



Uma ferramenta web didática para estudar a Equação de Friedmann

Rodolpho Henrique Souza de Matos, Celso Wellington Dias Antunes e Felipe Ventura Vargas

doi.org/10.20873/stmmta2021-2526-5725-58925

Resumo

A Equação de Friedmann é um resultado de condições de contorno das equações da relatividade geral. Essa equação determina a variação do parâmetro de escala do universo variando os parâmetros de densidade. Através da aplicação de ferramentas web, criamos uma ferramenta didática chamada Friedmann Universe (FUN) que permite gerar gráficos variando os parâmetros de densidade da Equação de Friedmann de maneira simples e que permite que um usuário leigo, estudantes e até professores possam utilizar e entender como a variação dos parâmetros de densidade podem afetar a taxa de expansão do universo.

Palavras-chave: Equação de Friedmann, Expansão do Universo, Ensino de Cosmologia

Introdução

Albert Einstein (1879 - 1955), popularmente conhecido pela criação da teoria da relatividade publicou em 1905 seu primeiro artigo sobre relatividade restrita (Einstein, 1905), e em 1915 publicou a Teoria da Relatividade Geral Einstein, 1915. Com base nas equações de campo derivadas a partir da teoria da relatividade geral, Alexander Friedman em 1922 propôs soluções para a expansão de um universo homogêneo e isotrópico. Tais soluções passaram a ser conhecidas como equações para a métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker, ou apenas Equações de Friedman. As Equações de Friedmann são um conjunto de equações em cosmologia física que descrevem a expansão métrica do espaço como função dos parâmetros normalizados de densidade de energia e densidade matéria do universo.

Einstein propôs um universo estático, e para obter o modelo relativístico que correspondesse ao seu modelo, introduziu um componente repulsivo na formatação das equações de campo da Teoria da Relatividade geral de maneira a impedir o colapso causado pela matéria. Nas equações, essa componente aparece como um termo complementar do campo da métrica multiplicada por uma constante, chamada constante cosmológica, que geralmente é retratada pela letra grega lambda (Λ) O’Raifeartaigh et al., 2018.

O modelo de universo estático e de geometria espacial esférica, proposto por Einstein, marca o início da cosmologia relativista. Este modelo, hoje considerado ultrapassado, acabou por inspirar uma série de outros estudos que visavam compreender tanto a estrutura espacial quanto temporal do universo, tendo em vista que a visão de Einstein, sobre um universo fechado e estático, não funcionava.

Em 1912, o astrônomo Vesto Melvin Slipher (1875-1969), observou o que seria um desvio eletromagnético nas linhas espectrais da galáxia de Andromeda (M31) Slipher, 1913 que indicam que a galáxia está se aproximando. No entanto, nos anos seguintes Slipher observou 41 galáxias, a maior parte delas apresentavam um desvio espectral para que aumentava o comprimento de onda, indicando um afastamento. Com base nessas observações na década de 20, o astrônomo Edwin Hubble (1889 - 1953), comparou as distâncias das galáxias com as suas velocidades de afastamento, chegando a conclusão que as galáxias mais distantes se afastam com velocidades ainda maiores E. P. Hubble, 1926. Em 1929, Hubble publicou sua descoberta, que foi intitulada como Lei de Hubble E. Hubble, 1929, expressada como

$$v = H_0 d, \quad (1)$$

onde v é a velocidade de recessão da galáxia, d é a distância da galáxia e H_0 é a constante de Hubble.

A constante de Hubble, H_0 , aponta para um universo em expansão, já que é o coeficiente angular positivo entre a velocidade de afastamento e a distância das galáxias, mostrando que galáxias mais distantes têm uma velocidade de afastamento maior como representou graficamente Hubble em sua publicação inicial (Figura 1).

O universo possui aproximadamente 13,7 bilhões de anos e tem se expandido de forma acelerada, como apontam as últimas medições dos parâmetros de densidade Abbott et al., 2019. Estima-se que cerca de 70% da composição total do universo corresponda a energia escura, enquanto que 25% equivalha a matéria escura e apenas 5% represente matéria bariônica. Além disso, pequenas flutuações de temperatura na radiação cósmica de fundo sugere que o universo seja espacialmente plano. As medições das curvas de luz de SN Ia apresentam evidências concretas, de que nosso universo está em expansão acelerada. Para explicar tal aceleração, um termo cosmológico conhecido como energia escura é reintroduzido nas equações de Einstein. Em cosmologia, a energia escura é tratada como uma forma de energia que estaria distribuída por todo o espaço, causando a expansão acelerada do universo Abbott et al., 2019.

Utilizando a Equação de Friedmann e sua solução é possível então saber como se dá o raio do universo em função da densidade do que existe nele. O trabalho consiste na criação de uma ferramenta online, gratuita, didática e digital que permite facilmente variar e ter uma representação gráfica dos parâmetros de densidade e métrica da Equação de Friedmann, permitindo que um estudante possa ter uma ideia representativa do efeito da variação dos parâmetros na escala e idade do Universo. O projeto tem por objetivo mostrar de maneira visual as implicações que diferentes parâmetros causam na Equação Friedmann para a expansão do Universo. O algoritmo que realiza o cálculo da expansão do Universo foi escrito em JavaScript com o objetivo de criar uma aplicação web acessível. A aplicação demonstra visualmente a expansão do Universo ao longo de bilhões de anos e a escala do Universo em comparação com o tamanho do nosso Universo hoje. É possível calcular essa expansão modificando os parâmetros de densidade radioativa, densidade de energia escura, densidade métrica, densidade de matéria e o tempo final do universo. O algoritmo que realiza o cálculo da expansão do Universo foi originalmente escrito em Python e traduzido para JavaScript com o objetivo de criar uma aplicação web acessível. Essa aplicação demonstra visualmente a expansão do Universo ao longo de um tempo arbitrário em bilhões de anos, o usuário consegue

visualizar a escala do tempo, em bilhões de anos, e a escala do Universo em comparação com o tamanho do nosso Universo nos dias de hoje, em porcentagem. É possível calcular essa expansão modificando os parâmetros de densidade radioativa, densidade de energia escura, densidade métrica, densidade de matéria e tempo final, em bilhões de anos.

Friedmann Universe (FUN) é um programa que visa simplificar a nossa visão a respeito do universo descrito pelas equações de Friedmann, nos fornecendo uma gama de resultados que nos permite gerar uma visão hipotética de como o universo poderia ter evoluído, variando seus parâmetros de densidade, facilitando nosso entendimento a respeito da equação. Ao resolver numericamente sistemas de equações permite que imagens sejam geradas sem que o usuário tenha conhecimento de cálculo, permitindo que as imagens geradas possam ser facilmente utilizadas para fins de divulgação científica. O público alvo beneficiado pela utilização do programa pode variar bastante; astrônomos amadores e pessoas curiosas sem conhecimento aprofundado sobre o assunto podem aprender com as imagens geradas pelo código e assim ter uma compreensão visual da expansão do universo. Porém também é possível que professores da graduação gerem as imagens e as utilizem para suas aulas, permitindo que seus estudantes de graduação possam utilizar o código aberto para também resolver a equação e alterar o código como bem entendem.

Metodologia

A metodologia consiste em duas partes principais: solução numérica da Equação de Friedmann utilizando o método de Euler de primeira ordem; criação de uma ferramenta web em que os parâmetros de densidade de energia, densidade de energia escura, densidade métrica, densidade de matéria.

Equação de Friedmann

O sistema de coordenadas comóveis é um sistema de referencia relativo que acompanha a expansão do universo. Considerando o princípio cosmológico, o universo é homogêneo e isotrópico, e por ser isotrópico, podemos escolher um ponto arbitrário do universo como referência. Nesse sistema, o raio do universo em função do tempo ($r(t)$), é calculado em relação a um raio medido hoje ($r(t_0)$), de tal forma que $r(t) = R(t)r(t_0)$. A função $R(t)$, que deve ser estabelecida pelo modelo cosmológico é o chamado fator de escala e nos diz qual o raio do universo em relação ao raio atual.

A Equação de Friedmann pode ser escrita então em ter-

mos deste fator de escala. Podemos considerar como exemplo, caso o fator de escala dobre, a distância entre duas galáxias distintas, também irá dobrar. No caso de um universo em expansão, o fator de escala estará sempre aumentando. A Equação de Friedmann pode então ser escrita da seguinte forma,

$$\frac{\dot{R}^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_R}{R(t)^4} + \frac{\Omega_M}{R(t)^3} + \Omega_\Lambda - \frac{\kappa c^2}{R(t)^2}, \quad (2)$$

onde H_0 é a constante de Hubble, $R(t)$ o fator de escala, t o tempo, κ o coeficiente que define a métrica do sistema, Ω_R o parâmetro de densidade de radiação, Ω_M o parâmetro de densidade de matéria, Ω_Λ o parâmetro de densidade de energia escura, c a velocidade da luz. Os parâmetros de densidade são utilizados de maneira que as densidades são normalizadas por uma densidade crítica (ρ_0). ρ_0 é definido como a densidade necessária para que o universo seja plano. κ é então,

$$\kappa = \Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda. \quad (3)$$

Os valores de κ definem a geometria do universo. Caso $\kappa < 1$, teremos um universo esférico, $\kappa = 1$ um universo plano e $\kappa > 1$ um universo hiperbólico.

Implementação Numérica

Como \dot{R} é a derivada temporal do fator de escala, podemos escrevê-lo como,

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt}. \quad (4)$$

Isolando a variação diferencial do fator de escala então obtemos,

$$dR = H_0 \left[\frac{\Omega_R}{R(t)^4} + \frac{\Omega_M}{R(t)^3} + \Omega_\Lambda - \frac{\kappa c^2}{R(t)^2} \right]^{1/2} dt \quad (5)$$

Esta equação pode ser facilmente solucionado de maneira numérica, considerando que dR pode ser numericamente escrito como $\Delta R = R[i+1] - R[i]$ e $\Delta t = t[i+1] - t[i]$, onde $\Delta \rightarrow d$ quando $R[i+1] - R[i]$ e $t[i+1] - t[i]$ são valores pequenos. Assim podemos escrever a equação analítica e contínua da equação de Friedmann de forma discreta,

$$R[i+1] - R[i] = H_0(t[i+1] - t[i]) \left[\frac{\Omega_R}{R(t)^4} + \frac{\Omega_M}{R(t)^3} + \Omega_\Lambda - \frac{\kappa c^2}{R(t)^2} \right]^{1/2}. \quad (6)$$

Utilizando uma solução de Euler de Primeira Ordem é trivial encontrar a evolução do sistema a partir das equações diferenciais. Sempre que pudemos colocar os valores dos parâmetros de escala e considerando $t_0 = t(0) = 0$ e $R(t_0) = 1$ é possível evoluir o sistema facilmente.

O algoritmo que calcula a expansão do universo usando a Equação Friedmann foi escrito em Javascript, uma linguagem otimizada para implementação em aplicações web. A aplicação web foi criada usando o framework React com TypeScript e publicado no Heroku. A escolha do React foi feita pela praticidade de manipular elementos web na hora de criar SVG (*Scalable Vector Graphics*), possibilitando a criação de uma aplicação reativa e performática. O TypeScript foi escolhido como linguagem de suporte a fim de melhorar a qualidade do código, pois ele aponta erros no código antes da transpilação, além de melhorar a legibilidade do código e o entendimento de seus parâmetros, já que é uma linguagem que exige tipagem de variáveis e funções.

Para lidar com esse cálculo de maneira performática, foi necessário primeiro criar um redutor de listas já que o algoritmo em Python retorna uma lista com mais de 40 mil pares de valores (fator de escala e tempo)¹. Foi então criado um algoritmo que reduz os cálculos para um número arbitrário sem correr o risco de descaracterizar o perfil da evolução do Universo — nesse caso, o algoritmo colhe uma amostra sistemática (a cada X itens), reduzindo a resolução dos cálculos. Além do redutor de lista, o trabalho conta com um mecanismo que mantém a resolução dos cálculos para que a resolução de saída sempre seja a mesma. Segue em anexo o algoritmo em TypeScript que realiza o cálculo completo da evolução do fator de escala Universo.

Resultados e Discussão

O projeto foi criado utilizando React com TypeScript onde foi graficado o fator de escala do Universo em função da idade do Universo (tempo) espelhado pela abscissa. O código completado é hospedado na web e pode ser baixado pelo endereço de github: github.com/well-ington/universe-expansion/archive/refs/heads/main.zip. A visualização da

¹Não é possível mostrar toda essa informação em um monitor comum — para fins de comparação, os monitores Ultra-HD possuem 3840 pixels de largura.

interface gráfica do código em javascript pode ser feita pelo link: universe-expansion.herokuapp.com.

A interface gráfica dispõe de caixas para que sejam alterados os parâmetros de densidade que devem ser normalizados pela densidade métrica. A normalização é feita de maneira automática, o que torna o aplicativo mais amigável para o usuário. Também há a opção de alterar o tempo final para o cálculo que vai desde o início do universo até o tempo escolhido. Na lateral esquerda superior há comparações entre os fatores de escala simulados pelo código e o fator de escala agora observado a partir do universo local.

Seguem abaixo imagens com os gráficos com diferentes valores para os parâmetros de densidade de matéria e energia.

Na Figura 2 se apresenta o cálculo feito com os parâmetros de densidade radiativa ($\Omega_r = 0.5$), de densidade de matéria ($\Omega_M = 0.12525$), de densidade de energia escura ($\Omega_\Lambda = 0.37575$), de métrica ($\kappa = 1.001$) e tempo total de 13,5 bilhões de anos.

Na Figura 3 se apresenta o cálculo feito com os parâmetros de densidade radiativa ($\Omega_r = 0.000002677$), de densidade de matéria ($\Omega_M = 0.8$), de densidade de energia escura ($\Omega_\Lambda = 0.200997322$), de métrica ($\kappa = 1.001$) e tempo total de 13,5 bilhões de anos.

Na Figura 4 se apresenta o cálculo feito com os parâmetros de densidade radiativa ($\Omega_r = 0.000000199$), de densidade de matéria ($\Omega_M = 0.00004995$), de densidade de energia escura ($\Omega_\Lambda = 0.00014985$), de métrica ($\kappa = 0.0002$) e tempo total de 13,5 bilhões de anos.

Na Figura 5 se apresenta o cálculo feito com os parâmetros de densidade radiativa ($\Omega_r = 0.000003984$), de densidade de matéria ($\Omega_M = 0.000996016$), de densidade de energia escura ($\Omega_\Lambda = 1.00$), de métrica ($\kappa = 1.001$) e tempo total de 13,5 bilhões de anos.

Na Figura 5 se apresenta o cálculo feito com os parâmetros de densidade radiativa ($\Omega_r = 0.001$), de densidade de matéria ($\Omega_M = 0.25$), de densidade de energia escura ($\Omega_\Lambda = 0.75$), de métrica ($\kappa = 1.001$) e tempo total de 13,5 bilhões de anos.

As imagens mostram diferentes modelos conhecidos popularmente como “*toy models*”, ou modelos brinquedo, onde é possível ver diferentes valores para o parâmetro de escala em função das variações nos parâmetros de densidade e métrica. A ferramenta é amigável ao usuário, pois permite com que uma pessoa que não sabe resolver a Equação de Friedmann veja como os parâmetros de densidade afetam o comportamento da expansão do Universo representada pelas variações no fator de escala de modo visual tendo por referência a escala e o tempo do Universo atual.

Referências

- Abbott, T. M. C., Allam, S., Andersen, P., Angus, C., Asorey, J., Avelino, A., Avila, S., Bassett, B. A., Bechtol, K., Bernstein, G. M., Bertin, E., Brooks, D., Brout, D., Brown, P., Burke, D. L., Calcino, J., Carnero Rosell, A., Carollo, D., Carrasco Kind, M., . . . DES Collaboration. (2019). First Cosmology Results using Type Ia Supernovae from the Dark Energy Survey: Constraints on Cosmological Parameters. *Astrophysical Journal*, 872(2), **jourarticle** L30, L30. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab04fa>
- Abell, G. O. (1958). The Distribution of Rich Clusters of Galaxies. *apjs*, 3, 211. <https://doi.org/10.1086/190036>
- Einasto, J., Einasto, M., Frisch, P., Gottlober, S., Muller, V., Saar, V., Starobinsky, A. A. & Tucker, D. (1997). The supercluster-void network - III. The correlation function as a geometrical statistic. *mnras*, 289, 813–823. <https://doi.org/10.1093/mnras/289.4.813>
- Einasto, J., Saar, E. & Klypin, A. A. (1986). Structure of superclusters and supercluster formation. V - Spatial correlation and voids. *mnras*, 219, 457–478. <https://doi.org/10.1093/mnras/219.3.457>
- Einstein, A. (1905). The foundation of the theory of relativity. *The Principle of Relativity. Dover Books on Physics. June 1* (pp. 109–164).
- Einstein, A. (1915). The foundation of the general theory of relativity. *The Principle of Relativity. Dover Books on Physics. June 1* (pp. 129–174).
- Gabrielli, A., Sylos Labini, F., Joyce, M. & Pietronero, L. (2005). *Statistical Physics for Cosmic Structures*. Springer.
- Groth, E. J. & Peebles, P. J. E. (1977). Statistical analysis of catalogs of extragalactic objects. VII - Two- and three-point correlation functions for the high-resolution Shane-Wirtanen catalog of galaxies. *apj*, 217, 385–405. <https://doi.org/10.1086/155588>
- Hamilton, A. J. S. (1993). Toward Better Ways to Measure the Galaxy Correlation Function. *apj*, 417, 19. <https://doi.org/10.1086/173288>
- Hubble, E. P. (1926). Extragalactic nebulae. *apj*, 64. <https://doi.org/10.1086/143018>
- Hubble, E. (1929). A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15(3), 168–173. <https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>
- Martínez, V. J. (2001). *Statistical of the Galaxy Distribution*. CHAPMAN; HALL/CRC.
- O’Raifeartaigh, C., O’Keeffe, M., Nahm, W. & Mitton, S. (2018). One hundred years of the cosmological constant: from “superfluous stunt” to dark energy. *European Physical Journal H*, 43(1). <https://doi.org/10.1140/epjh/e2017-80061-7>
- Shane, C. D. & Wirtanen, C. A. (1954). The distribution of extragalactic nebulae. *aj*, 59, 285–304. <https://doi.org/10.1086/107014>
- Slipher, V. M. (1913). The radial velocity of the Andromeda Nebula. *Lowell Observatory Bulletin*, 1, 56–57.
- Starck, J. & Murtagh, F. (2005). *Astronomical Image and Data Analysis* (Second). Springer.
- Stoughton, C. & et, al. (2002). Sloan Digital Sky Survey: Early Data Release. *The Astronomical Journal*, 123, 485–548. <https://doi.org/10.1086/324741>
- Totsuji, H. & Kihara, T. (1969). The Correlation Function for the Distribution of Galaxies. *pasj*, 21, 221.

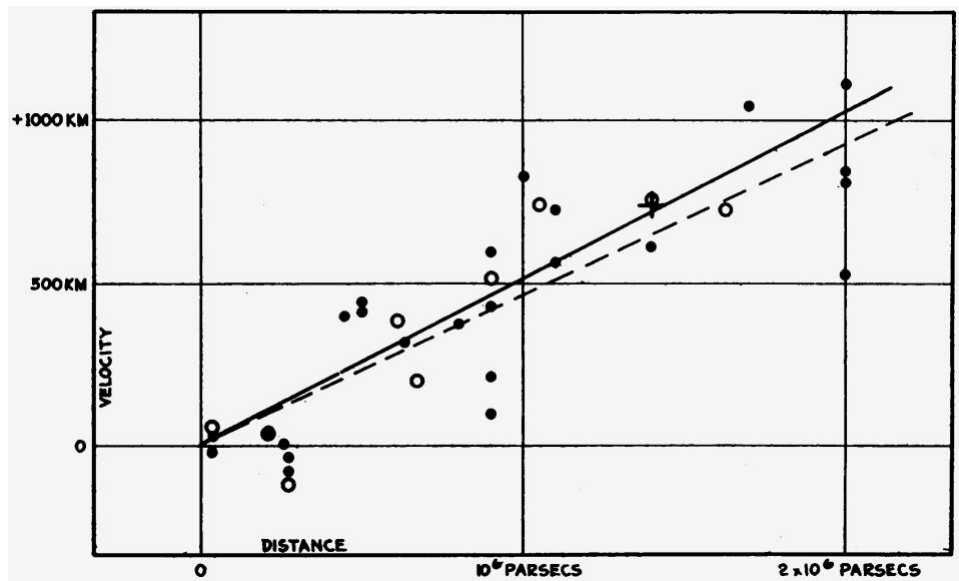


Figura 1

Figura inicialmente publicada por E. Hubble, 1929. Utilizando as velocidades de afastamento calculadas a partir do redshift de 41 galáxias observadas por Slipher, Hubble criou a Lei de Hubble, em que o coeficiente angular da curva de afastamento aponta para uma relação entre distância e velocidade. Galáxias mais distantes têm uma velocidade de afastamento maior.

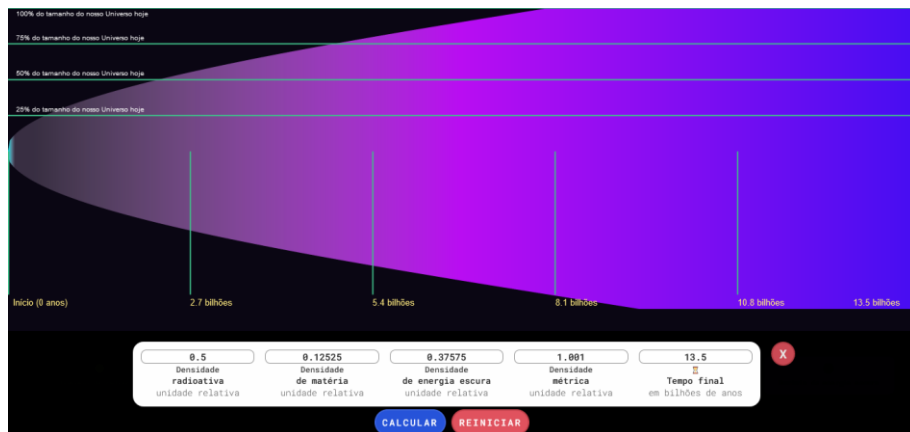


Figura 2

Cálculo feito com os parâmetros de densidade radiativa ($\Omega_r = 0.5$), de densidade de matéria ($\Omega_M = 0.12525$), de densidade de energia escura ($\Omega_\Lambda = 0.37575$), de métrica ($\kappa = 1.001$) e tempo total de 13,5 bilhões de anos.

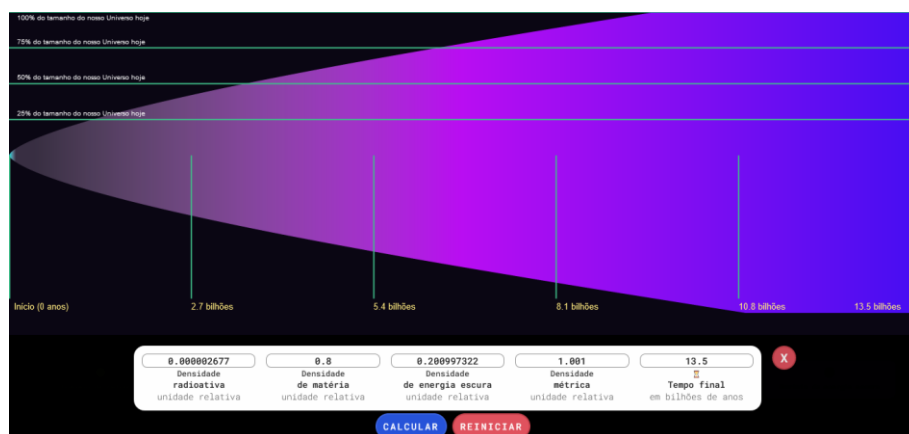


Figura 3

Cálculo feito com os parâmetros de densidade radiativa ($\Omega_r = 0.000002677$), de densidade de matéria ($\Omega_M = 0.8$), de densidade de energia escura ($\Omega_\Lambda = 0.200997322$), de métrica ($\kappa = 1.001$) e tempo total de 13,5 bilhões de anos.

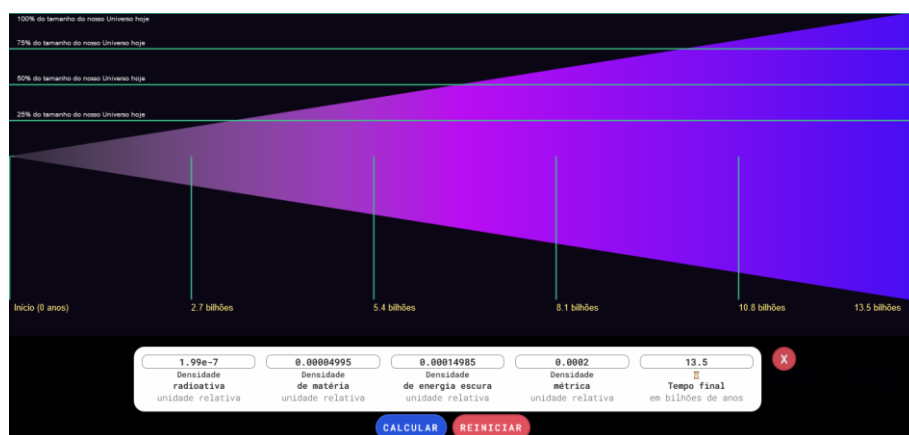


Figura 4

Cálculo feito com os parâmetros de densidade radiativa ($\Omega_r = 0.000000199$), de densidade de matéria ($\Omega_M = 0.00004995$), de densidade de energia escura ($\Omega_\Lambda = 0.00014985$), de métrica ($\kappa = 0.0002$) e tempo total de 13,5 bilhões de anos.

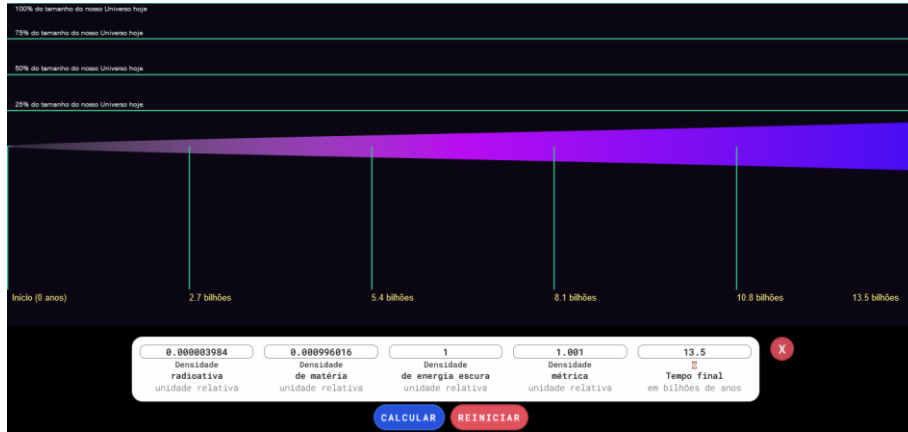


Figura 5

Cálculo feito com os parâmetros de densidade radiativa ($\Omega_r = 0.000003984$), de densidade de matéria ($\Omega_M = 0.000996016$), de densidade de energia escura ($\Omega_\Lambda = 1.00$), de métrica ($\kappa = 1.001$) e tempo total de 13,5 bilhões de anos.

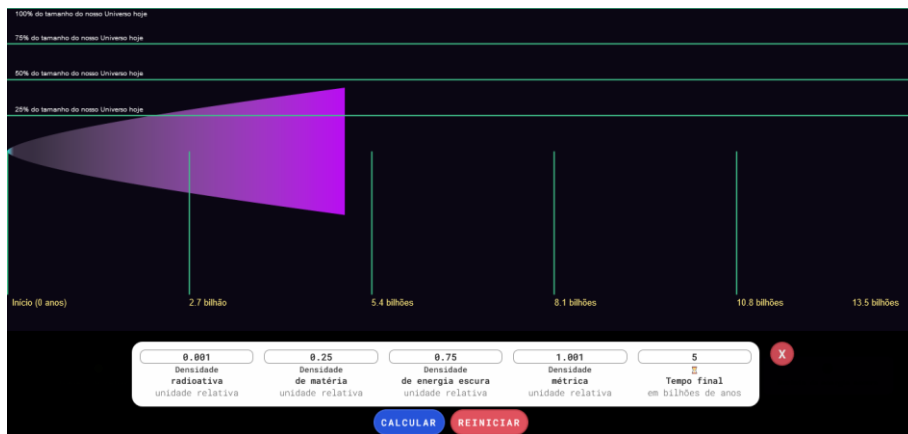


Figura 6

Cálculo feito com os parâmetros de densidade radiativa ($\Omega_r = 0.001$), de densidade de matéria ($\Omega_M = 0.25$), de densidade de energia escura ($\Omega_\Lambda = 0.75$), de métrica ($\kappa = 1.001$) e tempo total de 13,5 bilhões de anos.