RESULTADOS DO TIPO AMBROSETTI-PRODI

Ambrosetti-Prodi type Results

Resultados del tipo Ambrosetti-Prodi

Revista Desafios

Artigo Original
Original Article
Artículo Original

Juliana da Silva Cardoso[*1], José Carlos de Oliveira Junior[2]

[1] Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, Brasil.

[2] Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, Brasil.

**Correspondência: Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Av. Paraguai (esquina com a Rua Uxiramas), s/n, Cimba, Araguaína – TO. CEP: 77824-838, e-mail jc.oliveira@uft.edu.com.*

Artigo recebido em 12/03/2020 aprovado em 06/10/2020 publicado em 02/12/2020.

RESUMO

É indiscutível que a matemática tenha revolucionado (e ainda revoluciona) nos últimos séculos o modo de encararmos a realidade e a maneira de lidarmos com tudo que a compõe. Suas aplicações são diversas em quase todas as áreas da ciência, tais como Física, Biologia, Química, Estatística e Ciências Sociais. As Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais recebem destaque no conjunto de dessas aplicações porque permitem modelar fenômenos e obter, através de equações, conclusões essenciais sobre eles. O presente trabalho mostra um estudo sobre Resultados do tipo Ambrosetti-Prodi que consistem em resolver uma equação da forma $G(u, s) = 0$, encontrando um valor real s_1 para o qual esta equação possua nenhuma solução se $s < s_1$, pelo menos uma solução se $s = s_1$ e pelo menos duas soluções se $s > s_1$. A pesquisa é de cunho qualitativo, e iremos apresentar um estudo dos Resultados do tipo Ambrosetti-Prodi para uma equação simples e duas outras equações diferenciais mais elaboradas, com intuito de compreender o comportamento do número de soluções ao variar o parâmetro s.
Palavras-chave: Ambrosetti-Prodi; Soluções de equações; Equações diferenciais.

ABSTRACT

It is indisputable that mathematics has revolutionized (and still does) in recent centuries the way we face reality and the way we deal with everything that makes it up. Its applications are diverse in almost all areas of science, such as Physics, Biology, Chemistry, Statistics and Social Sciences. The Ordinary and Partial Differential Equations are highlighted in the set of these applications because they allow modeling phenomena and obtaining, through equations, essential conclusions about them. The present work shows a study on Ambrosetti-Prodi results that consist in solving an equation of the form $G(u, s) = 0$, finding a real value s_1 for which this equation has no solution if $s < s_1$, at least one solution if $s = s_1$ and at least two solutions if $s > s_1$. The research is of a qualitative nature, and we will present a study of the Ambrosetti-Prodi results for a simple equation and two other more elaborate differential equations, in order to understand the behavior of the number of solutions when varying the parameter s.
Keywords: *Ambrosetti-Prodi; Solutions of equation; Differential equations.*

RESUMEN

Es indiscutible que las matemáticas han revolucionado (y todavía lo hacen) en los últimos siglos la forma en que enfrentamos la realidad y la forma en que lidiamos con todo lo que la compone. Sus aplicaciones son diversas en casi todas las áreas de la ciencia, como física, biología, química, estadística y ciencias sociales. Las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales se destacan en el conjunto de estas aplicaciones porque permiten modelar fenómenos y obtener, a través de ecuaciones, conclusiones esenciales sobre ellos. El presente trabajo muestra un estudio sobre los resultados de Ambrosetti-Prodi que consisten en resolver una ecuación de la forma $G(u, s) = 0$, encontrando un valor real s_1 para el cual esta ecuación no tiene solución si $s < s_1$, al menos una solución si $s = s_1$ y al menos dos soluciones si $s > s_1$. La investigación es de naturaleza cualitativa, y presentaremos un estudio de los

resultados de Ambrosetti-Prodi para una ecuación simple y otras dos ecuaciones diferenciales más elaboradas, con el fin de comprender el comportamiento del número de soluciones al variar el parámetro s.
***Palabras-Clave**: Ambrosetti-Prodi; Soluciones de ecuaciones; Ecuaciones diferenciales.*

INTRODUÇÃO

O estudo das propriedades de determinadas funções é indispensável em grandes áreas da matemática como a Análise e a Matemática Aplicada. Muitos pesquisadores, atualmente, estão desenvolvendo trabalhos nesse sentido, uma vez que a compreensão de como uma função se comporta pode trazer resultados surpreendentes para a realidade. Sobre isso, as equações diferenciais parciais e ordinárias, por exemplo, são objeto de grande estudo, uma vez que elas nos possibilitam modelar e analisar vários fenômenos naturais, como por exemplo, a equação que modela o crescimento ou decrescimento populacional de uma espécie, a equação do calor e a equação de Laplace.

Um Resultado do tipo Ambrosetti-Prodi para uma equação da forma $G(u,s)=0$ consiste em encontrar um valor s_1 parâmetro s, em que a equação não tenha solução em u quando $s<s_1$, tenha pelo menos uma solução quando $s=s_1$ e que tenha pelo menos duas quando $s>s_1$. Há equações mais complexas do que esta, mas seguem esse raciocínio.

Este trabalho é baseado em 2 anos de Iniciação Científica, que ocorreu entre os meses de agosto de 2017 e julho de 2019. Muitos conceitos aqui apresentados têm como base estudos que ocorreram nesse período e como artigo noteador a bibliografia [2]. Apresentaremos os Resultados do Tipo Ambrosetti-Prodi para três equações, a saber: a equação simples, dada por $f(u)=s$ ($isto$ é, $G(u,s)=f(u)-s=0$); duas outras mais complexas, $u'(x)+f\big(u(x)\big)=s$ e $F(u)(x)\equiv u'(x)+f(x,u(x))=s$, com $u(0)=u(2\,\pi)$.

MATERIAIS E MÉTODOS

Sendo nossa pesquisa de cunho qualitativo, o material usado está voltado apenas para livros e artigos científicos impressos para um melhor desenvolvimento do trabalho.

Posteriormente, utilizamos o software GeoGebra para facilitar a análise geométrica da equação $f(u)=s$ e $G(u,s)=0$. Com isso, pudemos compreender os conceitos iniciais para discutir outras equações e para fomentar as análises.

Utilizamos, em seguida o software GeoGebra para facilitar a análise geométrica da equação $F(u)(x)\equiv u'(x)+f\big(x,u(x)\big)=s$, sendo $u(0)=u(2\,\pi)$. Com isso, foi possível compreender os conceitos matemáticos iniciais para discutir sobre as equações e para obtermos certas conclusões.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Começamos a trabalhar com a equação simples da forma:

$$f(u)=s, \tag{1}$$

e vamos assumir as seguintes hipóteses sobre a função f:

(A_1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função contínua em todo o seu domínio;

(A_2) $\lim\limits_{|u|\to\infty} f(u)=+\infty$.

Nosso objetivo principal é entendermos a respeito das soluções u quando variamos o parâmetro s. Para estudarmos nesse sentido a equação (1), vamos enunciar dois teoremas que foram usados em nossa pesquisa.

Teorema de Weierstrass [4,5]: Toda função contínua definida em um intervalo fechado $[a,b]$, $a<b$, assume máximo e mínimo.

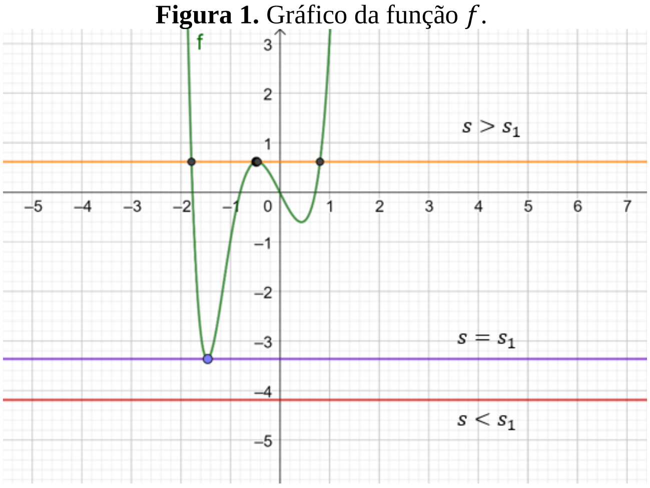
Teorema do Valor Intermediário (TVI) [1]: Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

Como exemplo ilustrativo de uma função que satisfaz (A_1) e (A_2), considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(u) = u^6 + u^5 + 3u^3 - 2u.$$

Não é difícil ver que tanto (A_1) quanto (A_2) são satisfeitas. O gráfico desta função pode ser visto na **Figura 1** a seguir, já com os aspectos que vamos discutir.

Figura 1. Gráfico da função f.



Fonte: dos autores.

Para o caso (1) geral, como, pela hipótese (A_2), a função f fica maior do que qualquer valor pré-estabelecido, podemos usar a hipótese (A_1) e mostrar, pelo Teorema de Weierstrass, que essa função possui um mínimo global, digamos, $s_1 = \min_{u \in \mathbb{R}} f(u) = f(u_1)$. Analisando do ponto de vista de Ambrosetti-Prodi, a equação $f(u) = s$ tem pelo menos uma solução em u (a saber, $u = u_1$) quando $s = s_1$, pela própria definição de mínimo (todo mínimo é atingido em, ao menos, um ponto).

Ao analisarmos a solução de (1) em u quando $s < s_1$, percebemos que não há solução para a equação estudada, uma vez que não há valores para $f(u)$ que sejam menores que o mínimo. Agora, considerando $s > s_1$, o TVI nos garante a existência de pelo menos duas soluções para a equação $f(u) = s$. Esse fato pode ser constatado por meio dos seguintes argumentos. Seja $s > s_1 = f(u_1)$. Pela hipótese (A_2), existe $r > 0$ (que podemos supor, sem perder a generalidade, $r > u_1$) tal que, se $u > r$, então

$$f(u) > s > f(u_1).$$

Pelo TVI, sendo f contínua, existe u_2 tal que $f(u_2) = s$. Para obtermos uma segunda solução, basta fazermos o mesmo raciocínio, agora, com $r < 0$.

A segunda equação considerada nesta pesquisa é expressa em termos de uma equação diferencial, considerando o problema periódico:

$$u'(x) + f(u(x)) = s, \qquad (2)$$
$$u(0) = u(2\pi),$$

em que f novamente satisfaz as condições (A_1) e (A_2). Para resolvermos essa equação diferencial, usamos os passos encontrados em [2]. Primeiro, multiplicamos a equação por $u'(x)$, depois integramos no intervalo $[0, 2\pi]$ e usamos a periodicidade. Assim, encontraremos

$$\int_0^{2\pi} \left(u'(x)\right)^2 dx = 0.$$

Como estamos considerando u com derivada contínua, a integral nula acima mostra que $u'(x) = 0$, isto é, u é constante. Neste caso, substituindo em (2), retornamos à equação simples (1). Ou seja, a única solução para a equação (2) são as funções constantes, o que recai na equação já discutida (1).

A terceira equação estudada sob o viés dos resultados do tipo Ambrosetti-Prodi é um problema periódico não autônomo dado por:

$$u'(x) + f(x, u(x)) = s, \qquad (3)$$
$$u(0) = u(2\pi),$$

Para essa classe de equações, assumiremos que f satisfaz duas hipóteses, a saber:

(NA_1) $f: [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua;

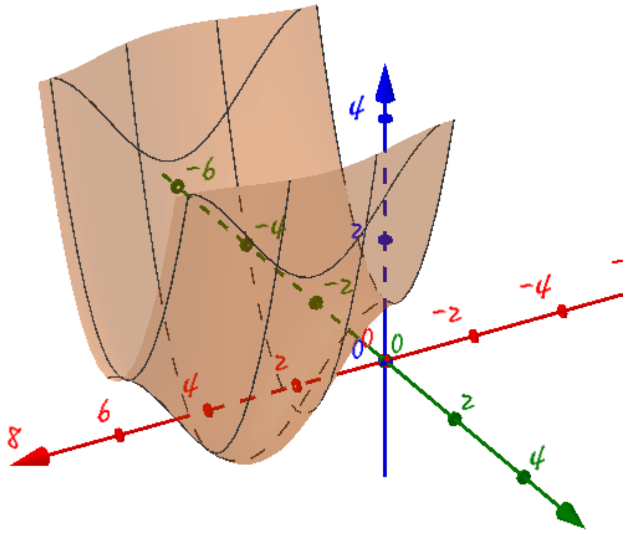
(NA_2) $f(x, u) \to +\infty$ quando $|u| \to +\infty$ uniformemente em $[0,2\pi]$.

Para entendermos essas hipóteses, vamos ver um exemplo de função que satisfaz ambas. Seja

DOI: http://dx.doi.org/10.20873/uftsupl2020-8622

$f(x, u) = u^2 + \cos(x)$, onde $(x, u) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}$, cujo gráfico é:

Figura 2. Gráfico da função *f*.



Fonte: dos autores

Para estudarmos este problema e sua multiplicidade de solução, vamos definir dois conceitos novos. Vamos considerar $\alpha, \beta \in C^1(I)$, onde $I = [0,2\pi]$, funções periódicas com $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ e $\beta(0) = \beta(2\pi)$. Dizemos que α é subsolução e β supersolução de (3) se as inequações

$$F(\alpha)(x) \geq s \iff \alpha'(x) + f(x, \alpha(x)) \geq s$$

e

$$F(\beta)(x) \geq s \iff \beta'(x) + f\big(x, \beta(x)\big) \leq s,$$

Forem satisfeitas para todo $x \in I$ e, além disso, valer também

$$\alpha(x) \leq \beta(x), x \in [0,2\pi].$$

Neste cenário, considere o resultado encontrado a seguir, que pode ser encontrado em [3].

Lema 1 *(Tradução e alteração nossa) [3]*: Suponha que existam $C^1(I) - T -$ funções periódicas α e β tais que $\alpha(x) \leq \beta(x)$ para todo $x \in I$ e

$$\propto'(x) - f(x, \propto(x)) \geq 0,$$

$$\beta'(x) - f(x, \beta(x)) \leq 0.$$

Então, a equação tem pelo menos uma solução periódica u tal que, para todo $x \in [0,2\pi]$,

$$\alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x).$$

O Lema 1 afirma que, se temos uma subsolução e uma supersolução, existe pelo menos uma solução entre elas.

Agora, vamos enunciar o teorema principal da pesquisa:

Teorema 1 *(tradução e alteração nossa) [2]*: Se f satisfaz as duas hipóteses (NA_1) e (NA_2), existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que (3) tem zero, pelo menos uma ou pelo menos duas soluções de acordo com $s < s_1$, $s = s_1$ ou $s > s_1$, respectivamente.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, considere o seguinte conjunto

$$S_j = \{\, s \in \mathbb{R};\ (3) \text{ tem pelo menos } j \text{ soluções}\}.$$

Vamos seguir alguns passos.

a) $S_1 \neq \emptyset$.

Se escolhemos $s_* > \max_{x \in I} f(x, 0)$, que existe uma vez que f é contínua, e usamos as hipóteses, podemos obter um $R_- < 0$ tal que $f(x, R_-) > s_*$. Então, R_- é subsolução de (3) e como 0, pela definição de s_*, é supersolução, pelo Lema 1, o conjunto S_1 não é vazio.

b) Se $\tilde{s} \in S_1$ e $s > \tilde{s}$, então $s \in S_2$.

Se tomarmos $\tilde{u}$ como sendo uma supersolução estrita e $s > \tilde{s}$, teremos

$$(\tilde{u})'(x) + f(x, \tilde{u}) = \tilde{s} < s.$$

Podemos tomar $R_- < \min \tilde{u}(x)$ e $R_+ > \max \tilde{u}(x)$ de tal forma que R_- e R_+ sejam subsoluções e sendo u uma subsolução, o Lema 1 nos garante a existência de pelo menos uma solução u_1 e u_2 entre elas. Assim temos:

$$R_- < u_1(x) < \tilde{u}(x) < u_2(x) < R_+.$$

c) $s_1 = \inf S_1$ é finito e $S_2 \supset (s_1, +\infty)$.

Este é o caso que mostra que não há solução para (3) quando $s < s_1$. Aqui, como $f(x, u) \geq c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, para todo $(x, u) \in I \times \mathbb{R}$, seguindo os passos de [2], temos:

DOI: http://dx.doi.org/10.20873/uftsupl2020-8622

$\int_0^{2\pi} u'(x)dx + \int_0^{2\pi} f(x,u(x))dx = \int_0^{2\pi} sdx.$

Quando integramos usando a periodicidade, obtemos

$$u(2\pi) - u(0) + \int_0^{2\pi} f(x,u(x))dx = 2\pi.s$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} cdx \leq \int_0^{2\pi} f(x,u(x))dx = 2\pi.s$$

$$\Rightarrow 2\pi.c \leq 2\pi.s \Rightarrow c \leq s.$$

Logo, S_1 é limitado inferiormente. A segunda parte, vem do item b).

d) Para $s_2 > s_1$, o conjunto de todas possíveis soluções de (3), com $s < s_2$, é limitado *a priori*.

Para este caso, provamos mostrando que existe $R_2 > 0$, tal que $f(x,u) > s_2$ sempre que tivermos $|u| > R_2$. Aqui, podemos mostrar que existe $\max_{I} u < r_2$ e $\min_{I} u > -r_2$, tais que u é uma possível solução de (3) e $r_2 > 0$ é uma constante.

e) $s_1 \in S_1$.

Para mostrarmos que $s_1 \in S_1$, vamos enunciar o teorema de Arzelá-Ascoli, muito importante na área de Análise. Um estudo mais aprofundado não foi apresentado no trabalho por causa da riqueza de conceitos necessários e da disponibilidade de tempo.

Teorema 2 (Arzelá-Ascoli): Sejam $K \subset \mathbb{R}$ compacto e $(f_n)_{n\in N}$ uma sequência equicontínua e simplesmente limitada de funções de K em $\mathbb{R}$. Então, $(f_n)_{n\in N}$ possui uma subsequência uniformemente convergente.

Consideramos, assim, uma sequência (σ_n) no intervalo $(s_1, +\infty)$ que converge para s_1 e utilizamos o Teorema de Arzelá-Ascoli para obtermos uma subsequência de soluções (u_{n_j}) que converge uniformemente em I para uma solução de (3), com $s = s_1$, o que mostra que $s_1 \in S_1$ e conclui a prova do teorema.

Uma observação sobre a equação (1) deste trabalho e sendo $f: [0,2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, considere o caso em que

$$f(x,u) \mapsto -\infty \; quando \; |u| \to \infty$$

uniformemente para $x \in I$. Podemos encontrar um valor $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que a equação $u'(x) + f(x,u) = s$ tem nenhuma solução quando $s > s_1$, tem pelo menos uma quando $s = s_1$ e pelo menos duas soluções quando $s < s_1$. Para a equação $f(u) = s$, apresentada no ano anterior, segue o mesmo para o comportamento das soluções.

CONCLUSÃO

Resultados do tipo Ambrosetti-Prodi estudam multiplicidade de soluções de uma equação da forma $G(u,s) = 0$ e de outras mais gerais. Vários conceitos e resultados foram discutidos para estudar os Resultados do tipo Ambrosetti-Prodi nesta pesquisa; entre eles, conceitos de continuidade, máximo e mínimo, limites, limites no infinito, os Teoremas de Weierstrass e de Bolzano, o Teorema do Valor Intermediário, sub e supersolução, e outros. Procuramos compreender como muda o número de soluções de uma equação quando variamos, nela, os valores de um parâmetro s. No caso da equação mais simples (1), não há nenhuma solução quando tomamos $s < s_1 = \min f$, existe pelo menos uma solução quando $s = s_1$ e pelo menos duas soluções quando $s > s_1$. No caso da equação (2), foi possível mostrar que as soluções são apenas as constantes. A pesquisa finaliza analisando a equação diferencial ordinária (3): $u'(x) + f\big(u(x)\big) = s$, com $u(0) = u(2\pi)$, via sub e supersolução.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal do Tocantins, UFT, pelo ambiente agradável e pelas ferramentas necessárias para o desenvolvimento da pesquisa e pelo Programa de Iniciação Científica – PIBIC, UFT, pelo apoio financeiro.

Todos os autores declararam não haver qualquer potencial conflito de interesses referente a este artigo.

REFERÊNCIAS

[1] LIMA, E. L. Curso de Análise. Volume1, Projeto Euclides, SBM, Rio de Janeiro, 2009.

[2] Mawhin, Jean. Ambrosetti-Prodi Type Results In Nonlinear Boundary Value Problems. Université De Louvain, Institutmathématique, B-1348, Belgium.

[3] Mawhin, Jean. Recent Results On Periodic Solutions Of Differential Equations In: International Conference On Differential Equations, Academic Press, New York - 1975. P.541.

[4] Stewart, J. Cálculo. Vol. 1. 5a Ed. São Paulo-Sp: Pioneira Thomson Learning, 2006.

[5] Thomas, G. B, de Weir, Maurice e Hass, Joel. Cálculo. 10ª Ed. São Paulo-Sp: Addison Wesley, 2003. Vol. 1.

DOI: http://dx.doi.org/10.20873/uftsupl2020-8622 *Revista Desafios – v . 7, Especial – PIBIC, 2020*