A MODELAGEM DE UMA RESTRIÇÃO DO *TIMETABLE*

The Modeling of a Timetable Restriction

El Modelado De Una Restricción Del Timetable

Artigo Original
Original Article
Artículo Original

Márcia Inês Schabarum Mikuska[*1], Carlos Eurico Galvão Rosa[1], Anderson Roges Teixeira Góes[1], Sérgio Scheer[1]

[1] *UFPR*, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Curitiba- PR, Brasil.

**Correspondência: Rua Doutor João Maximiano, 426, Vila Operária, Jandaia do Sul – PR- CEP: 86900-000.*

e-mail mat.mikuska@gmail.com.

Artigo recebido em 22/04/2019 aprovado em 27/06/2019 publicado em 18/09/2019.

RESUMO

A classe de problemas Timetable abrange diversas situações em que são feitas atribuições de horários para execução de tarefas específicas atendendo a restrições propostas pelos envolvidos ou pelo contexto, como escalas de trabalho de enfermarias, motoristas do transporte coletivo e professores. A quantidade de possíveis soluções costuma ser grande, por tratar-se de combinações de situações. A modelagem das restrições do problema é crucial para se obter uma solução aceitável através de processos heurísticos e meta-heurísticos. Neste trabalho é apresentada a construção de um modelo matemático para uma situação específica de um problema Timetable escolar (Scholar Timetable Problem) envolvendo a disponibilidade do professor. Em problemas dessa característica é necessário atender as disponibilidades do professor, respeitando a quantidade de aulas da disciplina, a quantidade de aulas por dia, etc. Uma boa modelagem do problema contribui com sua posterior resolução computacional, especialmente em relação ao tempo necessário para se obter uma solução ótima, em caso de uso de métodos exatos. Embora existam programas que efetuem essa distribuição, estes geralmente são pagos, e normalmente a equipe escolar tenta manualmente desenvolver a grade, o que dependendo das restrições torna-se inviável.

Palavras-chave: Timetable escolar; Modelagem; Restrição.

ABSTRACT

The Timetable problem class encompasses several situations in which time assignments are made to perform specific tasks taking into account constraints proposed by those involved or the context, such as ward work scales, public transport drivers and teachers. The amount of possible solutions is usually great, because it is a combination of situations. The modeling of problem constraints is crucial to obtain an acceptable solution through heuristic and metaheuristic processes. This paper presents the construction of a mathematical model for a specific situation of a Scholar Timetable Problem involving the availability of the teacher. In problems of this characteristic it is necessary to meet the availabilities of the teacher, respecting the amount of classes of the discipline, the amount of classes per day, etc. A good modeling of the problem contributes to its computational resolution, especially in relation to the time required to obtain an optimal solution, in case of using exact methods. Although there are programs that make this distribution, these are usually paid, and the school staff usually tries to manually develop the grid, which depending on the restrictions becomes impracticable.

Keywords: *Scholar Timetable Problem, Modeling; Restriction.*

RESUMEN

La clase de problemas Timetable abarca diversas situaciones en que se realizan asignaciones de horarios para ejecución de tareas específicas atendiendo a restricciones propuestas por los involucrados o por el contexto, como

escalas de trabajo de enfermerías, conductores del transporte colectivo y profesores. La cantidad de posibles soluciones suele ser grande, por tratarse de combinaciones de situaciones. El modelado de las restricciones del problema es crucial para obtener una solución aceptable a través de procesos heurísticos y meta-heurísticos. En este trabajo se presenta la construcción de un modelo matemático para una situación específica de un problema horario escolar (Scholar Timetable Problem) que involucra la disponibilidad del profesor. En los problemas de esta característica es necesario atender las disponibilidades del profesor, respetando la cantidad de clases de la disciplina, la cantidad de clases por día, etc. Un buen modelado del problema contribuye con su posterior resolución computacional, especialmente en relación al tiempo necesario para obtener una solución óptima, en caso de uso de métodos exactos. Aunque existen programas que efectúan esta distribución, éstos generalmente se pagan, y normalmente el equipo escolar intenta manualmente desarrollar la cuadrícula, lo que dependiendo de las restricciones se vuelve inviable.
Palabras clave: *Horario escolar; modelado; Restricción.*

INTRODUÇÃO

Vários contextos distintos necessitam de uma solução de um timetable, como escalas de trabalho, transportes, horários escolares e eventos esportivos. Trata-se de um problema de difícil solução manual e que conta com várias possíveis abordagens computacionais para sua resolução. A fim de se obter uma solução numérica de um problema, é preciso desenvolver seu respectivo modelo matemático. Neste trabalho é apresentada a modelagem de uma situação particular de um problema timetable escolar e como este modelo foi construído dentro do contexto da busca pela solução usando Programação Linear Inteira Binária. O objetivo do presente texto é mostrar uma parte do desafio em se bem interpretar a situação original do problema para que o modelo escolhido reflita a situação real e permita que a solução calculada seja aplicada na solução original de forma eficaz. Além disso, uma boa modelagem do problema contribui com sua posterior resolução computacional. Como a qualidade de uma solução envolve critérios bastante subjetivos, um aspecto importante a ser levado em conta é o tempo necessário para se chegar a uma solução que atenda às necessidades do problema específico. Esta solução poderá ser ótima do ponto de vista matemático, em caso de uso de métodos exatos, mas precisa ser validada pelo gestor que decide sobre o caso concreto.

O PROBLEMA *TIMETABLE*

Combinar as necessidades de uma situação problema com a disponibilidade dos atores da solução destas necessidades além de atender a regras específicas do contexto: estas são as principais características de um problema da classe *Timetable*. Vários distintos contextos lidam com o mesmo problema, como determinar horários de trens (YANG, LI e GAO, 2009), agendamento de caminhões, escalas de trabalho (GONZÁLEZ-DEL-CAMPO e SÁENZ-PÉREZ, 2007; BÄUMELT, 2015; LADIER e ALPAN, 2015), situações de torneios esportivos como definição de jogos e deslocamento de equipes (RIBEIRO e URRUTIA, 2007) e situações do contexto escolar, como grade horária de cursos de ensino básico (GÓES, COSTA e STEINER, 2010; MIKUSKA, 2015), cursos universitários (LOBO, 2005) e agendamentos de exames (WOUMANS, BOECK, *et al.*, 2016).

A dificuldade em se obter a solução do *timetable* é devida ao elevado número de possíveis soluções, mesmo para pequenas situações, sendo esses problemas classificados como "NP-Difícil". Em escolas de pequeno porte, a exemplo o caso abordado por Mikuska (2015), um problema envolvendo alocação de aulas de onze professores, cinco turmas e 25 horários na semana, tem um espaço de busca de possíveis soluções estimado em $3 \cdot 10^{180}$ possíveis soluções o que, mesmo computacionalmente, é uma elevada quantia. Um problema do tipo *timetable* pode ter sua resolução feita manualmente, o que geralmente é muito trabalhoso além de que se aceita uma solução possível (a primeira encontada) que nem sempre é a solução ótima, ou se recorre a abordagens da otimização combinatória para busca por uma solução, como a Programação Linear e o método *branch and bound* (LAWLER e WOOD, 1966) ou abordagens heurísticas e meta-heurísticas como algoritmo genético (GÓES, COSTA e STEINER, 2010; BÄUMELT, 2015; MIKUSKA, 2015), abordagem iterativa (LADIER e ALPAN, 2015), busca programada (GONZÁLEZ-DEL-CAMPO e SÁENZ-PÉREZ, 2007) e outros. Tirando o aspecto de otimalidade matemática da situação, a classificação de uma solução como "boa" ou "ruim" dependerá de critérios subjetivos, em especial o quanto afetará o trabalho dos envolvidos. Por exemplo, Mikuska (2015) apresenta a questão de minimização dos períodos livres, chamados "janelas", que são vistas como prejuízo "por reter o professor no ambiente de trabalho sem exercício direto da docência" (MIKUSKA, 2015). Nesse sentido, uma solução com um número mínimo de janelas seria classificada como boa. E essa classificação vai ao encontro da abordagem da qualidade baseada no usuário, que é uma das cinco propostas por Garvin (1992 apud GÓES, COSTA e STEINER, 2016). Para afastar essa subjetividade, um dos critérios para dizer que um método ou modelo é "bom" para a solução do problema é o tempo computacional gasto em obte-la. Nesse sentido, uma boa modelagem contribui com a eficiência do método quando diminui o tempo computacional necessário a se chegar a soluções viáveis.

O *timetable* escolar consiste em "alocar professores, turmas e salas em espaços de tempo a fim de satisfazer as restrições fortes e fracas do problema" (PILLAY, 2013). Uma restrição é uma condição do problema a ser atendida, variando a cada contexto. Mikuska (2015) apresenta como restrições fortes as condições que afetam a viabilidade da solução e restrições fracas as condições que afetam a qualidade da solução proposta. A violação destas últimas em uma solução obtida gera uma solução executável, mas com baixa qualidade, enquanto a violação das primeiras implicam em uma solução impossível de ser executada. Para Stefano e Tettamanzi (2001), a classificação de restrições entre fortes e fracas é uma escolha arbitrária e depende do contexto específico. Como exemplo, Pillay (2013) cita como restrições fortes as que garantem ausência de conflitos, como "um professor não pode estar em duas salas distintas em um mesmo período" ou "uma sala não pode estar com duas turmas distintas em um mesmo período". Na análise de Mikuska (2015) é considerada dentre as restrições fracas a existência de janelas em um horário de um professor. A resolução do *timetable* escolar pode envolver a atribuição de espaços físicos, como a distribuição de salas de aula, ou apenas a alocação de horários para turmas e professores, criando-se a grade horária do curso. Caso a grade horária não possa ter períodos livres, conhecidos no ambiente escolar como janelas, o *timetable* é dito "compacto".

A MODELAGEM

Entende-se por modelo matemático "um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, etc., obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno sobre análise" (BASSANEZI, 1994). Ao modelar uma situação do *timetable*, busca-se construir um conjunto de equações ou inequações que representem as restrições do problema e permitam a aplicação de técnicas computacionais de solução do modelo. Para o caso em tela, a formulação matemática do problema *timetable* segue a concepção de Mikuska (2015), em modelar o problema em termos de presença ou ausência de um professor para uma determinada turma em um específico horário. A tupla "professor-turma-horário" terá valor "Verdadeiro" se o professor tem o horário reservado para aquela turma e "Falso" caso contrário. A partir de pesos p_{pda} referentes à disponibilidade do professor p no dia d e aula a e variáveis binárias x_{ptda} representado as tuplas "professor-turma-horário", Mikuska (2015) modela como função objetivo do problema a equação

$$\sum_p \sum_t \sum_d \sum_a p_{pda} \cdot x_{ptda} - \Phi$$

Nesta abordagem, variáveis com valor "1", equivalente a "verdadeiro", terão os pesos de disponibilidade somados. Ao atribuir maior peso para os horários de preferência e menor peso para os horários indesejados, a busca pela maximização desta equação tende a favorecer a escolha dos horários de preferência na solução proposta. A função Φ representa todas as penalidades referentes à ocorrência de situações que reduzem a qualidade da solução obtida, como existências de janelas. Com isso, o aumento de fatores prejudiciais diminui o valor da função objetivo, buscando expressar matematicamente essa característica normalmente subjetiva.

As restrições mais comuns envolvem evitar conflitos. Por exemplo, a restrição que evita que um professor p tenha mais de uma turma em um mesmo horário é modelada como $\sum_t x_{ptda} \leq 1, \forall p, \forall d, \forall a$. Já para que uma turma tenha exatamente um professor em um horário específico, nem ausência de professor, no caso de *timetable* compacto, nem mais do que um que seria um conflito, a modelagem é feita como $\sum_p x_{ptda} = 1, \forall t, \forall d, \forall a$.

Para o presente trabalho, escolheu-se a modelagem de uma proposta para atendimento da disponibilidade do professor.

O CASO ESPECÍFICO: DISPONIBILIDADE DO PROFESSOR

As situações exploradas por Mikuska (2015) envolvem instituições de ensino básico da rede particular. Nestas, é comum que o professor não tenha vínculo de dedicação exclusiva com a instituição, mas apenas horários específicos de disponibilidade, tendo reservado outros horários para outra instituição ou atividade profissional. Em um caso assim, a atribuição de uma aula em um horário sem disponibilidade do professor torna a solução infactível, o que leva a considerar este tipo de restrição como forte.

Ao considerar as possibilidades de atribuições de um professor para alguma turma, a situação real apresenta as possibilidades descritas na Tabela (Tab.1):

Tabela 1 – Combinações entre disponibilidade e atribuição

Atribuição \ Disponibilidade	**Horário Disponível**	**Horário Indisponível**
Com atribuição	Atribuição em horário disponível	Atribuição em horário indisponível
Sem atribuição	Não atribuição em horário disponível	Não atribuição em horário indisponível

Fonte: Os autores.

O primeiro e o último caso são os preferenciais, pois são os casos em que as necessidades da instituição e do docente são atendidas. Já os outros dois casos devem ser minimizados e, sendo possível, evitados. A atribuição em horário indisponível leva a uma solução infactível, visto que o professor não poderá cumprir este horário. Especialmente quando a solução é feita manualmente, se as soluções encontradas sempre exijam essa atribuição e o professor em questão não pode cumprir o horário proposto, em alguns casos o professor pode ser desligado da instituição. Já a não atribuição em horário disponível pode, em último caso, ocasionar uma janela no horário do professor, período no qual o docente precisa ficar na instituição de ensino sem aulas, podendo gerar custos extras para a escola e ociosidade do profissional.

Seguindo a proposta de variáveis supracitada, é criada uma variável binária $disp_{pda}$, com valor "1" para horário com disponibilidade de horário e valor "0" caso o horário seja indisponível. Para resgatar se uma combinação de horário foi atribuída, é preciso somar as atribuições de cada turma. Assim, o somatório $\sum_t x_{ptda}$ será "0" se nenhuma turma tiver sido atribuída ao professor p no dia d e aula a e "1" caso alguma turma tenha sido atribuída. Note-se que se este somatório apresentar um valor maior do que "1" significa que o professor está atribuído a mais de uma turma, o que fere as restrições de ausência de conflitos e, por esse motivo, não requer maior atenção neste caso.

A soma $disp_{pda} + \sum_t x_{ptda}$ apresenta resultados conforme a Tabela 2:

Tabela 2 – Possíveis valores da soma $disp_{pda} + \sum_t x_{ptda}$

Valor	Descrição do caso
0	Nenhuma atribuição do professor em horário marcado como indisponível. Caso desejável
1	Possibilidade 1: Sem atribuição em horário disponível. Possível janela Possibilidade 2: Atribuição em horário indisponível: Caso a evitar
2	Possibilidade 1: Atribuição em horário disponível. Caso desejável Possibilidade 2: Atribuição em duas turmas em horário indisponível. Caso ignorado por violar outra restrição forte
Maior do que 2	Necessariamente envolve atribuição em mais de uma turma. Caso ignorado por violar outra restrição forte

Fonte: Os autores.

Dentre os casos listados, a situação que precisa ser tratada ocorre quando a soma $disp_{pda} + \sum_t x_{ptda} = 1$, sendo aceitáveis os casos em que $disp_{pda} + \sum_t x_{ptda} = 0$ ou 2. Com isso, pode ser usada a ideia de congruência módulo m da teoria de Números, em que são tomados os restos da divisão de um número pelo m. Tomando a congruência módulo 2, números ímpares tem resultado 1 e números pares tem resultado 0. Assim, $\left(disp_{pda} + \sum_t x_{ptda}\right) \mathit{mod}\ 2 = 0$ representa uma situação desejável ou um caso a ser ignorado.

DOI: https://dx.doi.org/10.20873/uftv6-6747 Revista Desafios – v. 6, n. 3, 2019

Entretanto, ainda é preciso de uma desambiguação do caso $\left(disp_{pda} + \sum_t x_{ptda}\right) mod\ 2 = 1$, pois uma possível janela nem sempre é um problema que gera infactibilidade, mas a atribuição em caso indisponível é a situação a ser evitada por esta modelagem. Para separar os casos, é preciso analisar o que os difere, que é justamente a atribuição de aulas para o professor. Se $\left(disp_{pda} + \sum_t x_{ptda}\right) mod\ 2 = 1$ e $\sum_t x_{ptda} = 0$, tem-se um caso de uma possível janela, dependendo das atribuições nos horários anterior e posterior à aula a, caso existam. Portanto, fazendo o produto $\left(\left(disp_{pda} + \sum_t x_{ptda}\right) mod\ 2\right) \cdot \left(\sum_t x_{ptda}\right)$, o resultado será 0 tanto para o caso em que $\left(disp_{pda} + \sum_t x_{ptda}\right) mod\ 2 = 0$, já citado como caso desejável, quanto para $\sum_t x_{ptda} = 0$. Ou seja, se obterá $\left(\left(disp_{pda} + \sum_t x_{ptda}\right) mod\ 2\right) \cdot \left(\sum_t x_{ptda}\right) \neq 0$ apenas em casos de atribuição em horário indisponível, seja esta atribuição em uma ou mais turmas, solução a ser evitada de qualquer modo.

Portanto, incluir a restrição $\left(\left(disp_{pda} + \sum_t x_{ptda}\right) mod\ 2\right) \cdot \left(\sum_t x_{ptda}\right) = 0$ como uma restrição forte do problema, faz com que as soluções obtidas necessariamente não tenham a atribuição em horário indisponível, pois violar a restrição forte faz com que a solução seja descartada.

CONCLUSÃO

A resolução de problemas *timetable* normalmente envolve a otimização de recursos e atendimento de condições próprias de cada contexto. Quando esta resolução é feita manualmente, qualquer solução factível que seja obtida será adotada, devido a grande dificuldade em se obter esta solução. A própria melhoria na qualidade desta solução é bastante improvável, por demandar uma reconstrução da solução existente. A possibilidade de se resolver o problema computacionalmente em tempo menor do que a solução manual permite a escolha entre possíveis soluções, inclusive com busca por melhores soluções possíveis, através de minimização de prejuízos ou maximização de benefícios.

A correta modelagem do problema *timetable* fará com que a solução obtida através do cálculo numérico possa ser aplicada na solução do problema original. Além disso, a forma com que o problema é modelado também definirá o caminho para busca da sua solução, seja através de programação linear inteira, programação mista, programação linear inteira binária, programação não linear, aproximações heurísticas, etc. Tendo em mãos o modelo e o caminho para busca da solução, passa-se para o cálculo da sua solução e a aplicação desta solução no caso real.

Ressalta-se que neste trabalho foi apresentada apenas uma das restrições do problema *timetable* escolar. Outras restrições podem ser apresentadas e envolver mais de uma equação ou inequação, além de serem inseridas novas variáveis auxiliares do problema para estes casos. Para o pesquisador na área do *timetable* a modelagem do problema é um desafio que pode alterar todo o rumo da pesquisa, sendo crucial para seu desenvolvimento.

Todos os autores declararam não haver qualquer potencial conflito de interesses referente a este artigo.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. **Modelagem Matemática**. Dynamis, Blumenau, v. 1, n. 7, p. 55-83, abr/jun 1994.

BÄUMELT, Z. **Advanced Methods and Models for Employee Timetabling Problems**. Tese Ph.D. Programme: Electrical Engineering and Information Technology, Praga, 2015.

GÓES, A. R. T.; COSTA, D. M. B.; STEINER, M. T. A. Otimização na programação de horários de professores/turmas: Modelo matemático, abordagem heurística e método misto. **Revista Eletrônica Sistemas & Gestão**, v. 5, n. 1, p. 50-66, jan-abr 2010.

GÓES, A. R. T.; COSTA, D. M. B.; STEINER, M. T. A. Proposta de metodologia para a criação de etiqueta de classificação – estudo de caso: desempenho escolar. **Gest. Prod.**, São Carlos, v. 23, n. 1, p. 177-191, mar. 2016. Disponível em http://dx.doi.org/10.1590/0104-530X810-13.

GONZÁLEZ-DEL-CAMPO, R.; SÁENZ-PÉREZ, F. Programmed Search in a Timetabling Problem over Finite Domains. **Proceedings of the 15th Workshop on Functional and (Constraint) Logic Programming (WFLP 2006)**. Madrid: [s.n.]. 2007. p. 253-267. Disponível em http://dx.doi.org/10.1016/j.entcs.2007.01.013.

LADIER, A.-L.; ALPAN, G. Integrating truck scheduling and employee rostering in a cross-docking platform – an iterative approach. **International Conference on Industrial Engineering and Systems Management (IESM),** 2015. Sevilha: [s.n.]. 2015. p. 676 - 685. Disponível em <http://dx.doi.org/10.1109/IESM.2015.7380232>.

LAWLER, E. L.; WOOD, D. E. Branch-and-Bound Methods: A Survey. **Operations Research,** v. 14, p. 699-719, 1966. Disponível em <http://dx.doi.org/10.1287/opre.14.4.699>.

LOBO, E. L. M. **Uma Solução para o Problema de Horário Escolar via Algoritmo Genético Paralelo**. Dissertação - Programa de Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional CEFET-MG, Belo Horizonte, 95p, 2005.

MIKUSKA, M. I. S. **Uma proposta baseada em Algoritmo Genético para o Problema Timetable Escolar Compacto.** Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia UFPR, Curitiba, 103p, 2015.

PILLAY, N. A survey of school timetabling. **Annals of Operations Research**, p. 261–293, 2013.

RIBEIRO, C. C.; URRUTIA, S. Heuristics for the mirrored traveling tournament problem. **European Journal of Operational Research,** 179, 16 Junho 2007. 775-787. Disponível em <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2005.03.061>.

STEFANO, C. D.; TETTAMANZI, A. G. B. An evolutionary algorithm for solving the school time-tabling problem. **Proceedings of the EvoWorkshops** 2001. Como, Itália: Springer. 2001. p. 452–462.

WOUMANS, G. et al. A column generation approach for solving the examination-timetabling problem. **European Journal of Operational Research,** v. 253, p. 178-194, Agosto 2016. ISSN ISSN 0377-2217. Disponível em <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2016.01.046>.

YANG, L.; LI, K.; GAO, Z. Train Timetable Problem on a Single-Line Railway With Fuzzy Passenger Demand**. IEEE Transactions on Fuzzy System**, 17, Junho 2009. 617-629. Disponível em <http://dx.doi.org/10.1109/TFUZZ.2008.924198>.