INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS VARIACIONAIS

INTRODUCTION TO VARIATIONAL METHODS

INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS VARIACIONALES

Thafne Sirqueira Carvalho*[1], José Carlos de Oliveira Junior[2]

[1]Departamento de Matemática, Pós-Graduação, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil.

[2]Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Norte do Tocantins, Araguaína, Brasil.

Artigo recebido em 15/12/2022 aprovado em 23/03/2023 publicado em 28/04/2023.

RESUMO

Os Métodos Variacionais são técnicas desenvolvidas e aplicadas para resolver certas equações diferenciais, encontrando pontos críticos de um funcional associado a tal equação. Esta pesquisa tem como objetivo principal determinar condições suficientes para que algumas equações diferenciais ordinárias (EDO) possuam solução via Métodos Variacionais. Para isso, inicialmente, foram definidos o conceito de derivada fraca e, em seguida, os conhecidos espaços de Sobolev. Nesses espaços, estabeleceu-se o que chamamos de solução fraca da equação diferencial dada, para, mais tarde, resolver a EDO, isto é, encontrar uma de suas soluções possíveis. Quanto à metodologia utilizada neste artigo, temos uma pesquisa exploratória e bibliográfica, e a abordagem qualitativa. Como resultados deste estudo, destaca-se a utilização do Teorema do Passo da Montanha, que fornece algumas condições do funcional, entre elas a condição de Palais-Smale, sob as quais o funcional associado à equação tem ponto crítico. Conclui-se, no final da pesquisa, que os métodos em questão são uma ferramenta poderosa para resolução de determinadas equações diferenciais ordinárias, cujos métodos tradicionais não são suficientes para resolver.

Palavras-chave: Espaços de Sobolev; Teorema do Passo da Montanha; Ponto Crítico de Funcional.

ABSTRACT

Variational methods are techniques developed and applied to solve certain differential equations, finding critical points of a functional associated with such equation. The main objective of this research is to determine sufficient conditions for some ordinary differential equations (ODEs) to have solutions via variational methods. For this purpose, the concept of weak derivative was initially defined, followed by the well-known Sobolev spaces. In these spaces, the so-called weak solution of the given differential equation was established in order to later solve the ODE, that is, to find one of its possible solutions. As for the methodology used in this article, it is an exploratory and bibliographic research with a qualitative approach. The results of this study highlight the use of the Mountain Pass Theorem, which provides some conditions of the functional, including the Palais-Smale condition, under which the functional associated with the equation has a critical point. It is concluded at the end of the research *that the methods in question are a powerful tool for solving certain ordinary differential equations, whose traditional methods are not sufficient to solve.*

***Keywords**:* Sobolev Spaces; Mountain Pass Theorem; Critical Point of Functional.

RESUMEN

Los métodos variacionales son técnicas desarrolladas y aplicadas para resolver ciertas ecuaciones diferenciales, encontrando puntos críticos de una funcional asociada a tal ecuación. El objetivo principal de esta investigación es determinar condiciones suficientes para que algunas ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) tengan soluciones mediante métodos variacionales. Para esto, inicialmente se definió el concepto de derivada débil y luego los conocidos espacios de Sobolev. En estos espacios, se estableció lo que llamamos solución débil de la ecuación diferencial dada, para más tarde resolver la EDO, es decir, encontrar una de sus posibles soluciones. En cuanto a la metodología utilizada en este artículo, es una investigación exploratoria y bibliográfica con un enfoque cualitativo. Los resultados de este estudio destacan el uso del teorema del Paso de la Montaña, que proporciona algunas condiciones de la funcional, incluida la condición de Palais-Smale, bajo la cual la funcional asociada a la ecuación tiene un punto crítico. Al final de la investigación, se concluye que los métodos en cuestión son una herramienta poderosa para resolver ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyos métodos tradicionales no son suficientes para resolver.

***Descriptores**:* Espacios de Sobolev; Teorema del Paso de la Montaña; Punto Crítico de Funcional

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais possuem grande relevância no estudo e compreensão de vários fenômenos da realidade. Portanto, devido a essa notória importância, pesquisadores da área têm descoberto métodos de resolução de equações diferenciais, dentre os quais destacam-se, neste trabalho, os Métodos Variacionais. Tais métodos podem ser aplicados tanto em equações diferenciais ordinárias como nas parciais, no entanto, nesta pesquisa receberão foco as equações diferenciais ordinárias (EDOs), dadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} -u''(t) + c(t)u(t) = f(t,u) \ \ em \ \ (a,b) \\ \qquad u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $a < b, u = u(t)$ é a incógnita da equação, e c e f são funções apropriadas que satisfazem certas hipóteses (veja o Capítulo 8 de (Brezis, 2010)).

Mostraremos que há exemplos de funções c e f cujos métodos tradicionais de resolução de EDOs (equações exatas, separáveis, fator integrante, métodos dos coeficientes a determinar, etc.) não podem ser aplicados diretamente para solucionar a equação (1.1) ou equações similares. Então, um novo método é utilizado na resolução de tal equação, e este é o tema principal desta pesquisa, a saber, os Métodos Variacionais.

O pontapé inicial para o surgimento desse método foi o desenvolvimento do cálculo das variações, no qual matemáticos se debruçaram na resolução de problemas que envolviam máximos ou mínimos, também conhecidos como problemas de otimização.

Um dos mais antigos problemas sobre otimização, mencionado em (Lima, 2004), data de 850 a.C., conhecido como problema de Dido. Segundo a lenda, Dido é uma fenícia considerada a primeira rainha de Cartago. Com o assassinato do seu marido, foi-lhe prometida uma terra a qual poderia cercar com a pele de um boi. Assim, cortando a pele, cercou uma extensão de terra semicircular. Desse acontecimento, originou-se o problema de Dido, que consiste em encontrar a curva que determine a maior área possível entre todas as curvas planas. Mais detalhes dessa história encontram-se em (Virgílio, 1956).

Embora o surgimento do cálculo variacional date desse período, seu desenvolvimento se dá no século XVII, quando matemáticos começaram a buscar solução para os problemas da época. Entre eles está o famoso Problema da Braquistócrona, cujo desafio impulsionou o estudo do cálculo das variações.

O problema da Braquistócrona (veja (Eves, 1997)) é, a saber: dados dois pontos num plano vertical, em alturas diferentes, qual trajetória do plano deve seguir uma partícula material para ir do ponto mais alto ao mais baixo no menor espaço de tempo possível? Essa pergunta era até mesmo alvo de competição entre os matemáticos para resolvê-la.

Segundo (Lima, 2004), essa questão foi publicada no jornal *Acta Eruditorium* em 1696 por Johann Bernoulli. No final do século XVII, o entusiasmo dos irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748) pela Matemática trouxe inúmeras contribuições para o Cálculo Variacional. Enquanto Jakob Bernoulli se debruçou sobre as figuras isopométricas, que consistem em caminhos planos fechados de uma dada espécie e perímetro fixo que abarcam uma área máxima, seu irmão, Johann Bernoulli, colaborou ainda mais ao buscar respostas para o problema da Braquistócrona.

Além desses, outros matemáticos se interessavam por problemas dessa natureza. Em 1630, Galileu Galilei (1564-1643) relacionou o tempo de descida por um segmento circular com os tempos correspondentes dos polígonos inscritos e outros arcos, apresentando o problema da Braquistócrona de outra forma. Já Isaac Newton (1642-1627), em 1696, determinou a forma de um corpo que se move no ar, com resistência mínima, utilizando o cálculo variacional, de acordo (Flores, 2011) e (Lima, 2004), respectivamente. Os trabalhos de Lagrange (1736-1813), Leonhard Euler (1707-1783) e Carl Jacobi (1804-1851) também contribuíram significativamente para o desenvolvimento dessa área.

A resposta de James Bernoulli (1654-1705) para um problema isopométrico, em 1701, serviu como base de estudo para Euler, que descobriu a equação diferencial $\frac{d}{dx}f_{y'} - f_y = 0$ que atualmente recebe o nome de Equação de Euler. Em 1762 e 1770, foi publicado um novo método por Lagrange, no qual substituía-se a função $y(x)$ pela função $y(x) + \delta y(x)$. Com isso, Euler designou as notações de

Lagrange, chamando $\delta y(x)$ de variação da função $y(x)$ e δI de variação da integral. Devido a isso, esse novo campo da Matemática foi denominado de Cálculo Variacional, conforme diz (Lima, 2004).

Além disso, outros que colaboraram para o desenvolvimento do cálculo variacional, segundo (Souza Júnior, 2010) foram Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897), Carl Friendrich Gauss (1777-1855), David Hilbert (1802-1943) e William Rowan Hamilton (1805-1865).

Portanto, feitas essas considerações, pretendemos apresentar neste trabalho uma introdução ao Método Variacional, visando responder à seguinte questão norteadora: como resolver equações diferenciais ordinárias utilizando os Métodos Variacionais? Estabelecida essa problemática, define-se como objetivo geral resolver uma classe de EDOs, como em (1.1) via métodos variacionais. Para tal fim, de modo específico, objetivamos apresentar os conceitos derivada fraca e, em seguida, definir os espaços de Sobolev, cujo domínio, no caso, é a reta real. Ressalta-se que esse método consiste em encontrar um funcional associado a uma EDO e, posteriormente, encontrar pontos críticos deste funcional (chamados de solução fraca da EDO). Aqui, utilizaremos para isso o Teorema do Passo da Montanha.

Vale ressaltar que, para uma leitura fluente deste artigo, é de suma importância que o leitor esteja familiarizado com conceitos de Medida e Integração, Espaços $L^{p's}$ e Diferenciabilidade de Funcionais em Espaços de Banach. Para uma boa base sobre esses assuntos, consulte (Bartle, 1995) e (Brezis, 2010), por exemplo.

À vista disso, a pesquisa realizada se designa como exploratória, que consiste na obtenção de informações sobre a temática escolhida e sua delimitação. Para a coleta de dados, empregamos a pesquisa bibliográfica, fundamentando-nos na leitura de materiais já publicados. Já quanto à abordagem, aderimos à pesquisa qualitativa, não preocupando-nos com dados estatísticos e sim, com a obtenção de dados diretamente do objeto de estudo.

MATERIAIS E MÉTODOS

Sendo nossa pesquisa de cunho qualitativo, o material usado está voltado apenas para livros e artigos científicos impressos para um melhor desenvolvimento do trabalho. Quanto aos métodos, utilizamos métodos variacionais para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs). A abordagem variacional consiste em formular um problema de valor inicial (PVI) como um problema de otimização. Em vez de resolver diretamente a equação diferencial, procuramos uma função que minimize uma função de energia específica, denominada funcional de energia, que está associado à equação dada.

A formulação geral do problema variacional para EDOs consiste em encontrar uma solução da forma $y(x) = min\, J[u(x)]$ sujeito a condições de contorno da forma $y(a) = y(b) = 0$, onde J é o funcional de energia, $y(x)$ é a função solução, $y(a)$ e $y(b)$ são os valores conhecidos da função solução nos pontos a e b, respectivamente. A minimização de J é realizada em um espaço de funções, geralmente definido por funções cujas derivadas são mais gerais que as clássicas.

Para resolver equações diferenciais ordinárias utilizando métodos variacionais, seguimos os seguintes procedimentos:

- Formulação da equação diferencial ordinária em termos de um funcional energia.
- Escolha de uma classe de funções com derivadas fracas adequadas para a solução e definição das condições de contorno.
- Aplicação do princípio variacional para obter uma formulação de solução fraca para a EDO.
- Demonstração de que o funcional energia está sob as condições do Teorema do Passo da Montanha.
- Obtenção da solução fraca não trivial da EDO.

Este processo é aplicado para cada equação diferencial ordinária a ser resolvida. O método variacional oferece uma abordagem geral para a solução de equações diferenciais ordinárias, permitindo a obtenção de soluções analíticas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Incialmente, definiremos um conceito de derivada mais geral do que aquele encontrado em cursos de Cálculo Diferencial.

Derivada Fraca

A noção de derivada fraca se iniciou com Sobolev, no século XX, no estudo de problemas associados a equações diferenciais. Ela estende a derivada clássica do Cálculo, pois uma função que possui derivada no sentido clássico também tem derivada no sentido fraco, e no caso elas são iguais, como veremos a seguir.

A partir daqui, assumiremos que μ é a medida de Lebesgue em R, o conjunto dos números reais.

Definição 1: Seja $u \in L^p(\Omega)$, em que $\Omega \subset R$ é um intervalo e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que u é *fracamente diferenciável* ou *diferenciável no sentido fraco* se existir $v \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u\, \varphi' d\mu = -\int_\Omega v\, \varphi d\mu, \forall \varphi \in C_0^1(\Omega),$$

onde $C_0^1(\Omega)$ é o espaço vetorial das funções $\varphi\colon \Omega \to R$ que possuem a primeira derivada (clássica) contínua e, além disso, se anulam nos extremos do intervalo Ω (se houver). Neste caso, chamamos v de derivada fraca de u e denotamos v=u'.

Um resultado que vale mencionar é que, quando a derivada fraca de uma função existe, então ela é única, a menos de conjuntos de medida de Lebesgue nula (isso significa que, se $w(x) = u'(x)$ para todo x em $\Omega \setminus E$, onde $E \subset \Omega$ com $\mu(E) = 0$, então diremos que $w = u'$).

Como exemplo, temos que a função módulo não é derivável no sentido clássico (um exercício simples de cálculo), no entanto, a função $u(x) = |x|$, $x \in (-1,1)$, possui derivada no sentido fraco. Já a função $u(x) = \frac{|x|}{x}$, $0 \neq x \in (-1,1)$, não possui derivada nem clássica nem fraca. Os detalhes dessas afirmações podem ser encontrados em (Carvalho, 2023).

Não provaremos, mas a aplicação de derivação no sentido fraco é uma aplicação linear no seguinte sentido:

- Se v_1 e v_2 são derivadas fracas das funções u_1 e u_2, respectivamente, então a função $u_3 = u_1 + u_2$ possui derivada fraca e, além disso, a derivada fraca de u_3 é igual a $v_1 + v_2$, isto é, $u_3' = (u_1 + u_2)' = u_1' + u_2' = v_1 + v_1$.
- Se v_1 é a derivada fraca de u_1, então a derivada fraca de $u_3 = \alpha u_1$ é $\alpha v_1, \forall \alpha \in R$, isto é, $u_3' = (\alpha u_1)' = \alpha u_1' = \alpha v_1$.

Espaços de Sobolev

Com o conceito de derivada fraca em mãos, podemos definir os espaços de Sobolev, que certos são espaços vetoriais de funções nos quais procuraremos soluções de algumas equações diferenciais ordinárias. Precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 2: Sejam $\Omega = (a, b) \subset R$ um intervalo aberto e $p \in R$ tal que $1 \leq p < \infty$. Considere

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega u\, \varphi' d\mu = -\int_\Omega g\, \varphi d\mu, \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)\right\}.$$

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é denominado de espaço de Sobolev. Note que, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, a função $g \in L^p(\Omega)$ é exatamente a derivada fraca de u, ou seja, $g = u'$.

Pelas propriedades lineares da derivada fraca, não é difícil mostrar que $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial. Além disso, vale que $C_0^1(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$.

Observação 3: Para o caso em que $p = 2$, vamos denotar $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Observação 4: Vale muito salientar aqui que a definição de espaço de Sobolev requer apenas que exista a primeira derivada fraca da função. Portanto, isso faz com que, num certo sentido, passemos a "procurar" funções num espaço ainda maior, já que a derivada clássica implica na derivada fraca e o contrário não é verdade.

Nos Espaços de Sobolev, vamos considerar as seguintes normas

$$|u|_{W^{1,p}} = \left(|u'|_{L^p}^p + |u|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Já no espaço $H^1(\Omega)$, temos a norma $|u|_{H_1} = \left(|u'|_{L^2}^2 + |u|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

DOI: http://dx.doi.org/10.20873/pibic2022_9 *Revista Desafios – Pibic, ed. Espec, 2023.*

Proposição 5: Para $1 \leq p < \infty$, o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Veja a prova na bibliografia (Brezis, 2010), Proposição 8.1. ■

Exemplo 6: A função $u(x) = x^2$, definida no intervalo $\Omega = (-5,5)$, pertence ao espaço $H^1(\Omega)$. Para ver isso, como $u \in L^2(\Omega)$ e u possui derivada fraca (pois possui derivada clássica) também em $L^2(\Omega)$, então, $u \in H^1(\Omega)$ por definição.

A seguir, damos um exemplo de função que não pertence a $H^1(\Omega)$.

Exemplo 7: A função $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no intervalo $\Omega = (0,1)$ não pertence ao espaço $H^1(\Omega)$. Não é difícil ver que $u \notin L^2(\Omega)$ e, portanto, $u \notin H^1(\Omega)$.

Soluções Fracas e Métodos Variacionais

Como dito na introdução deste trabalho, existem EDO's cujos métodos tradicionais de resolução (equações exatas, separáveis, fator integrante, método dos coeficientes a determinar, etc) não podem ser aplicados diretamente. Um exemplo é a equação dada por:

$$\begin{cases} -u''(t) + c(t)u(t) = f(t,u) \ \ em \ \ (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{P}$$

em que $a < b, u = u(t)$ é a incógnita da equação e c, f são funções dadas. Uma solução forte (ou clássica) para a EDO acima é uma função u de classe C^2, isto é, funções que possuem duas derivadas contínuas, que satisfaz a equação *(P)* em todo ponto. No entanto, podemos transformar *(P)* em uma equação que requer apenas uma derivada (e no sentido fraco), da seguinte forma:

$$\int_{(a,b)} u'(t)\varphi' d\mu + \int_{(a,b)} c(t)u(t)\varphi d\mu = \int_{(a,b)} f(t,u)\varphi d\mu, \ \ \forall \varphi \in C_0^1([a,b]). \tag{1.2}$$

Para chegarmos em (1.2), multiplicamos $\varphi \in C_0^1([a,b])$ em ambos os lados de (P), integramos a Lebesgue (que coincide, nesse caso, com a integral de Riemann) e utilizamos integração por partes.

Dessa forma, em vez de se procurarmos diretamente uma solução para (P) – que requer duas derivadas contínuas – encontra-se, primeiramente, uma função $u \in C_0^1([a,b])$ que satisfaz (1.2), pois seria mais viável buscar solução para uma equação que requer apenas uma derivada da função incógnita. Caso essa função u exista, dizemos que u é uma *solução fraca* da EDO (P).

Agora, apresentaremos a essência do nosso trabalho: utilizar os métodos variacionais na resolução de EDO's. Aplicaremos o Teorema do Passo da Montanha (TPM), considerado o mais importante teorema relacionado aos métodos variacionais.

Esse teorema é atribuído a Ambrosetti-Rabinowitz e estabelece condições para a existência de pontos críticos de um funcional. Assim, dado um funcional J, esse teorema fornece circunstâncias nas quais J tem ponto crítico. Abaixo, enunciamos esse resultado.

Teorema 8: *(Teorema do Passo da Montanha)* Sejam E um espaço de Banach e $\mathrm{J} \in \mathrm{C}^1(\mathrm{E}, \mathrm{R})$ satisfazendo a condição de Palais-Smale (PS). Suponha que $J(0) = 0$ e que as seguintes condições sejam satisfeitas:

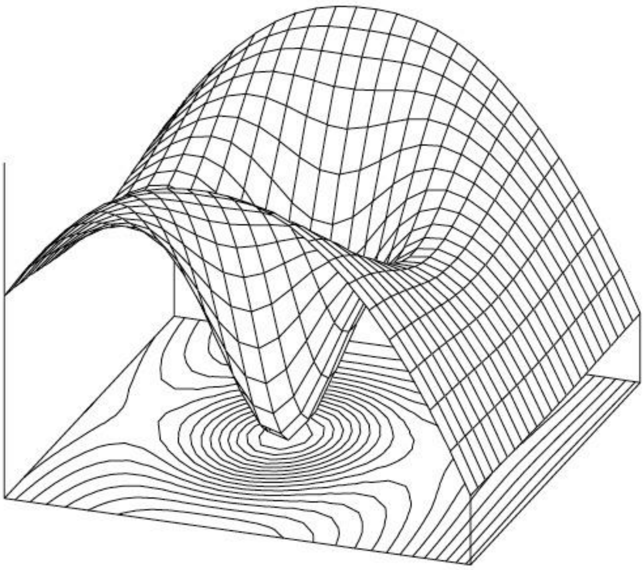
- $\exists \mathrm{m}\ \rho, \gamma > 0$ tais que $\mathrm{J(u)} \geq \gamma$ para todo $|\mathrm{u}|_{\mathrm{E}} = \rho$.
- $\exists$ e $\notin \mathrm{B}_\rho(0)$ tal que $J(e) < 0$.

Então, J possui um valor crítico $c \geq \gamma$, com $\mathrm{c} = \inf\limits_{\alpha \in \Gamma} \max\limits_{t \in [0,1]} \mathrm{J}\left(\alpha(\mathrm{t})\right)$, sendo

$$\Gamma = \{\alpha \in \mathrm{C}([0,1], E) |\ \alpha(0) = 0, \alpha(1) = e\}.$$

O motivo pelo qual o teorema se chama Passo da Montanha segue da figura abaixo.

Figura 1: Motivação geométrica para o Passo da Montanha



Fonte: (Jabri, 2003, p. 66)

> Considere dois vales A e B tais que A é cercado por uma cordilheira que o separa de B. Para ir de A a B, devemos cruzar a cadeia de montanhas. Se quisermos subir o mínimo possível, teremos que considerar a elevação máxima de cada caminho. O caminho com o mínimo (dessas elevações máximas) cruzará o passo da montanha (Jabri, 2003, p. 66, tradução do autor).

No que segue, considere E um espaço de Banach. Veremos duas definições importantes para a compreensão do TPM. A primeira é sobre sequências de Palais-Smale (PS) de um funcional $\mathrm{J}: \mathrm{E} \to \mathrm{R}$, e a segunda, sobre o funcional J satisfazer a condição de Palais-Smale (ou apenas a condição (PS)).

Definição 9: Chamamos $(\mathrm{u_n}) \subset \mathrm{E}$ de sequência de Palais-Smale do funcional $\mathrm{J}: \mathrm{E} \to \mathrm{R}$ se $\mathrm{J}(\mathrm{u_n}) \to \mathrm{r} \in \mathrm{R}$ e $\mathrm{J}'(\mathrm{u_n}) \to 0$ quando $\mathrm{n} \to +\infty$.

Definição 10: O funcional $\mathrm{J}: \mathrm{E} \to \mathrm{R}$ satisfaz a condição de Palais-Smale se, dada qualquer sequência $(\mathrm{u_n}) \subset \mathrm{E}$ de Palais-Smale de J, ou seja, qualquer sequência verificando $\mathrm{J}(\mathrm{u_n}) \to \mathrm{c} \in \mathrm{R}$ e $\mathrm{J}'(\mathrm{u_n}) \to 0$ quando $\mathrm{n} \to +\infty$, então $(\mathrm{u_n})$ possui uma subsequência que converge em E.

Em nosso contexto, vale ressaltar que essa condição da Definição 10 se resume a mostrar que $(\mathrm{u_n})$ possui uma subsequência limitada (ou ela mesma o é). Quando escrevemos $\mathrm{J}'(\mathrm{u_n}) \to 0$, queremos dizer que $|\mathrm{J}'(\mathrm{u_n})|_{\mathrm{E}^*} \to 0$ quando $\mathrm{n} \to +\infty$, onde a norma em $\mathrm{E}^* = \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{R})$ (chamado de dual do espaço E) é definida como sendo

$$|\mathrm{J}'(\mathrm{u})|_{\mathrm{E}^*} = \sup_{|\mathrm{h}|_{\mathrm{E}} \leq 1} \frac{|J'(u)h|}{|h|_E}, \ \forall \, \mathrm{u} \in \mathrm{E}.$$

Como $J'(u)$ é uma transformação linear contínua, esse supremo sempre existe.

Vejamos agora uma aplicação do Teorema 8, o Teorema do Passo da Montanha. Considere o problema

$$\begin{cases} -u'' + u = t^2 u|u|^{3/2}, t \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \qquad (Q)$$

Antes de começar a resolução, ressaltamos que o problema (Q) não pode ser estudado diretamente por meio dos métodos clássicos de resolução de EDO's que são estudados na graduação (fator integrante, equações separáveis, exatas, etc). Isso também evidencia a força que tem o TPM.

Para resolvermos a equação (Q), isto é, para encontrarmos solução para tal equação, vamos determinar a existência de uma solução fraca que não seja a solução nula. Separaremos os argumentos por itens.

1) Determine a equação que define as soluções fracas de (Q).

Resolução: Uma solução forte (clássica) para (Q) é uma função $\mathrm{u} \in \mathrm{C}^2([0,1], \mathrm{R})$ que satisfaz (Q) pontualmente. Ou seja, a solução forte é duas vezes diferenciável e sua derivada segunda é contínua. No entanto, como discutido anteriormente, pode-se reformular o problema de modo a exigir menos da função u para encontrar a equação que define a solução fraca de (Q). Conforme a definição (1.2), segue as soluções fracas da equação (Q) são as funções $u \in H^1(\Omega)$ que satisfazem

$$\int_{(0,1)} u'\varphi' d\mu + \int_{(0,1)} u\, \varphi d\mu = \int_{(0,1)} t^2 u|u|^{3/2} \varphi d\mu \,, \forall \varphi \in C_0^1(0,1). \qquad (Q')$$

2) Determine o funcional $\mathrm{J}: \mathrm{H}^1(0,1) \to \mathrm{R}$ cujos pontos críticos são exatamente as soluções fracas da equação (Q), ou seja, soluções de (Q').

Resolução: Basta definirmos o funcional $J: H^1(0,1) \to R$ como sendo

$$\mathrm{J}(\mathrm{u}) = \frac{1}{2}\int_{(0,1)} (\mathrm{u}')^2 \mathrm{d}\mu + \frac{1}{2}\int_{(0,1)} \mathrm{u}^2 \mathrm{d}\mu - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} \mathrm{t}^2 |\mathrm{u}|^{7/2} \mathrm{d}\mu.$$

Nesse caso, se $u \in H^1(0,1)$ for um ponto crítico de J, então

$$J'(u)\varphi = \int_{(0,1)} u'\varphi' d\mu + \int_{(0,1)} u\,\varphi d\mu - \int_{(0,1)} t^2 u|u|^{3/2}\varphi d\mu = 0, \forall\varphi \in C_0^1(0,1), \qquad (\mathrm{Q}')$$

que é exatamente equivalente à equação (Q'). Ou seja, pontos críticos do funcional *J* são soluções fracas da equação *(Q)*.

3) Seja $(u_n) \subset H^1(0,1)$ uma sequência (PS) para o funcional *J*. Então, existe uma subsequência de (u_n) limitada em $H^1(0,1)$.

Resolução: Veja os detalhes em (Carvalho, 2021, p. 37).

4) Encontre um número $\gamma >\ 0$ tal que $\mathrm{J(u)} \geq \gamma$ sempre que $|\mathrm{u}|_{\mathrm{H}^1} = \rho$ para algum $\rho >\ 0$.

Resolução: Da definição do funcional *J*, temos

$$\mathrm{J(u)} = \frac{1}{2}|\mathrm{u}|_{\mathrm{H}^1}^2 - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} \mathrm{t}^2|\mathrm{u}|^{7/2}\mathrm{d}\mu.$$

Como $0 > -\mathrm{t}^2 > -1$, então

$$\mathrm{J(u)} \geq \frac{1}{2}|\mathrm{u}|_{\mathrm{H}^1}^2 - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} |\mathrm{u}|^{7/2}\mathrm{d}\mu.$$

Pelas imersões de Sobolev (veja (Brezis, 2010)), obtemos uma constante $A > 0$ tal que

$$\frac{2}{7}\int_{(0,1)} |\mathrm{u}|^{7/2}\mathrm{d}\mu \leq \frac{2}{7}\left(\max_{[0,1]}|\mathrm{u}|\right)^{7/2}\int_{(0,1)} 1\,\mathrm{d}\mu = \frac{2}{7}|\mathrm{u}|_{\mathrm{C}^0}^{7/2}(1-0) \leq \frac{2}{7}\mathrm{A}|\mathrm{u}|_{\mathrm{H}^1}^{7/2}.$$

Portanto,

$$\frac{2}{7}\int_{(0,1)} |\mathrm{u}|^{7/2}\mathrm{d}\mu \leq \frac{2}{7}\mathrm{A}|\mathrm{u}|_{\mathrm{H}^1}^{7/2}.$$

Juntando essas informações, vem que

$$\mathrm{J(u)} \geq \frac{1}{2}|\mathrm{u}|_{\mathrm{H}^1}^2 - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} |\mathrm{u}|^{7/2}\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{2}|\mathrm{u}|_{\mathrm{H}^1}^2 - \frac{2}{7}\mathrm{A}|\mathrm{u}|_{\mathrm{H}^1}^{7/2}.$$

Seja $|\mathrm{u}|_{\mathrm{H}^1} = \rho > 0$. Então,

$$\mathrm{J(u)} \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{7}\mathrm{A}\rho^{7/2}.$$

Note que, para $\rho > 0$, obtemos as seguintes equivalências:

$$\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{7}\mathrm{A}\rho^{7/2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho^2 > \frac{2}{7}\mathrm{A}\rho^{7/2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{2}{7}\mathrm{A}\rho^{3/2} \Leftrightarrow \frac{7}{4\mathrm{A}} > \rho^{3/2} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{4\mathrm{A}}\right)^{2/3} > \rho.$$

Dessa forma, se tomarmos $0 < \rho < \left(\frac{7}{4\mathrm{A}}\right)^{2/3}$ com $|\mathrm{u}|_{\mathrm{H}^1} = \rho$, teremos

$$\mathrm{J(u)} \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{7}\mathrm{A}\rho^{7/2} \coloneqq \gamma > 0,$$

como queríamos mostrar.

5) Seja $u\ \neq 0$ em $\mathrm{H}^1(0,1)$. Vale que $\mathrm{J(su)} \to -\infty$ quando $\mathrm{s}\ \to +\infty$.

Resolução: Veja os detalhes em (Carvalho, 2021).

Agora, para finalizar, vamos colocar o nosso problema nas condições do Teorema do Passo da Montanha. Considere $\mathrm{E} = \mathrm{H}^1(0,1)$. Como dito na Proposição 5, E é um espaço de Banach. Além disso, J é um funcional de classe C^1 (possui derivada e sua derivada é contínua) e $\mathrm{J}(0) = 0$, pois

$$\mathrm{J}(0) = \frac{1}{2}\int_{(0,1)} (0')^2 d\mu + \frac{1}{2}\int_{(0,1)} 0^2 d\mu - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} t^2 |0|^{7/2} d\mu = 0.$$

Dos itens 1) e 2), mostramos que o funcional J está associado à EDO (Q), e do item 3), toda sequência de Palais-Smale para J é uma sequência limitada, o que é suficiente para satisfazer a condição de Palais-Smale. Já no item 4), achamos $\gamma, \rho > 0$ tais que $\mathrm{J}(u) \geq \gamma$ quando $|u|_{H^1} = \rho > 0$. E, por último, dado qualquer $u \neq 0$, o item 5) garante que existe $s > 0$, suficientemente grande, tal que $J(su) < 0$. Assim, para $s > 0$ grande, $su = e \in \mathrm{H}^1(0,1)$ é tal que $e \notin B_\rho(0)$, isto é, $|e|_{H^1} > \rho$. Portanto, estamos dentro das condições do Teorema do Passo da Montanha, que garante que existe um ponto crítico do funcional J que é uma solução fraca para a EDO *(Q)*. Ou seja,

$$\exists u_0 \in \mathrm{H}^1(0,1) \text{ t.q. } \mathrm{J}'(u_0)\varphi = 0 \text{e} \mathrm{J}(u_0) = c = \inf_{\alpha\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \mathrm{J}(\alpha(t)),$$

onde $\Gamma = \{\alpha \in C([0,1], E) | \ \alpha(0) = 0, \alpha(1) = e\}$. Além disso, $u_0 \neq 0$, do contrário, teríamos $c = J(u_0) = J(0) = 0$, o que é absurdo, pois $c \ \geq \gamma \ > \ 0$. Dessa forma, u_0 é uma solução fraca não nula de *(Q)* e c é o nível dessa solução. Isso resolve a equação *(Q)* no sentido fraco, que era nosso objetivo desde o início.

CONCLUSÃO

Procuramos introduzir os métodos variacionais por meio de sua aplicação na resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs), que foi o objetivo principal deste estudo. Para isso, apresentamos conceitos importantes da Análise mais geral a fim de cumprir com o que foi proposto.

Ressalta-se que este trabalho é fruto do PIBIC (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica), da primeira autora e sob orientação do segundo autor, realizado no período de 01 de agosto de 2020 a 31 de julho de 2021. Dessa forma, este artigo é o resultado de um ano de pesquisa, no qual procuramos destacar os pontos principais do estudo com o intuito de responder à nossa problemática: Como resolver equações diferenciais ordinárias utilizando métodos variacionais?

Inicialmente, encontramos um funcional associado a uma EDO e verificamos a existência de pontos críticos. Caso existam, denominamos como solução fraca da EDO em questão. Destaca-se que uma solução fraca coincide com um ponto crítico, o que implica dizer que os métodos variacionais se preocupam em encontrar tais pontos críticos, ou seja, o ponto em que a derivada do funcional é nula. Além disso, por curiosidade, existem EDOs que podem ser resolvidas tanto pelos métodos tradicionais de resolução como pelos variacionais.

O principal resultado do trabalho é o Teorema do Passo da Montanha, que é conhecido como teorema do tipo minimax e utilizado para encontrar pontos críticos. Logo, no caso em que todas as condições do teorema são satisfeitas, a EDO considerada possui solução fraca não trivial. Para transformar a solução fraca em uma solução forte (clássica), é necessário o estudo de outra teoria, o que não é o objetivo deste trabalho.

AGRADECIMENTO

Agradecemos à UFT pelo apoio financeiro, estrutura e ambiente de estudo que foram utilizados para a elaboração desta pesquisa.

Todos os autores declararam não haver qualquer potencial conflito de interesses referente a este artigo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: John Wiley & Sons, 1995.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 614 p., 2010.

CARVALHO, T. Sirqueira. 2021. **Uma Introdução aos Métodos Variacionais.** Disponível em: https://repositorio.uft.edu.br/handle/11612/4706. Acesso em: 04/04/2023.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução (Hygino H. Domingues). 5 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

FLORES, A. P. X. Cálculo variacional: aspectos teóricos e aplicações. Rio Claro, SP. **Dissertação de Mestrado**. Universidade Estadual Paulista – UNESP; 2011.

JABRI, Y. **The Mountain Pass Theorem: variants, generalizations and some applications**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

LIMA, G. L. Cálculo variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos. Campinas, SP. **Dissertação de Mestrado.** Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP; 2004.

SOUSA JÚNIOR, J. R. A. O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona. Rio Claro, SP. **Dissertação de Mestrado**. Universidade Estadual Paulista – UNESP; 2010.

VIRGÍLIO. **Eneida.** Tradução (Manuel Odorico Mendes). São Paulo: Atena Editora, 1956.