Relative State*” *Formulation of Quantum Mechanics*. Rev. Mod. Phys. **29**, 454. 1957.
- EVERETT, H. *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton NJ: Princeton University Press, 1973.
- FREITAS, F; FREIRE JR., O. *A formulação dos 'estados relativos' da teoria quântica*. Rev. Bras. Ensino Fís. [online]. 2008, vol.30, n.2, pp.2307.1-2307.15.
- GÖDEL, Kurt. *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation*, Rev. Mod. Phys. 21, n. 3 (1949)
- HEISENBERG, W. *Across the Frontiers*. Michigan: Harper & Row, 1974.
- HIRATA, Ci. *Leibniz e Hobbes: Causalidade e Princípio da Razão Suficiente*. Tese de Doutorado. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2012. p. 62,80,150,152,154,210,219.
- JEANS, James. *L'universo misterioso*. Milão: Treves, 1932.
- KANT, Immanuel. *Crítica da Razão Pura*. Trad. Manuela Pinto dos Santos. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001. A 632 B 660
- LEIBNIZ, G. *Os Pensadores II*. São Paulo: Abril, 1980.
- LONDON, F; BAUER, E. *La théorie de l'observation en mécanique quantique*. Paris: Hermann, 1939.
- MARTINS, R.A. De Louis de Broglie a Erwin Schrödinger: uma comparação In *Teoria Quântica: estudos históricos e implicações culturais* [online] (FREIRE JR, O., PESSOA JR, O., and BROMBERG, JL., orgs). Campina Grande: EDUEPB; São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- NETTO. F. O. S. *Os teoremas de Gödel* in “Cadernos do IME – Série Matemática. Rio de Janeiro: IME. Vol. 23 (2011).
- NEUMANN, J. v. *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1955.
- NEWNTON, I; LEIBNIZ, G. *Os Pensadores*. São Paulo: Abril, 1983.
- NEWTON, I. *Os Pensadores*. São Paulo: Editora Nova Cultural, 2000.

- PIZA, A.F.R.T. *Schrödinger e Heisenberg: A Física além do senso comum*. São Paulo: Odysseus, 2007.
- POPPER, K. *A Lógica da Pesquisa Científica*. São Paulo: Cultrix, 2013.
- POPPER, K. *O Mundo de Parmênides: Ensaio sobre o Iluminismo pré-socrático*. São Paulo: Editora Unesp, 2014.
- ROBINSON, T. A. *A New Formalization of Anselm's Ontological Argument* (2004). Philosophy Faculty Publications. Paper 6.
- RUSSEL, Bertrand. *História da Filosofia Ocidental*. Trad. Breno Silveira. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1968.
- SANTOS, F. M; PESSOA JUNIOR, O. *Delineando o problema da medição na mecânica quântica: o debate de Margenau e Wigner versus Putnam*. *Sci. stud.* [online]. 2011, vol.9, n.3, pp.625-644
- SANTOS, F.M. *Na fronteira entre a ciência e a filosofia: reflexões filosóficas de Eugene P. Wigner*: Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, 2009.
- SCHRÖDINGER, E. *A Natureza e os Gregos: seguido de Ciência e Humanismo*. Lisboa. Edições 70, 1996.
- SCHRÖDINGER, E. *Mi concépcion del Mundo*. Barcelona: Tusquets Editores, 1988.
- SILVA, V. C. *A Filosofia da Natureza de Erwin Schrödinger*. *Ensaio Filosófico*, v. IV, p. 167, 2011.
- SILVA, V. C. *O princípio de incerteza de Werner Heisenberg e suas interpretações ontológica, epistemológica, tecnológica e estatística*. In: *Scientiarum História VII - É este lado o outro lado*, 2014, Rio de Janeiro. *É este lado o outro lado*. Rio de Janeiro: UFRJ-HCTE, 2014. v. 1. p. 485-502.
- SILVA, V. C. *Teoria Quântica, Física Nuclear e Filosofia Grega: Ensaio sobre os físicos filósofos do século XX*. *Griot: Revista de Filosofia*, Amargosa, Bahia – Brasil, v.1 5, n.1, p.233-250, junho/2017.
- SILVESTRE, R. S. *Sobre a formalização lógica do argumento ontológico de Anselmo*. *Revista Brasileira de Filosofia da Religião*. / Brasília / v.2 n.2 / p 142-161 / dez. 2015 / ISSN.
- TOMÁS, Aquino. *Suma de Teología*. Madri: Biblioteca de autores cristianos, 2001.
- WEIZSÄCKER, C. *The Structure of Physics*. Atlanta: Springer, 2006.
- WIGNER, E. *Philosophical Reflections and Synthese*. New York: Springer, 1995.

TRADUÇÃO

Formalização, Mecanização e Automação da Prova Ontológica de Gödel⁵²

Christoph Benz Müller and Bruno Woltzenlogel Paleo

Dahlem Center for Intelligent Systems, Freie Universität Berlin, Germany

c.benzmueller@gmail.com

Theory and Logic Group, Vienna University of Technology, Austria

bruno@logic.at

Atualização (31/08/2017): O resumo abaixo, carregado no arXiv em 21/08/2013, foi a primeira comunicação da formalização assistida por computador da prova ontológica de Gödel. Desde então, os seguintes trabalhos mais longos foram publicados: [11,10,19,13,12,8,7,16,15,14,17,9,18,20,3,38,29,21,28].

Tentativas de provar a existência (ou inexistência) de Deus por meio de argumentos ontológicos abstratos constituem uma antiga tradição em filosofia e teologia. A prova de Gödel [30,31] é uma culminação moderna desta tradição, seguindo particularmente os passos de Leibniz. Gödel define Deus como um ser que possui *todas as propriedades positivas*. Ele não discute extensivamente quais seriam tais propriedades, mas afirma em alguns axiomas (razoáveis, embora discutíveis) o que elas devem satisfazer. Várias versões ligeiramente diferentes dos axiomas e definições foram consideradas por Gödel e por vários filósofos que comentaram a sua prova (cf. [36,2,27,1,26]). A versão de Dana Scott da prova de Gödel [35] emprega os seguintes axiomas (A), definições (D), corolários (C) e teoremas (T), e prossegue na seguinte ordem:

⁵² N.T. Tradução de Vinícius Carvalho da Silva do original: *Formalization, Mechanization and Automation of Gödel's Proof of God's Existence* que pode ser encontrado no arXiv.org da Cornell University em: <<<https://arxiv.org/abs/1308.4526>>>. Conforme Woltzenlogel Paleo, quando os autores enviaram o presente trabalho para o Arxiv, a pesquisa nessa área estava só começando. Depois desse *abstract*, os autores publicaram vários *papers* explorando a fundo muitas variantes da prova ontológica de Gödel, além de outros tópicos relacionados. A maior parte deste trabalho está disponível em: <<<https://gitlab.com/aossie/ComputationalPhilosophy>>>. Informações bibliográficas sobre seus principais papers estão disponíveis aqui: <<<https://gitlab.com/aossie/ComputationalPhilosophy/blob/master/Papers/Papers.bib>>>.

A1	Uma propriedade ou sua negação é positiva, mas não ambas:	$\forall \phi [P(\neg \phi) \leftrightarrow \neg P(\phi)]$
A2	Uma propriedade necessariamente implicada por uma propriedade positiva é positiva:	$\forall \phi \forall \psi [(P(\phi) \wedge \Box \forall x [\phi(x) \rightarrow \psi(x)]) \rightarrow P(\psi)]$
T1	As propriedades positivas são possivelmente exemplificadas:	$\forall \phi [P(\phi) \rightarrow \Diamond \exists x \phi(x)]$
D1	Um ser <i>como-Deu</i> ⁵³ possui todas as propriedades positivas:	$G(x) \forall \phi [P(\phi) \rightarrow \phi(x)]$
A3	A propriedade de ser <i>como-Deus</i> é positiva:	$P(G)$
C	Possivelmente, Deus existe:	$\Diamond \exists x G(x)$
A4	As propriedades positivas são <i>necessariamente</i> positivas:	$\forall \phi [P(\phi) \rightarrow \Box P(\phi)]$
D2	A essência de um indivíduo é uma propriedade possuída por ele, e necessariamente implica qualquer uma de suas propriedades:	$\phi \text{ ess. } x \leftrightarrow \phi(x) \wedge \forall \psi (\psi(x) \rightarrow \Box \forall y (\phi(y) \rightarrow \psi(y)))$
T2	Ser como Deus é uma essência de qualquer ser <i>como-Deus</i> ⁵⁴ :	$\forall x [G(x) \rightarrow G \text{ ess. } x]$
D3	A existência necessária de um indivíduo é a necessária exemplificação de todas as suas essências:	$NE(x) \leftrightarrow \forall \phi [\phi \text{ ess. } x \rightarrow \Box \exists y \phi(y)]$
A5	A existência necessária é uma propriedade positiva:	$P(NE)$
T3	Necessariamente, Deus existe:	$\Box \exists x G(x)$

A versão de Scott da prova de Gödel foi analisada pela primeira vez com um grau de detalhe sem precedentes, e formalizada com a ajuda de *theorem provers*; cf. [40,39]. Foi feito o seguinte (nesta ordem):

⁵³ NT: *God-like*, no original.

⁵⁴ NT: No original “Being God-like is an essence of any God-like being”.

- Uma prova de dedução natural detalhada.
- Uma formalização dos axiomas, definições e teoremas na sintaxe TPTP THF [37].
- Verificação automática da consistência dos axiomas e definições com Nitpick [24].
- Demonstração automática dos teoremas com os provadores LEO-II [6] e Satallax [25].
- Uma formalização passo a passo usando o assistente de prova Coq [22].
- Uma formalização usando o assistente de prova Isabelle [34], onde os teoremas (e alguns adicionais lemmata) foram automatizados com Sledgehammer [23] e Metis [33].

É um desafio formalizar e verificar a prova de Gödel, pois esta requer uma linguagem lógica expressiva com operadores modais (*possivelmente* e *necessariamente*) e com quantificadores para indivíduos e propriedades.

Nossas formalizações computacionalmente assistidas dependem de uma incorporação da lógica modal por uma lógica clássica de ordem superior com semântica de Henkin [5,4]. Assim, a formalização é essencialmente feita em lógica clássica de ordem superior, onde a lógica modal quantificada é emulada. Em nosso estudo computacional em andamento da prova de Gödel, obtivemos os seguintes resultados:

- A lógica modal básica K é suficiente para provar T1, C e T2.
- A lógica modal S5 não é necessária para provar T3; a lógica KB é suficiente.
- Sem o primeiro conjunto $\varphi(x)$ em D2, o conjunto de axiomas e definições seria inconsistente.
- Para provar o teorema T1, apenas a direção *esquerda-direita* do axioma A1 é necessária. No entanto, a direção reversa de A1 é necessária para provar T2.

Este trabalho atesta a maturidade de ferramentas contemporâneas automatizadas e interativas de dedução para a lógica clássica de ordem superior e demonstra a elegância e a relevância prática de abordagens baseadas em embarcamentos⁵⁵. Mais importante, nosso

⁵⁵ NT: A expressão utilizada pelos autores no original é “embeddings-based approach”.

trabalho abre novas perspectivas para uma filosofia teórica assistida por computador. A discussão crítica dos conceitos subjacentes, definições e axiomas permanece uma responsabilidade humana, mas o computador pode auxiliar na construção e verificação de argumentos lógicos rigorosamente corretos. Em caso de disputas lógico-filosóficas, o computador pode verificar se os argumentos da disputa cumprem parcialmente o ditado de Leibniz: *Calculemus* - Vamos calcular!

Referências⁵⁶

1. R.M. Adams. Introductory note to *1970. In Kurt Gödel: Collected Works Vol. 3: Unpublished Essays and Letters. Oxford University Press, 1995.
2. A.C. Anderson and M. Gettings. Gödel ontological proof revisited. In Gödel'96: Logical Foundations of Mathematics, Computer Science, and Physics: Lecture Notes in Logic 6, pages 167–172. Springer, 1996.
3. Matthias Bentert, Christoph Benzmüller, David Streit, and Bruno Woltzenlogel Paleo. Analysis of an ontological proof proposed by Leibniz. In Charles Tandy, editor, Death and Anti-Death, Volume 14: Four Decades after Michael Polanyi, Three Centuries after G.W. Leibniz. Ria University Press, 2016.
4. C. Benzmüller and L.C. Paulson. Exploring properties of normal multimodal logics in simple type theory with LEO-II. In Festschrift in Honor of Peter B. Andrews on His 70th Birthday, pages 386–406. College Publications, 2008.
5. C. Benzmüller and L.C. Paulson. Quantified multimodal logics in simple type theory. *Logica Universalis (Special Issue on Multimodal Logics)*, 7(1):7–20, 2013.
6. C. Benzmüller, F. Theiss, L. Paulson, and A. Fietzke. LEO-II - a cooperative automatic theorem prover for higher-order logic. In Proc. of IJCAR 2008, volume 5195 of LNAI, pages 162–170. Springer, 2008.
7. Christoph Benzmüller. Gödel's ontological argument revisited – findings from a computer-supported analysis (invited). In Ricardo Souza Silvestre and Jean-Yves B'éziau,

⁵⁶ O original foi publicado no arXiv.org da Cornell University. Todo o texto, o que evidentemente inclui as referências, segue outra normatização que não a da ABNT. Decidimos manter a forma e estrutura do original, não o adequando às normas seguidas pela revista. Desta feita, as referências que se seguem estão rigorosamente conforme ao do manuscrito original.

editors, Handbook of the 1st World Congress on Logic and Religion, João Pessoa, Brazil, page 13, 2015. (Invited abstract).

8. Christoph Benzmüller, Leon Weber, and Bruno Woltzenlogel Paleo. Computer-assisted analysis of the Anderson-Hajek ontological controversy. In Ricardo Souza Silvestre and Jean-Yves Beziau, editors, Handbook of the 1st World Congress on Logic and Religion, Joao Pessoa, Brasil, pages 53–54, 2015. (superseded by 2016 article in Logica Universalis).

9. Christoph Benzmüller, Leon Weber, and Bruno Woltzenlogel Paleo. Computer-assisted analysis of the Anderson-Hájek controversy. Logica Universalis, 11(1):139–151, 2017.

10. Christoph Benzmüller and Bruno Woltzenlogel Paleo. Gödel’s God in Isabelle/HOL. Archive of Formal Proofs, 2013. (Formally verified).

11. Christoph Benzmüller and Bruno Woltzenlogel Paleo. Gödel’s God on the computer. In S. Schulz, G. Sutcliffe, and B. Konev, editors, Proceedings of the 10th International Workshop on the Implementation of Logics, 2013. (Invited paper).

12. Christoph Benzmüller and Bruno Woltzenlogel Paleo. Automating Gödel’s ontological proof of God’s existence with higher-order automated theorem provers. In Torsten Schaub, Gerhard Friedrich, and Barry O’Sullivan, editors, ECAI 2014, volume 263 of Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, pages 93 – 98. IOS Press, 2014.

13. Christoph Benzmüller and Bruno Woltzenlogel Paleo. Gödel’s proof of God’s existence. In Jean-Yves Beziau and Katarzyna Gan-Krzywoszynska, editors, Handbook of the World Congress on the Square of Opposition IV, pages 22–23, 2014. (superseded by ECAI-2014 paper).

14. Christoph Benzmüller and Bruno Woltzenlogel Paleo. Experiments in computational metaphysics: Gödel’s proof of god’s existence. In Subhash C. Mishram, Ramgopal Uppaluri, and Varun Agarwal, editors, Science & Spiritual Quest, Proceedings of the 9th All India Students’ Conference, 30th October – 1 November, 2015, IIT Kharagpur, India, pages 23–40. Bhaktivedanta Institute, Kolkata, www.binstitute.org, 2015. (Invited paper, superseded by article in Savijnanam).

15. Christoph Benzmüller and Bruno Woltzenlogel Paleo. Higher-order modal logics: Automation and applications. In Adrian Paschke and Wolfgang Faber, editors, Reasoning Web. Web Logic Rules - 11th International Summer School 2015, Berlin, Germany, July

- 31 - August 4, 2015, Tutorial Lectures, number 9203 in LNCS, pages 32–74, Berlin, Germany, 2015. Springer.
16. Christoph Benz Müller and Bruno Woltzenlogel Paleo. Interacting with modal logics in the Coq proof assistant. In Lev D. Beklemishev and Daniil V. Musatov, editors, Computer Science - Theory and Applications - 10th International Computer Science Symposium in Russia, CSR 2015, Listvyanka, Russia, July 13-17, 2015, Proceedings, volume 9139 of LNCS, pages 398–411. Springer, 2015.
17. Christoph Benz Müller and Bruno Woltzenlogel Paleo. On logic embeddings and Gödel’s God. In Mihai Codrescu, Razvan Diaconescu, and Ionut Tutu, editors, Recent Trends in Algebraic Development Techniques: 22nd International Workshop, WADT 2014, Sinaia, Romania, September 4-7, 2014, Revised Selected Papers, number 9563 in LNCS, pages 3–6, Sinaia, Romania, 2015. Springer. (Invited paper).
18. Christoph Benz Müller and Bruno Woltzenlogel Paleo. The inconsistency in Gödel’s ontological argument: A success story for AI in metaphysics. In Subbarao Kambhampati, editor, IJCAI 2016, volume 1-3, pages 936–942. AAAI Press, 2016.
19. Christoph Benz Müller and Bruno Woltzenlogel Paleo. The modal collapse as a collapse of the modal square of opposition. In Jean-Yves Beziau and Gianfranco Basti, editors, The Square of Opposition: A Cornerstone of Thought (Collection of papers related to the World Congress on the Square of Opposition IV, Vatican, 2014), <http://www.springer.com/us/book/9783319450612>, Studies in Universal Logic. Springer International Publishing Switzerland, 2016.
20. Christoph Benz Müller and Bruno Woltzenlogel Paleo. An object-logic explanation for the inconsistency in Gödel’s ontological theory (extended abstract, sister conferences). In Malte Helmert and Franz Wotawa, editors, KI 2016: Advances in Artificial Intelligence, Proceedings, LNCS, pages 244–250, Berlin, Germany, 2016. Springer.
21. Christoph Benz Müller and Bruno Woltzenlogel Paleo. Experiments in Computational Metaphysics: Gödel’s proof of God’s existence. Savijnanam: scientific exploration for a spiritual paradigm. *Journal of the Bhaktivedanta Institute*, 9:43–57, 2017.
22. Y. Bertot and P. Casteran. *Interactive Theorem Proving and Program Development*. Springer, 2004.
23. J.C. Blanchette, S. Böhme, and L.C. Paulson. Extending Sledgehammer with SMT solvers. *Journal of Automated Reasoning*, 51(1):109–128, 2013.

24. J.C. Blanchette and T. Nipkow. Nitpick: A counterexample generator for higher-order logic based on a relational model finder. In Proc. of ITP 2010, number 6172 in LNCS, pages 131–146. Springer, 2010.
25. C.E. Brown. Satallax: An automated higher-order prover. In Proc. of IJCAR 2012, number 7364 in LNAI, pages 111 – 117. Springer, 2012.
26. R. Corazzon. Contemporary bibliography on the ontological proof (<http://www.ontology.co/biblio/ontological-proof-contemporary-biblio.htm>).
27. M. Fitting. Types, Tableaux and Gödel’s God. Kluwer Academic Press, 2002.
28. David Fuenmayor and Christoph Benzmüller. Automating emendations of the ontological argument in intensional higher-order modal logic. In KI 2017: Advances in Artificial Intelligence 40th Annual German Conference on AI, LNAI. Springer, 2017.
29. David Fuenmayor and Christoph Benzmüller. Types, Tableaus and Gödel’s God in Isabelle/HOL. Archive of Formal Proofs, 2017. Formally verified with Isabelle/HOL.
30. K. Gödel. Ontological proof. In Kurt Gödel: Collected Works Vol. 3: Unpublished Essays and Letters. Oxford University Press, 1970.
31. K. Gödel. Appendix A. Notes in Kurt Gödel’s Hand, pages 144–145. In [36], 2004.
32. A.P. Hazen. On Gödel’s ontological proof. Australasian Journal of Philosophy, 76:361–377, 1998.
33. J. Hurd. First-order proof tactics in higher-order logic theorem provers. In Design and Application of Strategies/Tactics in Higher Order Logics, NASA Tech. Rep. NASA/CP-2003-212448, pages 56–68, 2003.
34. T. Nipkow, L.C. Paulson, and M. Wenzel. Isabelle/HOL: A Proof Assistant for Higher-Order Logic. Number 2283 in LNCS. Springer, 2002.
35. D. Scott. Appendix B. Notes in Dana Scott’s Hand, pages 145–146. In [36], 2004.
36. J.H. Sobel. Logic and Theism: Arguments for and Against Beliefs in God. Cambridge U. Press, 2004.
37. G. Sutcliffe and C. Benzmüller. Automated reasoning in higher-order logic using the TPTP THF infrastructure. Journal of Formalized Reasoning, 3(1):1–27, 2010.
38. B. Woltzenlogel Paleo. Leibniz’s *characteristica universalis* and *calculus ratiocinator* today. In Charles Tandy, editor, *Death and Anti-Death*, Volume 14: Four Decades after Michael Polanyi, Three Centuries after G. W. Leibniz. Ria University Press, 2016.

39. B. Woltzenlogel Paleo and C. Benzmüller. Computational philosophy repository (<https://gitlab.com/aossie/ComputationalPhilosophy/>). 40. B. Woltzenlogel Paleo and C. Benzmüller. Formal theology repository (<https://github.com/FormalTheology/GoedelGod>).