DESAFIOS: Revista Interdisciplinar da Universidade Federal do Tocantins – V. 2, Nº Especial, p. 124-136, 2015.
DOI: http://dx.doi.org/10.20873/uft.2359-3652.2015v2nespp124

APLICAÇÃO DO CÁLCULO TENSORIAL EM PROBLEMAS FUNDAMENTAIS DA GRAVITAÇÃO

APPLICATION OF TENSOR CALCULUS IN FUNDAMENTAL PROBLEMS OF GRAVITATION

Paola Terezinha Seidel
Luís Antonio Cabral
Universidade Federal do Tocantins- UFT

RESUMO
Por volta do século XIX vários cientistas compartilhavam a ideia de que a descrição do universo já estava concluída. Entretanto, a teoria da Gravitação de Einstein mostrou que as futuras verdades da Física vão além das casas decimais de verdades já estabelecidas. Num passado não muito distante a teoria de Einstein contrariava o nível imaginativo da maioria dos cientistas, entretanto, hoje está presente até na calibração dos Sistemas de Posicionamento Global (GPS). As ferramentas matemáticas que apoiaram os estudos de Einstein foram os tensores, esses objetos permitiram formular a relação entre geometria e matéria descrita pelo tensor de Einstein. Construindo os tensores que compõe o tensor de Einstein é possível obter a solução do buraco negro tipo Schwarzschild. Sendo assim, é válido o uso do software Maple e do pacote GRTensorII para comparar os resultados analítico e computacional.

Palavras-chave: Tensor de Einstein, Solução de Schwarzschild, Maple.

ABSTRACT
By the nineteenth century various scientists shared the view that the description of the universe was already completed. However, Einstein's Gravitation Theory showed that future truths of physics go beyond the decimal places of already established truths. In a not too distant past Einstein's theory contradicted the imaginative level of most scientists, however, is now present even in the calibration of Global Positioning Systems (GPS). The mathematical tools that supported Einstein’s study were tensors, these objects allowed to settle the relationship between geometry and matter described by Einstein's tensor. Building the tensors that composes Einstein's tensor is possible to obtain the solution for the black hole Schwarzschild type. Therefore, it is valid to use the software Maple and GRTensorII package to compare the analytical and computational results.

Keywords: Einstein's tensor, Schwarzschild's solution, Maple.

Recebido em 07/09/2015. Aceito em 24/09/2015. Publicado em 03/12/2015.

INTRODUÇÃO

A aplicação do cálculo tensorial em problemas fundamentais da gravitação é um tema com relevância tanto tecnológica como intelectual, por englobar a teoria da Gravitação de Einstein. Apesar de notório o caráter matemático do presente artigo, uma breve descrição do cenário no qual está inserido permite uma visualização mais palpável do tema da pesquisa.

Aproveitando o ensejo, é precípuo acentuar que muitas previsões teóricas no campo da ciência, devido às limitações tecnológicas, antecedem as experimentais (exemplo nítido disso é a existência do Bóson de Higgs que resultou no Nobel da Física de 2013). Muitas delas, hoje têm relevância reconhecida, porém de início eram taxadas como sem utilidade ou absurdos, pois ultrapassavam o nível imaginativo do senso comum.

Um grande exemplo do pressuposto é a teoria da Relatividade de Einstein. Isso porque, as conclusões resultantes desta teoria, são mais perceptíveis em escalas de massas astronômicas e velocidades próximas a da luz. Todavia a aplicação desta teoria está presente no nosso dia a dia, o GPS é um bom exemplo. Tal Sistema de Posicionamento Global requer da Relatividade para correção da passagem de tempo, pois nos satélites o tempo passa mais devagar do que na superfície terrestre (Halliday et al., 2007 & Tipler e Mosca, 2011).

A gênese da Relatividade de Einstein ajudou a derrubar a suspeita de que a descrição do universo estava completa. Essa suspeita surgiu graças o sucesso das grandiosas leis formuladas no passado, porém mal sabiam que a Física Clássica já apresentava "fissuras" em seus alicerces. Assim as teorias da Mecânica Quântica e a própria teoria da Relatividade nasceram do intuito de solucionar e entender os enigmas (e.g., por que as Equações de Maxwell não obedeciam ao princípio da Relatividade Newtoniana?) que assombravam a Física Clássica (Morris, 2001; Pires, 2011 & Trefil et al., 2006).

Einstein, reavaliando as ideias acerca do espaço e tempo conseguiu resolver o enigma supracitado (Chaves, 2001; Morris, 2001; Pires, 2011 & Tipler e Mosca, 2006) e com seus dois postulados (Postulado da Relatividade e Postulado da velocidade da luz) mostrou que a Relatividade Newtoniana não estava totalmente correta (Chaves, 2001; Halliday et al., 2007; Tipler e Llewellyn, 2006; Tipler e Mosca, 2006 & Trefil, 2006).

A teoria de Einstein fornece resultados corretos à todas as velocidades possíveis, torna as Equações de Maxwell invariantes, e ainda, previa muitos efeitos estranhos à primeira vista (e.q., contração do espaço, dilatação do tempo e relação entre massa e energia (D'inverno, 1999)). Entretanto, o que vem a ser essa famigerada Relatividade?

A Relatividade é uma área da Física preocupada em estudar a medição correta de eventos, tenta responder quando e onde ocorrem estes eventos e qual a distância que os separa no espaço e no tempo (Halliday et al., 2007 & Tipler e Mosca, 2006). Trata da relação entre os valores medidos em referenciais que estejam se movendo um em relação ao outro. A teoria da Relatividade de Einstein é composta por duas teorias distintas, a Relatividade Restrita e a Relatividade Geral (D'inverno, 1999 & Halliday et al., 2007).

A Relatividade Restrita (RR) atua somente em referenciais inerciais (em repouso ou a velocidade constante, nenhum sistema acelerado é um referencial inercial), já a Relatividade

Geral (RG), ou teoria da Gravitação de Einstein, opera em qualquer referencial, seja acelerado ou não e leva a uma nova formulação dos efeitos gravitacionais.

O presente artigo é pautado na RG, pois esta necessita de análise tensorial para ser compreendida. A teoria da Gravitação de Einstein é uma das principais aplicações do cálculo tensorial (Fleisch, 2012). Graças a evolução do formalismo vetorial essa teoria pode ser desenvolvida, isso porque os tensores são uma generalização dos vetores (Fleisch, 2012).

Resumidamente, tensor é um objeto matemático que apresenta em cada ponto do espaço D elevado a N componentes (D é o número de dimensões do espaço e N é a ordem do tensor, o número de índices que apresenta) (Soares, 2013). Assim, pode-se notar que tais objetos compactam grande número de informações matemáticas, por isso os tensores conferem certo grau didático a teoria da Gravitação de Einstein.

Graças aos tensores, Einstein formulou uma expressão tensorial, nomeada tensor de Einstein, que descreve matematicamente a geometria do espaço-tempo (Soares, 2013). Esse tensor levou a uma nova formulação dos efeitos gravitacionais, e a descoberta da relação existente entre energia e matéria, as responsáveis pela curvatura do espaço-tempo (D’inverno, 1999). As componentes do tensor de Einstein geram um sistema de 16 equações diferenciais não- lineares em cada ponto do espaço.

Conhecendo o comportamento dos principais tensores da Relatividade Geral podemos encontrar soluções para equações diferenciais associadas a alguns tensores, como por exemplo: a solução de buraco negro tipo Schwarzschild. Nesse intuito, para auxiliar no desenvolvimento dos cálculos analíticos contamos com programas computacionais (Maple e GRTensorII), (MAPLESOFT, 2013 & GRTENSOR II, 2013), para possibilitar a comparação dos resultados obtidos.

MATERIAL E MÉTODOS

Sabemos que a teoria da gravitação é descrita em termos de tensores e por serem objetos de estudo da pesquisa é relevante entender a natureza de tais objetos complexos. Todavia, a compreensão da natureza tensorial depende da compreensão da natureza vetorial, pois os objetos vetoriais são subconjunto da grande classe de objetos chamada, tensores (objetos matemáticos de generalização de vetores) (D'inverno, 1999 & Fleisch, 2012).

Devido ao amplo campo de atuação dos vetores há diversas definições de tais objetos. A definição mais comum de vetores é: vetores são uma representação matemática de quantidades que apresentam, basicamente, magnitude (módulo), direção e sentido, tal como velocidade e força. Porém, também, podemos definir vetor como um tensor de primeira ordem, $N = 1$, isso porque os tensores possuem "N" ordens. Um tensor de ordem zero, por exemplo, nada mais é que um objeto escalar, isto é, só possui magnitude (Fleisch, 2012).

Também podemos considerar que um tensor generaliza o conceito e a forma geométrica de matriz. Uma ilustração do pressuposto é considerar um tensor de segunda ordem em um espaço tridimensional, sua representação matricial conteria nove números ($3^2 = 9$), ou seja, uma matriz de três linhas e três colunas (fazendo uso da linguagem da álgebra linear, temos uma matriz com nove entradas).

Ademais, é importante termos em mente que os tensores apresentam características muito importantes para a Relatividade Geral, como por exemplo: a conservação da natureza tensorial quando há mudanças de sistemas de coordenadas de S para S'. Uma forma de notar o pressuposto é tomar como exemplo a grandeza escalar temperatura. A energia cinética das moléculas de um corpo a zero graus Celsius (sistema S) ou a trinta e dois graus Fahrenheit (sistema S') é a mesma, só há mudança de escala (sistema) (Fleisch, 2012).

A característica de transformação dos tensores é uma lei que deve ser respeitada para que o objeto possa ser considerado um tensor. Outro detalhe a ser considerado é que os tensores apresentam componentes covariante (índice inscrito), contravariante (índice super-escrito) e mista (índices inscrito e super-escrito), que podem ser convertidas uma nas outras dentro do mesmo sistema (Fleisch, 2012).

Essa conversão depende de um dos tensores importantes na Relatividade Geral, o tensor métrico. Uma das funções desse tensor é atuar como um operador para levantar ou abaixar índices (Cattani, 1998 & Soares, 2013). O fato é que tensor métrico está por trás dos principais tensores da Relatividade Geral, isso porque, está presente no comportamento da conexão métrica (Símbolo de Christoffel, não é um tensor), que, por sua vez, está presente no comportamento do tensor de Riemann, por exemplo.

O tensor de Riemann é responsável por descrever a curvatura do espaço-tempo tendo esse qualquer número de dimensões (Soares, 2013). Esse objeto tensorial surge graças a uma peculiaridade do operador derivada covariante. Graças a não comutação das derivadas covariantes de um tensor podemos construir o comportamento do tensor de Riemann (D'inverno, 1999 & Fleisch, 2012). Na estrutura desse tensor temos várias conexões métricas associadas. A importância desse tensor está, também, no fato de que ele é responsável pelo surgimento dos objetos: tensor de Ricci e escalar de curvatura.

Esses objetos que surgem do tensor de Riemann aparecem diretamente no comportamento do tensor de Einstein, principal tensor da Relatividade Geral. Eles surgem a

DESAFIOS: Revista Interdisciplinar da Universidade Federal do Tocantins – V. 2, Nº Especial, p. 124-136, 2015.
DOI: http://dx.doi.org/10.20873/uft.2359-3652.2015v2nespp124

partir de contrações específicas dos índices do tensor de Riemann (D'inverno, 1999 & Fleisch, 2012). A contração interna do tensor de Riemann, no índice contravariante e no segundo covariante, com o Delta de Kronecker resulta no tensor de Ricci (Cattani, 1998; D'inverno, 1999 & Fleisch, 2012). Já a contração do tensor de Ricci com o tensor métrico resulta no escalar de curvatura (Cattani, 1998; D'inverno, 1999 & Fleisch, 2012).

Sendo assim, conhecendo o comportamento de cada um desses objetos destacados foi possível desenvolver a solução para o caso mais simples do tensor de Einstein, quando esse objeto está no vácuo, portanto será nulo.

RESULTADO E DISCUSSÃO

Como já mencionado o tensor de Einstein levou a descoberta de que a geometria do espaço-tempo depende do conteúdo de matéria/energia presentes no mesmo. Ademais, podemos expressar o tensor de Einstein de duas formas. Uma forma já foi mencionada, depende do tensor métrico, tensor de Ricci e escalar de curvatura, porém existe outra forma mais compacta para expressá-lo, vide figura (1).

Figura 1: Formatos do tensor de Einstein. (1) depende do tensor de Ricci, tensor métrico e escalar de curvatura. (2) depende da constante de acoplamento e do tensor de Energia- Momento.
Figure 1: Einstein's tensor formats. (1) depends on the Ricci tensor, the metric tensor and scalar curvature. (2) depends on the coupling constant and the tensor of energy-moment.

$$\boxed{\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R && (1) \\ G_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu} && (2) \end{aligned}}$$

A forma expressa pela equação (2) é a mais famosa, pois sintetiza o principal resultado da RG, a relação entre geometria e matéria/energia. Depende apenas da constante de proporcionalidade e do tensor de Energia-Momento (objeto que armazena informações acerca das propriedades físicas da distribuição da matéria (Cattani, 1998 & D'inverno, 1999)). Assim, se o tensor de Einstein é nulo o tensor de Energia-Momento, também, deve ser nulo.

Manipulando a equação (1), que depende de três objetos tensoriais, é possível provar que o tensor de Ricci igual a zero é igual ao tensor de Einstein nulo, vide figura (2).

DESAFIOS: Revista Interdisciplinar da Universidade Federal do Tocantins – V. 2, Nº Especial, p. 124-136, 2015.
DOI: http://dx.doi.org/10.20873/uft.2359-3652.2015v2nespp124

Figura 2: Demonstração analítica comprova que é possível obter o tensor de Einstein igual a zero a partir do tensor de Ricci nulo.

Figure 2: Analytical demonstration proves that it is possible to obtain the Einstein tensor equal to zero from zero Ricci tensor.

$$
\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= 0 = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R && (3)\\
\underbrace{g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}}_{0} &= \underbrace{g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}}_{R} - \frac{1}{2} \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{4} R && (4)\\
0 &= R - 2R && (5)\\
R &= 0 && (6)\\
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \underbrace{R}_{O} && (7)\\
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} = 0 && (8)
\end{aligned}
$$

Sabemos que o tensor de Ricci é um tensor de segunda ordem e em um espaço-tempo com quatro dimensões configura uma matriz 4X4 com dezesseis componentes. Ademais, o tensor de Ricci é a forma reduzida do tensor de Riemann (Soares, 2013). Em outras palavras, podemos afirmar que cada componente do tensor de Ricci é composta por uma soma de componentes específicas do tensor de Riemann. Deste modo para obter o tensor de Ricci é preciso encontrar as componentes não nulas do tensor de Riemann, sendo estas dependentes das componentes do símbolo de Christoffel.

Antes de darmos sequência, façamos uma pergunta, qual métrica do espaço-tempo curvo seria capaz de anular o tensor de Ricci? Apesar do resultado ser conhecido, podemos explorar vários aspectos do formalismo tensorial da Relatividade Geral encontrando, explicitamente, uma das soluções conhecidas, a solução de buraco negro tipo Schwarzschild[1]. Nesse intuito, vamos considerar uma métrica esférica espacial geral, sendo esta composta por duas funções incógnitas que dependem da mesma variável, vide figura (4).

O processo matemático envolvido na atividade de encontrar o tensor de Ricci nulo para satisfazer o tensor de Einstein igual a zero é extenso. O tensor de Riemann evidência o pressuposto, trata-se de um tensor antissimétrico (D'inverno, 1999) de quarta ordem, portanto num espaço quadridimensional apresenta 256 componentes. Sendo assim, o software Maple e o pacote GRTensorII foram ferramentas importantes para o desenvolvimento dessa pesquisa.

1 A solução de Schwarzschild trata de um campo gravitacional assintoticamente plano provocado por uma simetria esférica, estacionária e estática (D'inverno, 1999).

Vale grifar que o leque de funções do Maple é vasto e pode ser explorado com certo grau de facilidade, graças aos tutoriais, por exemplo. O pacote GRTensorII foi utilizado para oportunizar a realização de cálculos tensoriais no Maple. Com esse pacote foi possível, basicamente: (i) inserir a métrica a ser trabalhada; (ii) calcular as componentes do tensor de Riemann; (iii) calcular os símbolos de Christoffel envolvidos e por fim (iiii) encontrar as componentes não nulas do tensor de Ricci.

Com os programas, devidamente, instalados passamos a utilizá-los em favor do fator comparação entre os cálculos analíticos e os computacionais. Na primeira linha de comando do Maple inserimos o comando **restart;** para iniciar as atividades, em seguida **grtw();** para o Maple acionar o pacote GrTensorII.

Na sequência precisávamos acionar a métrica que serviria de base para os cálculos tensoriais. O pacote GRTensorII conta com uma série de métricas prontas para o uso, todavia permite salvar novas métricas no sistema. Sendo assim, incluímos a métrica, em pauta, na pasta “Metrics” do programa e a salvamos. Nesse sentido, o comando usado para o Maple acionar a métrica, em questão, foi o **qload();**, dentro do parênteses escrevemos o nome dado a métrica salva. O software fazia o reconhecimento da métrica e, posteriormente, inserimos o comando para calcular o tensor de Riemann, **grcalc(R(up, dn, dn, dn));**.

Logo em seguida, o Maple mostrava o tempo que fora levado para calcular as 256 componentes do objeto em questão (menos de 1 segundo), a rapidez era um fator comum nos cálculos. A visualização do resultado das componentes do tensor de Riemann é feita com o comando **grdisplay(R(up, dn, dn, dn));**. O processo para calcular o símbolo de Christoffel e o tensor de Ricci foi análogo ao realizado para o tensor de Riemann, porém o comando para o símbolo de Christoffel é **grcalc(Chr2);** e para o tensor de Ricci é **grcalc(R(dn,dn));**.

É nítido que os softwares em destaque, quando bem administrados são ferramentas que otimizam os cálculos e, oportunizam a comparação dos resultados analíticos com os computacionais. Porém é preciso estar atento a alguns detalhes que podem comprometer a interpretação do resultado como, por exemplo, qual a assinatura que o programa está tomando como referência? O comando usado para descobrir qual a assinatura é **grdisplay(sig);**. Detalhes como o ilustrado, por evitar confusões e/ou equívocos no momento das comparações dos resultados, são cruciais para o sucesso dos cálculos.

Obtemos o resultado computacional para os objetos mencionados, entretanto é interessante grifar que a característica antissimétrica do tensor de Riemann, para o caso trabalhado, concede o resultado imediato de 64 componentes desse tensor. Basta igualar os dois últimos índices do objeto, quando isso ocorre todas as componentes que apresentam esse comportamento são anuladas, vide figura (3).

Figura 3: O aspecto antissimétrico do tensor de Riemann leva a um resultado valioso. Igualando os dois últimos índices temos D (dimensão) ao cubo componentes nulas do objeto.
Figure 3: The antissimétrico aspect of the Riemann tensor leads to a valuable result. Equating the last two indices have D (dimension) cubed null object components.

$$\begin{aligned} R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu} &= -R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} && (9) \\ \sigma &= \nu && (10) \\ 2R^{\lambda}_{\mu\nu\nu} &= 0 && (11) \\ R^{\lambda}_{\mu\nu\nu} &= 0 && (12) \end{aligned}$$

Esse resultado é valioso para o cálculo analítico, pois o número de componentes a ser encontrado decai de 256 para 192 componentes. Ademais, os cálculos para determinar as 192 componentes podem ser reduzidos pela metade. Graças a característica antissimétrica do tensor em questão precisávamos calcular apenas 96 componentes específicas.

Deste modo, com a métrica em mãos calculamos os símbolos de Christoffel envolvidos no comportamento do tensor de Riemann. Isso porque, a conexão métrica depende de derivadas parciais do tensor métrico. Vale grifar que as componentes do tensor métrico compõe uma matriz cujas entradas estruturam a métrica tomada como referência, vide figura (4). A métrica adotada é trivial, pois não apresenta elementos fora da diagonal principal do tensor métrico.

Figura 4: A equação (13) ilustra a notação tensorial da métrica, depende do tensor métrico. Já a (14) representa a métrica tomada como base, há duas funções incógnitas, C(r) e D(r) .
Figure 4: Equation (13) shows the metric tensor notation depends on the metric tensor. Since the (14) the metric is taken as the base, there are two unknown functions C(r) and D(r).

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} && (13) \\ ds^2 &= C(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sen^2\theta d\phi^2 - D(r)dt^2 && (14) \end{aligned}$$

Considerando o caráter simétrico do Símbolo de Christoffel e o caráter antissimétrico do tensor de Riemann (D'inverno, 1999), obtemos, respectivamente: nove conexões métricas não nulas e doze componentes não nulas, vide figura (5), para o tensor de Riemann. O resultado foi compatível ao observado computacionalmente.

Figura 5: Resultado das componentes não nulas do tensor de Riemann com base na métrica do espaço tempo adotada. Os números de 1 a 4 representam as coordenadas do espaço-tempo presentes na métrica.

Figure 5: Results of non-zero components of the Riemann tensor based on the metric of space-time adopted. The numbers 1 to 4 represent the coordinates of space-time present in the metric.

$$R^1_{212} = \frac{r\partial_r C(r)}{2C(r)^2} \qquad R^2_{112} = -\frac{\partial_r C(r)}{2rC(r)} \tag{15}$$

$$R^1_{313} = \frac{rsen^2\theta\partial_r C(r)}{2C(r)^2} \qquad R^3_{113} = -\frac{\partial_r C(r)}{2rC(r)} \tag{16}$$

$$R^2_{323} = \frac{sen^2\theta\,(C(r)-1)}{C(r)} \qquad R^3_{223} = -\frac{C(r)-1}{C(r)} \tag{17}$$

$$R^2_{424} = -\frac{\partial_r D(r)}{2rC(r)} \qquad R^4_{224} = \frac{r\partial_r D(r)}{2D(r)C(r)} \tag{18}$$

$$R^3_{434} = -\frac{\partial_r D(r)}{2rC(r)} \qquad R^4_{334} = \frac{rsen^2\theta\,(\partial_r D(r))}{2C(r)D(r)} \tag{19}$$

$$R^1_{414} = \frac{-2C(r)D(r)\partial^2 rD(r) + D(r)\partial_r C(r)\partial_r D(r) + C(r)\left(\partial_r D(r)\right)^2}{4D(r)C(r)^2} \tag{20}$$

$$R^4_{114} = \frac{C(r)\left(\partial_r D(r)\right)^2 - 2C(r)D(r)\partial^2 rD(r) + D(r)\partial_r C(r)\partial_r D(r)}{-4C(r)D(r)^2}. \tag{21}$$

Nesse sentido, conhecendo as componentes não nulas do tensor de Riemann, observamos que das 16 componentes do tensor de Ricci, apenas quatro (as componentes da diagonal principal) não foram anuladas de imediato, vide figura (6). Sendo este resultado compatível ao conhecido para as componentes do tensor de Ricci (D'inverno, 1999).

Figura 6: Componentes não nulas do tensor de Ricci, basta substituir as componentes do tensor de Riemann (considere o caráter antissimétrico).

Figure 6: Non-zero components of the Ricci tensor, just replace the Riemann tensor components (consider the antisymmetric character).

$$R_{11} = \overbrace{R^1_{111}}^{0} + R^2_{121} + R^3_{131} + R^4_{141} = 2\left(R^2_{121}\right) + R^4_{141}, \tag{22}$$

$$R_{22} = R^1_{212} + \overbrace{R^2_{222}}^{0} + R^3_{232} + R^4_{242}, \tag{23}$$

$$R_{33} = R^1_{313} + R^2_{323} + \overbrace{R^3_{333}}^{0} + R^4_{343}, \tag{24}$$

$$R_{44} = R^1_{414} + R^2_{424} + R^3_{434} + \overbrace{R^4_{444}}^{0} = R^1_{414} + 2\left(R^2_{424}\right). \tag{25}$$

Ademais, notamos que três destas componentes não nulas são independentes. Sendo assim, teríamos que solucionar um sistema de três equações diferenciais não lineares para encontrar as funções incógnitas que satisfazem à condição do tensor de Ricci igual a zero.

Outra consideração será feita, entretanto faz-se precípuo elucidar um pouco acerca das equações diferenciais. Isso porque, em gêneses as componentes do tensor de Ricci são equações diferenciais parciais (EDP), entretanto foram simplificadas para facilitar os cálculos e resultaram em equações diferenciais ordinárias (EDO).

Quanto a classificação das equações diferenciais temos duas subdivisões: EDO e EDP. As EDOs são aquelas que a função incógnita depende de apenas uma variável independente e nas EDPs a função incógnita depende de duas ou mais variáveis independentes (Bronson e Costa, 2008). Ademais, as equações diferenciais podem admitir soluções.

Uma solução conhecida para o caso do tensor de Ricci nulo em um espaço curvo, que leva o tensor de Einstein a zero, é compatível a métrica de Schwarzschild em coordenadas curvelíneas. Em todo caso, esta não é a única solução conhecida, visto que é sabido da existência de outras soluções particulares que não apresentam a mesma forma da solução de Schwarzschild (e.g, solução de Kerr (D'inverno, 1999)).

Retomando os cálculos verificamos que a forma mais eficaz para encontrar as funções incógnitas é a partir da forma mista do tensor de Einstein igual a zero. Ademais realizamos uma mudança de variável nas funções incógnitas, transformando-as num formato exponencial (*C(r)* igual a exponencial de *A(r)* e *D(r)* igual a exponencial de *B(r)*) para simplificar as equações e torná-las compatíveis ao limite da métrica de Minkowski (Cattani, 1998).

Apesar de obtermos 4 componentes não nulas para o tensor de Einstein misto, considerando a contração da identidade de Bianchi (D’inverno, 1999) o sistema resultante é reduzido para apenas duas equações diferenciais não lineares independentes, vide figura (7).

Figura 7: Resultado final do tensor de Einstein misto.
Figure 7: Final result of the mixed Einstein tensor.

$$G_\mu^\lambda = g^{\nu\lambda}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) \qquad (26)$$

$$G_1^1 = -\frac{\left(e^{A(r)} - 1 - r\partial_r B(r)\right)}{e^{A(r)}r^2} = 0 \qquad (27)$$

$$G_4^4 = -\frac{r\partial_r A(r) + e^{A(r)} - 1}{r^2 e^{A(r)}} = 0 \qquad (28)$$

Portanto, o processo analítico para obtenção das funções incógnitas é mais simples do que a partir do tensor de Ricci igual a zero. Pois o último objeto apresentava três equações diferenciais não lineares independentes.

Manipulando, as duas equações diferenciais (eq.(27) e eq.(28)) encontramos a expressão para as funções incógnitas *C(r)* e *D(r)* da métrica, eq.(14), vide figura (8).

Figura 8: Resultado das funções incógnitas da métrica, sendo **k** uma constante.
Figure 8: Results of unknowns functions of the metric, **k** being a constant.

$$C(r) = e^{A(r)} = \frac{1}{1+\frac{\mathbf{k}}{r}} \qquad (29)$$

$$D(r) = e^{B(r)} = 1 + \frac{\mathbf{k}}{r} \qquad (30)$$

O resultado para as funções incógnitas ainda pode ser melhorado. A constante ***k***, presente em ambas funções, pode ser definida considerando o limite Newtoniano (campos gravitacionais pouco intensos e velocidades baixas (D'inverno, 1999)). De acordo com esse limite temos um comportamento conhecido para uma componente do tensor métrico (D'inverno, 1999).

Essa componente depende do potencial de um ponto de massa e ao compará-la, eq.(31), com a nossa correspondente, eq.(32), é possível notar certa simetria, vide figura (9). Entretanto, é possível aprimorar o resultado, pois o potencial de um ponto de massa é conhecido (D'inverno, 1999).

Figura 9: Comparando a equação (31) com a (32) e substituindo a equação (33) em (31) obtemos a equação (34).
Figure 9: Comparing the equation (31) to (32) and substituting equation (33) into (31) we obtain the equation (34).

$$\begin{aligned} g_{44} &\cong 1 + \frac{2\phi}{c^2} && (31) \\ g_{44}* &= D(r) = 1 + \frac{\mathbf{k}}{r} && (32) \\ \phi &= -\frac{GM}{r} && (33) \\ g_{44}* &\Rightarrow 1 - \frac{2GM}{c^2 r} && (34) \end{aligned}$$

Sendo assim, com as funções incógnitas aprimoradas devido a presença da constante **k**, obtemos a famigerada métrica que soluciona o tensor de Einstein igual a zero, métrica de Schwarzschild (D'inverno, 1999), vide figura (10).

Figura 10: Substituindo o resultado para as funções incógnitas na métrica geral obtemos a métrica de Schwarzschild, solução conhecida para o caso do tensor de Einstein nulo.
Figura 10: Replacing the result for the unknown functions in the general metric we obtain the Schwarzschild metric, known solution for the case of zero Einstein's tensor.

$$ds^2 = \left(\frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2 r}}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 \qquad (35)$$

Na sequência, é relevante grifar que o resultado da constante **k** permite descrever o comportamento dado para o raio de Schwarzschild (D'inverno, 1999). O comportamento desse raio está ligado a uma grande coincidência matemática entre teoria clássica e a teoria relatividade. Visto que é possível encontrar o comportamento do raio de Schwarzschild considerando apenas a velocidade de escape como sendo a velocidade da luz. Entretanto é apenas uma coincidência, pois seu surgimento é explicado a partir de princípios relativísticos.

O raio de Schwarzschild é, basicamente, uma região limite de escape em um dado campo gravitacional. Em outras palavras, significa que quando uma dada massa for comprimida a ponto de possuir um raio inferior ao raio de Schwarzschild nem a luz será capaz de escapar do campo gravitacional gerado por essa massa. Portanto, teremos uma singularidade conhecida por buraco negro.

Há outra curiosidade indiretamente ligada a constante **k**, ela depende da constante de gravitação universal, **G**. Essa constante, **G**, está presente na gravitação newtoniana e, também, compõe a constante de acoplamento presente no tensor de Einstein. Sendo assim, podemos notar que o resultado mais importante da Relatividade Geral, a relação entre geometria e matéria/energia, depende dessa constante de Newton. Outro detalhe é que com a dependência dessa constante os resultados da Relatividade de Einstein podem retornar aos da gravitação de Newton. Portanto, de certa forma é possível comprovar que Einstein conseguiu generalizar a relatividade Newton.

Por fim em termos de comprovação, vale acentuar que a teoria da Gravitação de Einstein é uma das poucas teorias com fundamento experimental bem estabelecido (D'inverno, 1999). Vale acentuar que essa teoria centenária tem prestado contribuição tanto tecnológica como intelectual, sem mencionar o fato de apresentar validação experimental dos “testes clássicos”. Sendo eles a precessão do periélio de Mercúrio, a deflexão da luz, o desvio gravitacional para o vermelho e o atraso de um sinal de luz num campo gravitacional que leva a uma eventual detecção de buracos negros e ondas gravitacionais (D'inverno, 1999).

CONCLUSÕES

Concluímos com esta pesquisa que os tensores foram ferramentas essenciais para Albert Einstein estruturar seu estudo acerca do espaço-tempo e então formular a Relatividade Geral. A partir dessa formulação, Einstein criou uma equação tensorial constituída pelo tensor de Einstein, que permite descrever a geometria do espaço-tempo e relacioná-la com matéria/energia. Na estrutura desse tensor observamos a presença de outros objetos tensoriais, sendo o tensor de Riemann o principal objeto tensorial da estrutura, pois gera os objetos: tensor de Ricci e o Escalar de Curvatura. Construímos alguns dos principais objetos tensoriais envolvidos e confirmamos o caráter compacto que a notação tensorial possui. Notamos a relevância do uso de softwares como o Maple, em conjunto ao GRTensorII, para auxiliar no processo de descompactação dos tensores, principalmente, por favorecerem o fator de comparação entre o resultado analítico e computacional. Observamos que o resultado nulo do tensor de Einstein pode ser obtido a partir do anulamento do tensor de Ricci e tomando uma métrica geral como referência construímos o sistema de equações diferenciais não-lineares resultante do tensor de Einstein nulo. Deste modo, depreendemos que existem várias soluções para este sistema e por fim encontramos, explicitamente, a solução mais famosa para o caso do tensor de Einstein no vácuo, a solução de buraco negro tipo Schwarzschild. Esta solução, apesar de bem conhecida na literatura, permiti explorar os aspectos matemáticos fundamentais aplicados na Relatividade Geral.

REFERÊNCIAS

BRONSON, R; COSTA, G. 2008. *Equações diferenciais*. 3ª ed., Porto Alegre, Bookman, 400 p.

CATTANI, M. 1998. Dedução das Equações da Teoria de Gravitação de Einstein em um Curso de Graduação. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v.20, n.1, p.27-37, mar. 1998.

CHAVES, A. 2001. *Física, v.3: ondas, relatividade e física quântica*. Rio de Janeiro, Reichmann Affonso, 127 p.

D'INVERNO, R. 1999. *Introducing Einstein's relativity*. United States Oxford University Press, New York, 383 p.

FLEISCH, D. 2012. *A Students Guide to Vectors and Tensors*. United States of America, Cambridge University Press, New York, 197 p.

HALLIDAY, D; RESNICK, R; WALKER, J. 2007. *Fundamentos de Física, v.4: óptica e física moderna.* 7ª ed., Rio de Janeiro, LTC, 406 p.
MORRIS, R. 2001. *O que sabemos sobre o Universo: realidade e imaginação científica.* Rio de Janeiro, Jorge Zahar, 222 p.
PIRES, A. 2011. *Evolução das ideias da física.* 2ª ed., São Paulo, Editora livraria da Física, 478 p.
SOARES, D. 2013. Os fundamentos físico-matemáticos da cosmologia relativística. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v.35, n.3, 3302, set.
TIPLER, P; LLEWWLLYN, R. 2006. *Física moderna.* 3ª ed., Rio de Janeiro, LTC, 515 p.
TIPLER, P; MOSCA. 2006. *Física, v.3: física moderna: mecânica quântica, relatividade e a estrutura da matéria.* 5ª ed., Rio de Janeiro, LTC, 285 p.
TREFIL, J; HAZEN, R. 2006. *Física viva, v.3: uma introdução à física conceitual*. Rio de Janeiro, LTC, 222 p.
MAPLESOFT. Disponível em: http://www.maplesoft.com/products/maple/. Acesso em: 10/08/2013.
GRTENSOR II. Disponível em: http://grtensor.phy.queensu.ca/. Acesso em: 10/08/2013.

Paola Terezinha Seidel
Acadêmica do 7º período do curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal do Tocantins – campus Araguaína. Atualmente é bolsista PIBIC – CNPq.
E-mail: paola.seidel@gmail.com
Endereço: Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal do Tocantins - Centro de Ciências Integradas, Av. Paraguai, s/n – esquina com Rua Uxiramas, Setor Cimba – Araguaína (TO). CEP: 77.824-838

Luís Antonio Cabral
Possui graduação em Física pela Universidade de São Paulo e doutorado em Física pela Universidade de São Paulo. Atualmente é professor adjunto do curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal do Tocantins – campus Araguaína.
E-mail: cabraluft@gmail.com
Endereço: Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal do Tocantins - Centro de Ciências Integradas, Av. Paraguai, s/n – esquina com Rua Uxiramas, Setor Cimba – Araguaína (TO). CEP: 77.824-838