

K-SUN PERTENCE A B₂-EPG-HELLY

K-SUN BELONGS TO HELLY B₂-EPG
K-SUN PERTENECE A B₂-EPG-HELLY

Tanilson Dias dos Santos

Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação - PESC/COPPE-UFRJ. Professor do Curso de Ciência da Computação - Universidade Federal do Tocantins. tanilson.dias@mail.uft.edu.br

 0000-0002-0636-5751

Kedson Alves Silva

Bacharel em Ciência da Computação – Universidade Federal do Tocantins. alves.kedson@mail.uft.edu.br

 0000-0003-0370-3118

Luis Fernando dos Santos Marinho

Bacharel em Ciência da Computação – Universidade Federal do Tocantins. fernando.marinho@mail.uft.edu.br

 0000-0003-0412-7431

Correspondência: Universidade Federal do Tocantins, Reitoria, DIRETORIA DE COMUNICAÇÃO. Quadra 109

Norte Avenida NS 15, Plano Diretor Norte, 77001090 - Palmas, TO – Brasil.

Recebido em: 14.03.2023.
Aceito em: 16.05.2023.
Publicado em: 02.06.2023.

RESUMO:

Neste artigo exploramos a classe de grafos B_2 -EPG e a propriedade Helly. Apresentamos resultados genéricos sobre representações EPG e definimos termos que suportam os demais resultados, além disso, apresentamos um algoritmo inédito que constrói uma representação B_2 -EPG-Helly de qualquer grafo k -sun.

PALAVRAS-CHAVE: B_2 -EPG; Teoria dos Grafos; Grafos de Interseção; Propriedade Helly; Grafos k -sun.

Introdução

EPG é o acrônimo de Edge-intersection Graphs of Paths on a Grid. Eles correspondem exatamente à classe de grafos de interseção de caminhos em uma grade. A classe de grafos EPG foi definida por Golumbic, Lipshteyn e Stern (2009), estudada posteriormente por Golumbic, Lipshteyn e Stern (2013) além de ser explorada por trabalhos recentes na literatura (Asinowski; Suk, 2009; Cameron; Chaplick; Hoàng, 2013; Heldt; Knauer; Ueckerdt, 2014a; Szwarcfiter et al., 2020; Alcón; Mazzoleni; Santos, 2021; Marinho; Silva; Santos, 2023). Em particular, a classe de grafos B_2 -EPG tem sido uma das menos estudada, onde podemos citar os trabalhos de Heldt, Knauer e Ueckerdt (2014b) que abordam o bend number de grafos planares e outerplanares, Biedl e Stern (2010) que classificaram grafos linha e grafos planares bipartidos como B_2 -EPG, assim como Alcón et al. (2018) e Francis e Lahiri (2016) que classificaram, respectivamente, os grafos arco-circulares normais e grafos Halin como B_2 -EPG. Dentre os trabalhos mais importantes podemos citar Pergel e Rzażewski (2017) que apresentaram uma prova de NP-completude para o problema de reconhecimento de grafos B_2 -EPG.

Uma *representação EPG* de um grafo G , denotada por R_G , é um modelo de interseção de caminhos em uma grade. Existe uma relação bijetiva entre o conjunto de vértices e arestas do grafo G e sua representação EPG. Denotamos cada vértice $v_i \in$

$V(G)$ como um caminho relacionado P_{v_i} desenhado na grade, e dois vértices V_i, V_j são adjacentes um ao outro se e somente se os caminhos correspondentes (P_{v_i} e P_{v_j}) possuem interseção em pelo menos uma aresta. Denotamos cada caminho da representação como um conjunto de arestas (e não de vértices), de forma que o caminho é considerado uma sequência finita de aresta consecutivas $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_2, v_3), e_3 = (v_3, v_4), \dots, e_i = (v_i, v_{i+1}), \dots, e_m = (v_m, v_{m+1})$, onde $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$. Um *caminho na representação* é um caminho Hospedado na grade.

Uma dobra é definida como um par de arestas consecutivas, e_1 e e_2 , que possuem direções diferentes na grade. Quando isso acontece e_1 e e_2 são chamadas de arestas de dobra. Se um caminho não possui dobras, ele é chamado de segmento. Ainda sobre representações EPG, dizemos que é uma representação B_k -EPG, quando todos os caminhos da representação possuem no máximo k dobras, i.e. k mudanças de direção, onde $k \geq 0$ e k é um inteiro.

Uma propriedade muito famosa da Teoria dos Conjuntos é a propriedade Helly. Esta propriedade de conjuntos intersectantes pode ser definida da seguinte forma: Uma coleção de conjuntos satisfaz a propriedade Helly quando toda subcoleção que é mutuamente intersectante possui pelo menos um elemento em comum. Em uma representação EPG de um grafo G , observamos a propriedade Helly com relação às aresta-interseções dos caminhos. Quando uma coleção de caminhos é mutuamente intersectante, se essa coleção compartilha pelo menos uma aresta em comum da representação, então ela é uma representação Helly.

Figura 1 Conjuntos que não satisfazem a propriedade Helly (esquerda) e conjuntos que satisfazem a propriedade (direita), respectivamente

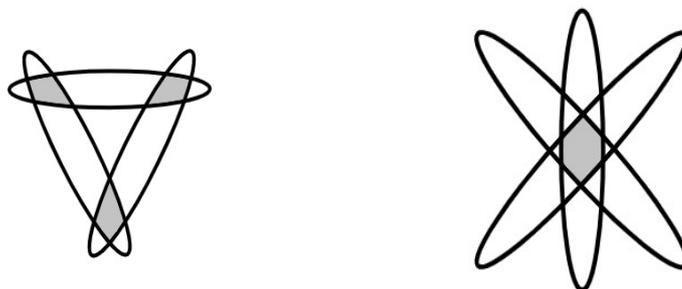
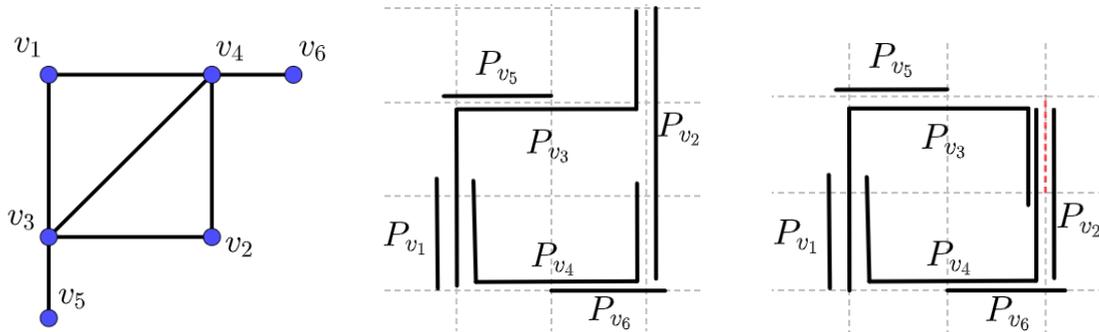


Figura 2 Um grafo G (esquerda), uma representação B_2 -EPG não Helly de G (centro), e uma representação B_2 -EPG-Helly de G (direita), respectivamente



A Figura 1 apresenta duas famílias de subconjuntos, cada família de subconjuntos é intersectante aos pares, ou seja, uma família de interseção 2 a 2, ou podemos dizer que quaisquer dois elementos destas famílias têm interseção não vazia. A família de conjuntos representada na Figura 1, à esquerda, é uma interseção de pares, mas a interseção de todos os conjuntos é vazia, portanto, é um exemplo de família de conjuntos que não satisfaz a propriedade Helly. Por outro lado, representado na Figura 1, à direita, temos uma coleção de conjuntos de interseção aos pares cuja interseção de todos os elementos é não vazia, dessa forma essa coleção satisfaz a propriedade Helly.

Podemos observar a propriedade Helly na Teoria dos Grafos. Em particular, em grafos EPG observamos a propriedade Helly nas interseções do conjunto de caminhos na representação. Na Figura 2 está representado um grafo G , com duas de suas possíveis representações B_2 -EPG. Na Figura 2, à direita, temos uma representação onde os caminhos $P_{v_2}, P_{v_3}, P_{v_4}$ se intersectam e possuem uma aresta em comum, logo a representação é Helly. Por outro lado, na Figura 2, no centro, temos um conjunto de caminhos que se intersectam aos pares, mas não há aresta da representação comum, simultaneamente, a esses 3 caminhos, constituído assim uma representação não Helly.

Metodologia

Neste trabalho adotamos uma metodologia de pesquisa exploratória e investigativa. É investigativa e exploratória porque seu objetivo é investigar ou conhecer algo que, por meio dessa pesquisa, dê um ponto de vista mais completo sobre o problema em estudo. Neste trabalho procuramos explorar, de forma geral, a classe de grafos B_2 -EPG e seu relacionamento com a propriedade Helly.

Esta pesquisa investiga os grafos B_2 -EPG e resultados genéricos sobre relacionamentos entre caminhos. A seção a seguir traz algumas definições e resultados

gerais do trabalho, além disso, apresentamos algoritmos que geram representações B_2 -EPG de alguns grafos em particular.

Alguns Resultados para Gráficos B_2 -EPG e Outros

A seguir apresentamos alguns dos resultados obtidos no estudo da classe B_2 -EPG.

a. Resultados Genéricos

Lema 1. Seja L_1 e L_2 duas linhas da grade paralelas entre si, se um caminho P_1 aresta-intersecta L_1 e L_2 então necessariamente o caminho P_1 possui no mínimo duas dobras.

Demonstração. Sem perda de generalidade, considere duas linhas distintas quaisquer horizontais (portanto paralelas) da grade, digamos L_1 e L_2 . Se o caminho P_1 , possui um segmento sobre a linha L_1 , então ele deve gastar pelo menos uma dobra para alcançar a linha L_2 . Porém, se P_1 alcança L_2 e não dobra novamente então P_1 , no máximo, irá vértice-intersectar a linha L_2 . Portanto, para que haja um segmento de P_1 sobre L_2 é necessário que P_1 possua, no mínimo, duas dobras.

#

Corolário 2. Se o caminho $P_1 \in B_2$ -EPG, onde P_1 possui duas dobras, então P_1 possui exatamente dois segmentos na mesma direção (seja horizontal ou vertical).

Demonstração. Em uma grade retangular existem apenas duas direções (horizontal e vertical). Se o caminho P_1 possui duas dobras, necessariamente, ele é composto por três segmentos. Logo, pelo princípio da casa dos pombos, necessitamos acomodar esses três segmentos nas duas direções possíveis, i.e., temos mais segmentos que direções para acomodar. Inevitavelmente vamos ter que acomodar dois segmentos em uma das direções.

#

Definição 3. Seja P_1 um caminho B_2 -EPG com duas dobras. Chamamos o segmento central de P_1 de corpo, enquanto os segmentos ligados ao corpo são chamados de pernas.

Corolário 4. Seja $P_1 \in B_2$ -EPG, onde P_1 possui duas dobras e três segmentos. O segmento do corpo de P_1 possui direções contrária aos segmentos das pernas de P_1 .

Demonstração. Pelo Corolário 2 sabemos que existem dois segmentos na mesma direção. Suponha por contradição que o corpo e, pelo menos, uma das pernas possua a mesma direção. Ora, mas se isso ocorrer teremos dois segmentos consecutivos do mesmo caminho na mesma direção. Neste caso, ou os segmentos estão sobre a mesma

linha da grade, se estiverem juntos, um ao final do outro, na verdade formam um mesmo segmento. Ou estão sobre a mesma linha e há uma descontinuidade, logo não forma um caminho. Ou então estão em linhas da grade distintas, nesse caso pelo Lema 1 o caminho possui mais de duas dobras. Em todos os casos chegamos a uma contradição.

#

Corolário 5. Seja $P_1 \in B_2$ -EPG, onde P_1 possui duas dobras e três segmentos, se P_1 possui dois segmentos na mesma direção, então esses dois segmentos estão em linhas paralelas da grade de representação.

Demonstração. Pelo Corolário 4, sabemos que o corpo de P_1 possui direção oposta à direção das pernas, além disso, em cada extremidade do segmento do corpo de P_1 existe uma dobra para os segmentos das pernas. Consideremos P_1 formado pelos segmentos S_1 , S_2 e S_3 , com S_2 sendo o corpo, e considerando uma linha qualquer da grade de representação, digamos L_1 , se S_2 está sobre L_1 da coluna C_1 até a coluna C_2 , como S_1 e S_3 devem ter direção oposta a S_2 e compartilham 1 vértice de extremidade com S_2 , então S_1 e S_3 devem estar, necessariamente, um sobre C_1 e o outro sobre C_2 . Como C_1 e C_2 são colunas das extremidades do segmento S_1 , concluímos que S_1 e S_3 são, portanto, paralelas entre si.

#

Lema 6. Sejam S_1 e S_2 dois segmentos de caminhos distintos de uma representação EPG, se $S_1 \cap_v S_2 \neq \emptyset$ e $S_1 \cap_e S_2 = \emptyset$, então no máximo $|S_1 \cap_v S_2| = 1$.

Demonstração. Em uma grade de representação EPG, um segmento de um caminho está disposto unicamente sobre uma linha da grade. Dessa forma digamos que S_1 e S_2 estejam dispostos unicamente sobre as linhas da grade L_1 e L_2 respectivamente, onde L_1 e L_2 podem ser linhas de direções distintas, linhas na mesma direção porém paralelas ou podem ser a mesma linha.

- Caso L_1 e L_2 sejam linhas na mesma direção, porém paralelas, então $|S_1 \cap_v S_2| = \emptyset$;
- Caso L_1 e L_2 sejam linhas de direções distintas, então L_1 e L_2 podem cruzar em exatamente um ponto, dessa forma no máximo $|S_1 \cap_v S_2| = 1$;
- Caso L_1 e L_2 sejam a mesma linha, para S_1 e S_2 compartilharem mais de um vértice então eles devem ser vértices consecutivos, já que estão sobre a mesma linha. Na grade de representação dois vértices consecutivos formam uma aresta, dessa forma, se S_1 e S_2 compartilham mais de um vértice consecutivo, então $S_1 \cap_e S_2 = \emptyset$, logo no máximo $|S_1 \cap_v S_2| = 1$;

Diante desses fatos concluímos que no máximo $|S_1 \cap_v S_2| = 1$.

#

Lema 7. Dado um caminho $P_1 \in B_2$ -EPG, onde P_1 possui duas dobras, e seja S_2 um segmento da mesma representação. Se $|P_1 \cap_v S_2| \neq \emptyset$ e $|P_1 \cap_e S_2| = \emptyset$, então no máximo $|P_1 \cap_v S_2| = 2$.

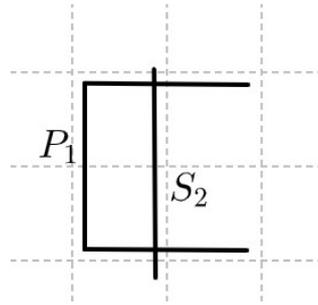
Demonstração. Pelo Corolário 4 sabemos que o corpo de P_1 possui direção contrária aos demais segmentos. Pelo Corolário 5, as pernas de P_1 não estão sobre a mesma linha da grade. Pelo Lema 6, sabemos que dois segmentos que não compartilham arestas podem se vértice-intersectar em, no máximo, um ponto. Por contradição, suponha que $|P_1 \cap_v S_2| > 2$, digamos $|P_1 \cap_v S_2| = 3$, assim deve existir uma configuração em que S_2 vértice-intersecta os três segmentos de P_1 . Pelo Lema 6 sabemos que dois segmentos que não se intersectam em aresta podem ter no máximo um vértice em comum. Assim para que S_2 possua três pontos de interseção com o caminho P_1 , necessariamente S_2 teria que intersectar os três segmentos de P_1 .

- S_2 não pode estar sobre linhas da grade paralelas às pernas de P_1 já que se disposto dessa forma S_2 poderia vértice-intersectar apenas um dos três segmentos de P_1 ou um vértice de dobra de P_1 , logo $|P_1 \cap_v S_2| = 1$.
- Caso S_2 esteja em uma linha da grade perpendicular às linhas em que as duas pernas de P_1 estão dispostas. Se essa linha for a mesma que o corpo de P_1 está desenhado, então S_2 poderia vértice-intersectar P_1 apenas em uma das extremidades de seu corpo, assim $|P_1 \cap_v S_2| = 1$. Caso S_2 esteja hospedado em uma linha que o permite vértice-intersectar as pernas de P_1 :
 - Se as pernas dobras para lados distintos: nesse caso $|P_1 \cap_v S_2| = 1$;
 - Se as duas pernas dobras para o mesmo lado: com essa configuração $|P_1 \cap_v S_2| = 2$, ver Figura 3.

Logo, chegamos em uma contradição pois em todas as configurações testadas, no máximo, $|P_1 \cap_v S_2| = 2$.

#

Figura 3 Interseção de um segmento com um caminho B2-EPG



b. Grafo k -sun

Definição 8. Um grafo k -sun S_k , com $k \geq 3$, consiste em $2k$ vértices, onde existe um conjunto independente $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, uma clique $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ e arestas $E_1 \cup E_2$, onde $E_1 = \{x_1y_1, y_1x_2, x_2y_2, y_2x_3, \dots, x_ky_k, y_kx_1\}$ formam o ciclo externo e $E_2 = \{y_iy_j | i \neq j\}$ formam a clique interna.

Definição 9. O operador mod é utilizado para retornar o resto da divisão inteira. Quando a divisão é exata, retorna zero. Quando o dividendo é menor que o divisor, então retorna o próprio dividendo. Exemplos: $4 \bmod 8 = 4$; $12 \bmod 4 = 0$; $10 \bmod 4 = 2$; $5 \bmod 4 = 1$.

Segundo resultados apresentados por Golubic, Lipshteyn e Stern (2009), o grafo k -sun $\notin B_1$ -EPG, para $k \geq 4$. A seguir vamos provar que k -sun $\in B_2$ -EPG para todo $k \geq$

3. Após o primeiro feedback sobre um trabalho submetido ao congresso ETC da CSBC, fomos surpreendidos com o fato de que o resultado que aparece no Lema 10 já teria sido apresentado na literatura, no paper de Cela e Gaar (2019), onde é demonstrado um resultado similar ao deste trabalho, porém, com uma abordagem distinta. A diferença na abordagem, inclusive, nos permite concluir o Corolário 11.

Lema 10. O grafo k -sun $\in B_2$ -EPG.

Demonstração. Considere a linha l_0 e a coluna c_0 como linha e coluna centrais da representação, ver Figura 2. Vamos considerar na nossa construção dois casos particulares:

- k par: O caminho P_{y_i} para $i = 1$, neste caso P_{y_i} possui um segmento horizontal sobre a linha l_0 entre as colunas c_{-1} e $c_{\frac{k}{2}}$. Na coluna c_{-1} , O caminho P_{y_i} dobra e alcança a linha l_1 , já na coluna $c_{\frac{k}{2}}$, se $k \bmod 4 = 0$, então P_{y_i} dobra e alcança a linha l_{-1} , senão P_{y_i} dobra e alcança a linha l_1 .

• k ímpar: O caminho P_{y_i} para $i = 1$, possui um segmento horizontal sobre a linha l_0 entre as colunas c_{-1} e c_0 . Na coluna c_{-1} , o caminho P_{y_i} dobra e alcança a linha l_1 , já na coluna c_0 , P_{y_i} dobra e alcança a linha l_{-1} . O caminho P_{y_i} para $i = k$, possui um segmento horizontal sobre a linha l_0 entre as colunas c_0 e $c_{\frac{k-1}{2}}$. Se $(k+1) \bmod 4 \neq 0$, ambas extremidades do caminho P_{y_i} , respectivamente sobre as colunas c_0 e $c_{\frac{k-1}{2}}$ dobram e alcançam a linha l_{-1} , senão o caminho P_{y_i} dobra em c_0 e alcança a linha l_{-1} , e também dobra em $c_{\frac{k-1}{2}}$ e alcança a linha l_1 . O caminho P_{x_i} , para $i = k$, é representado por um segmento vertical sobre a coluna c_0 entre as linhas l_0 e l_{-1} .

Para representar os vértices da clique Y siga o seguinte procedimento. O algoritmo fará representação para todo caminho P_{y_i} , onde i é ímpar. Quando k é par considere $i \neq 1$, e quando k é ímpar considere $i \neq 1$ e $i \neq k$, porque esses caminhos já foram construídos anteriormente pelo algoritmo. Neste caso teremos dois subcasos, caso 1.1, quando $(i+1) \bmod 4 = 0$, então P_{y_i} possui um segmento horizontal sobre a linha l_0 , entre as colunas $c_{\frac{i+1}{2}}$ e $c_{\frac{i-1}{2}}$. Na coluna $c_{\frac{i+1}{2}}$, o caminho P_{y_i} dobra e alcança a linha l_{-1} , já na coluna $c_{\frac{i-1}{2}}$, P_{y_i} dobra e alcança a linha l_1 ; caso 1.2, quando $(i+1) \bmod 4 \neq 0$, então P_{y_i} possui um segmento horizontal sobre a linha l_0 , entre as colunas $c_{\frac{i+1}{2}}$ e $c_{\frac{i-1}{2}}$. Na coluna $c_{\frac{i+1}{2}}$, o caminho P_{y_i} dobra e alcança a linha l_1 , já na coluna $c_{\frac{i-1}{2}}$, P_{y_i} dobra e alcança a linha l_{-1} .

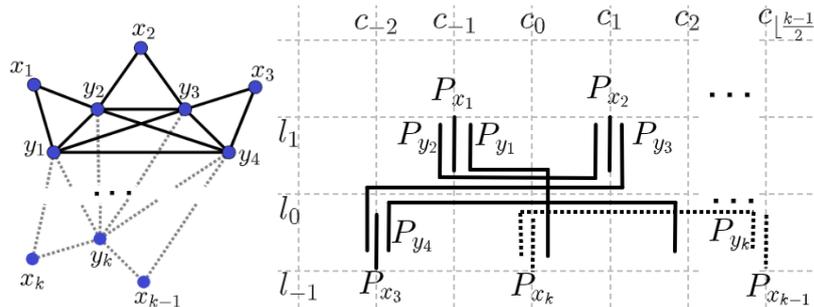
Seja o caminho P_{y_i} , onde i é par e $i \bmod 4 \neq 0$. Neste caso, P_{y_i} possui um segmento horizontal sobre a linha l_0 entre as colunas $c_{\frac{i}{2}}$ e $c_{\frac{i}{2}}$. Ambas as extremidades do caminho P_{y_i} dobram, respectivamente sobre as colunas $c_{\frac{i}{2}}$ e $c_{\frac{i}{2}}$, e alcançam a linha l_1 . Caso caminho P_{y_i} quando i é par e $i \bmod 4 = 0$, então P_{y_i} possui um segmento horizontal sobre a linha l_0 entre as colunas $c_{\frac{i}{2}}$ e $c_{\frac{i}{2}}$. Ambas extremidades do caminho P_{y_i} , respectivamente sobre as colunas $c_{\frac{i}{2}}$ e $c_{\frac{i}{2}}$ dobram e alcança a linha l_{-1} .

Os vértices do conjunto independente X são representados por segmentos verticais que ocupam colunas distinta. Considere $i \neq k$ quando k é ímpar. No caso do caminho P_{x_i} , onde i é par e $i \bmod 4 = 0$, P_{x_i} será representado por um segmento sobre a coluna $c_{\frac{i}{2}}$ entre as linhas l_0 e l_{-1} . Para P_{x_i} , onde i é par e $i \bmod 4 \neq 0$, P_{x_i} será representado por um segmento sobre a colunas $c_{\frac{i}{2}}$ entre as linhas l_0 e l_1 . O caminho

P_{x_i} , onde i é ímpar e $(i+1) \bmod 4 = 0$, P_{x_i} será representado por um segmento sobre a colunas $c_{-\frac{i+1}{2}}$ entre as linhas l_0 e l_{-1} . Para P_{x_i} , onde i é ímpar e $(i+1) \bmod 4 \neq 0$, P_{x_i} será representado por um segmento sobre a coluna $c_{\frac{i+1}{2}}$ entre as linhas l_0 e l_1 .

#

Figura 4 Grafo k -sun (esquerda) e uma representação B_2 -EPG particular (direita)



Para facilitar o entendimento, disponibilizamos um algoritmo que descreve o Lema 10, O código pode ser encontrado no Algoritmo 1, na página 20.

Corolário 11. O grafo k -sun $\in B_2$ -EPG-Helly.

Demonstração. Considere a linha l_0 e a coluna c_0 como linha e coluna centrais da representação. Vamos considere na nossa construção três casos particulares:

- k par: O caminho P_{y_i} , para $i = k-1$, possui um segmento horizontal sobre a linha l_0 entre as colunas c_0 e $c_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$. Na coluna c_0 , o caminho P_{y_i} dobra e se estende até a linha l_1 , já na coluna $c_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$ o caminho P_{y_i} dobra e se estende até a linha l_{-1} . O caminho P_{y_i} , para $i = k$, possui um segmento vertical sobre a coluna c_0 entre as linhas l_0 e l_1 . Na linha l_0 , P_{y_i} dobra e se estende até a coluna c_1 , já na linha l_1 , P_{y_i} dobra e se estende até a coluna $c_{-\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$. O caminho P_{x_i} , para $i = k-1$ é representado por um segmento vertical sobre a coluna c_0 entre as linhas l_0 e l_1 .
- k ímpar e $k \neq 3$: O caminho P_{y_i} , para $i = k-1$, possui um segmento horizontal sobre a linha l_0 entre as colunas $c_{-\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor - 1}$ e $c_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$. Na coluna $c_{-\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor - 1}$, o caminho P_{y_i} dobra e se estende até a linha l_{-1} . O caminho P_{y_i} , para $i = k$ possui um segmento vertical sobre a coluna c_0 entre as linhas l_0 e l_1 . Na linha l_0 , P_{y_i} dobra e se estende até a coluna $c_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$, já na linha l_1 , P_{y_i} dobra e se estende até a

coluna $c_{-\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$. O caminho P_{x_i} , para $i = k - 1$ é representado por um segmento horizontal sobre a linha l_0 entre as colunas $c_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor - 1}$ e $c_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$.

- $k = 3$: O caminho P_{y_i} , para $i = k - 1 = 2$, é representado por um segmento horizontal sobre a linha l_0 entre as colunas c_{-1} e c_2 . O caminho P_{y_i} , para $i = k = 3$ possui um segmento vertical sobre a coluna c_0 entre as linhas l_0 e l_1 . Na linha l_0 , P_{y_i} dobra e se estende até a coluna c_2 , já na linha l_1 , P_{y_i} dobra e se estende até a coluna c_{-1} . O caminho P_{x_i} , para $i = k - 1 = 2$ é representado por um segmento horizontal sobre a linha l_0 entre as colunas c_1 e c_2 .

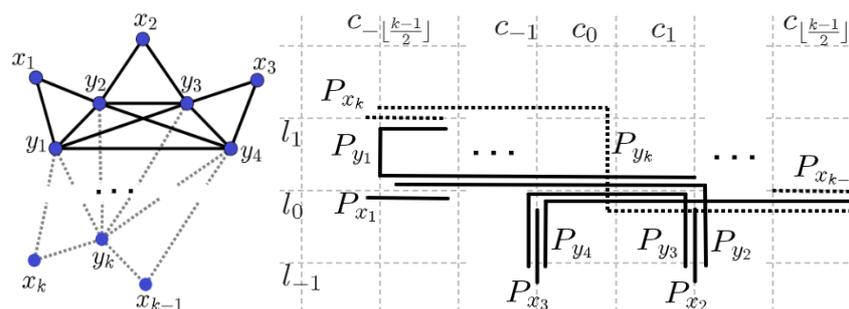
Para representar os vértices da clique Y siga os seguintes procedimentos. Durante a execução dos passos seguinte caso $k = 3$ ou $k = 4$, considere $-\left(\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor - 1\right) = 0$. O caminho P_{y_i} , para $i = 1$, possui um segmento vertical sobre a coluna $c_{-\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$ entre as linhas l_0 e l_1 . Na linha l_1 o caminho P_{y_i} dobra e se estende até a coluna $c_{-\left(\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor - 1\right)}$, já na linha l_0 , P_{y_i} dobra e se estende até a coluna c_1 . O caminho P_{y_i} , para $i = 2$ (exceto quando $k = 3$, pois já foi definido anteriormente), possui um segmento horizontal sobre a linha l_0 entre as colunas $c_{-\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$ e c_1 . Na coluna c_1 o caminho P_{y_i} dobra e se estende até a linha l_{-1} .

Para os demais caminhos P_{y_i} que representam os vértices da clique Y (que excluem $i = 1, i = 2, i = k - 1$ e $i = k$), faça o seguinte: Para P_{y_i} , onde i é ímpar, P_{y_i} possui um segmento horizontal sobre a linha l_0 entre as colunas $c_{\frac{i-1}{2}}$ e $c_{\frac{i-1}{2}}$, em ambas as extremidades P_{y_i} dobra e se estende até a linha l_{-1} . Para P_{y_i} , onde i é par, P_{y_i} possui um segmento horizontal sobre a linha l_0 entre as colunas $c_{-\left(\frac{i}{2}-1\right)}$ e $c_{\frac{i}{2}}$, em ambas as extremidades P_{y_i} dobra e se estende até a linha l_{-1} .

Os vértices do conjunto X serão distribuídos através da representação. Para P_{x_i} , onde $i = 1$, P_{x_i} é representado por um seguimento sobre a linha l_0 entre as colunas $c_{-\left(\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor\right)}$ e $c_{-\left(\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor - 1\right)}$. Para P_{x_i} , onde $i = k$, P_{x_i} é representado por um segmento sobre a linha l_1 entre as colunas $c_{-\left(\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor\right)}$ e $c_{-\left(\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor - 1\right)}$. Para os demais caminhos P_{x_i} (que excluem $i = 1, i = k - 1$ e $i = k$), faça o seguinte: Para P_{x_i} , onde i é par, P_{x_i} é representado por um segmento vertical sobre a coluna $c_{\frac{i}{2}}$ entre as linhas l_0 e l_{-1} . Para P_{x_i} , onde i é ímpar, P_{x_i} é representado por um segmento vertical sobre a coluna $c_{\frac{i-1}{2}}$ entre as linhas l_0 e l_{-1} .

#

Figura 5 Grafo k -sun (esquerda) e uma representação B_2 -EPG- Helly particular (direita)



Para facilitar a visualização, apresentamos o Corolário 11 como um código no Algoritmo 2, na página 21.

Considerações Finais

Este trabalho apresenta um estudo das classes B_2 -EPG e B_2 -EPG-Helly. Apresentamos alguns resultados gerais sobre a classe B_2 -EPG abordando também arranjos geométricos de caminhos e segmentos. Além disso, apresentamos também duas demonstrações (por algoritmos construtivos) que comprovam os seguintes resultados: O grafo k -sun $\in B_2$ -EPG e o grafo k -sun $\in B_2$ -EPG-Helly. Os próximos passos desta pesquisa são investigar o comportamento particular de algumas classes de grafos em B_2 -EPG, e.g. chordal, split e outros. Gostaríamos de saber sobre o problema de reconhecimento dos grafos B_2 -EPG-Helly. Sabemos que o problema de reconhecimento dos grafos B_2 -EPG é NP-Completo, pois já existe resultados relacionados na literatura, e.g. o reconhecimento dos grafos B_1 -EPG é NP-Completo, da mesma forma que o reconhecimento dos grafos B_1 -EPG-Helly é NP-Completo. Talvez provar a monotonicidade da hierarquia dentro da classe B_k -EPG também seja um campo interessante para trabalhos futuros.

Referências

- Alcón, L., et al. (2018). On the Bend Number of Circular-arc Graphs as Edge Intersection Graphs of Paths on a Grid. *Discrete Applied Mathematics*, 234, 12-21.
- Alcón, L., Mazzoleni, M. P., & Santos, T. D. (2021). Relationship Among B_1 -EPG, VPT and EPT Graphs Classes. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*.
- Asinowski, A., & Suk, A. (2009). Edge Intersection Graphs of Systems of Paths on a Grid with a Bounded Number of Bends. *Discrete Applied Mathematics*, 157(14), 3174-3180.
- Cameron, K., Chaplick, S., & Hoàng, C. T. (2016). Edge Intersection Graphs of L-shaped Paths in Grids. *Discrete Applied Mathematics*, 210, 185-194.
- Cela, E., & Gaar, E. (2019). Monotonic Representations of Outerplanar Graphs as EdgeIntersection Graphs of Paths on a Grid. arXiv preprint arXiv:1908.01981.
- Francis, M. C., & Lahiri, A. (2016). VPG and EPG Bend-Numbers of Halin Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 215, 95-105.

- Golumbic, M. C., Lipshteyn, M. & Stern, M. (2009). Edge Intersection Graphs of Single Bend Pathson a grid. *Networks: An International Journal*, 54(3), 130-138.
- Golumbic, M. C., Lipshteyn, M., & Stern, M. (2013). Single Bend Paths on a Grid Have Strong Helly number 4: errata atque emendationes ad "Edge Intersection Graphs of Single Bend Paths on a Grid". *Networks*, 62(2), 161-163.
- Heldt, D., Knauer, K., & Ueckerdt, T. (2014). Edge-Intersection Graphs of Grid Paths: thebend number. *Discrete Applied Mathematics*, 167, 144-162.
- Heldt, D., Knauer, K., & Ueckerdt, T. (2014). On the Bend-Number of Planar and Outerplanar graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 179, (109-119).
- Marinho, L. F. S., Silva, K. A., & Santos, T. D. B2-EPG Split. (2023). *Academic Journal on Computing, Engineering and Applied Mathematics*, 4(1), 1-7, 2023.
- Pergel, M., & Rzażewski, P. (2017). On edge intersection graphs of paths with 2 bends. *Discrete Applied Mathematics*, 226, 106-116.
- Stern, M., Biedl, T. (2010). On Edge-Intersection Graphs of k-Bend Paths in Grids. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 12(1), 1-12.
- Szwarcfiter, J. L., et al. (2020). The Complexity of Helly- B_1 -EPG Graph Recognition. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 22.

ABSTRACT:

In this article we explore the B_2 -EPG class and the Helly property. We present generic results on EPG representations and define terms that support the other results, in addition, we finish the research with an unpublished algorithm that builds a Helly B_2 -EPG representation of any k-sun graph.

KEYWORDS: B_2 -EPG; Graph Theory; Intersection Graphs; Helly Property; k-sun Graphs.

RESUMEN:

En este artículo exploramos la clase B_2 -EPG y la propiedad Helly. Presentamos resultados genéricos sobre las representaciones EPG y definimos términos que respaldan los otros resultados, además, finalizamos la investigación con un algoritmo original que construye una representación B_2 -EPG -Helly de cualquier grafo k-sun.

PALABRAS CLAVE: B_2 -EPG; Teoría de Grafos; Grafos de Intersección; Propiedad Helly; Grafos k-sun.