ReTMAT
REVISTA TOCANTINENSE DE MATEMÁTICA

Revista Tocantinense de Matematica
e-ISSN: 3086-7371
Vol. 1, n. 1, 2026, p. 1–21
DOI: 10.20873/retmat.uft.v1n1.2026.23628
Recebido: 23 de setembro de 2026
Aceito: 05 de novembro de 2026

Sobre o ensino de alguns números irracionais

Gustavo S. Araújo[1,*], Cícero A. da Silva Filho[2], Jefferson B. de Lima[3], Aldo T. Lourêdo[4]

Resumo

Este artigo apresenta, de forma didática, os valores irracionais de funções trigonométricas gerados a partir de argumentos não notáveis, ou seja, ângulos que raramente aparecem nos livros didáticos do ensino básico. Diferenciando-se das abordagens tradicionais baseadas na geometria plana, a proposta utiliza números complexos e a representação do $\cos\theta$ e a partir dele, obtemos infinitos números trigonométricos irracionais. Para enriquecer a visualização geométrica desses conceitos e facilitar a compreensão, integramos ilustrações dinâmicas desenvolvidas nos softwares GeoGebra e Manim (via Python). Como contribuição prática, o trabalho oferece uma proposta de uma sequência didática, ideal para ser aplicada por professores e explorada por estudantes em sala de aula.

Palavras-chave: Números irracionais; Funções trigonométricas; Manim; GeoGebra.

MSC 2020:

Abstract

This article presents, in a didactic manner, irrational values of trigonometric functions obtained at angles other than the usual special angles, that is, angles that rarely appear in school textbooks. Unlike traditional approaches based on plane geometry, the proposed approach uses complex numbers and a representation of $\cos\theta$, from which we obtain infinitely many irrational trigonometric numbers. To enrich the geometric visualization of these concepts and facilitate understanding, we incorporate dynamic illustrations developed using GeoGebra and Manim (via Python). As a practical contribution, the paper proposes a teaching sequence, ideal for teachers to implement and for students to explore in the classroom.

Keywords: Irrational numbers; Trigonometric functions; Manim; GeoGebra.

Sumário

1 Introdução 2

2 Abordagem histórica 2

* Autor correspondente
[1] DM - UEPB, Campina Grande - PB - Brasil; gustavoaraujo@servidor.uepb.edu.br
[2] DCEX- UESC, Ilhéus - BA - Brasil; cicero@uesc.br
[3] ICEA – UFOP, João Monlevade – MG – Brasil; jefferson.bl@aluno.ufop.edu.br
[4] DM - UEPB, Campina Grande - PB - Brasil; aldo@servidor.uepb.edu.com.br

3 Resultados preliminares **5**

4 Resultados principais **6**

5 Proposta de uma sequência didática **14**

6 Considerações finais **20**

1 Introdução

O estudo de valores irracionais das funções trigonométricas permite relacionar propriedades dos números reais a problemas de geometria e ampliar os exemplos discutidos no Ensino Médio. Com esse propósito, partimos de propriedades das raízes complexas da equação $z^n = 1$, com $n \geq 2$ inteiro e $z \in \mathbb{C}$, para obter expressões exatas de seno e cosseno e, a partir delas, construir famílias infinitas de irracionais por transformações com coeficientes racionais; esse percurso retoma resultados sobre números racionais e irracionais tratados por Niven [18, 19], de Figueiredo [9], de Morais Filho e Lourêdo [16] e Lima *et al.* [15].

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [3], os números irracionais integram a unidade temática Números do Ensino Fundamental, com atenção à incomensurabilidade e à localização aproximada na reta real, conhecimentos que podem ser retomados no Ensino Médio em situações geométricas e trigonométricas. A proposta desenvolvida neste artigo retoma essas ideias e amplia a discussão por meio de construções geométricas e de situações envolvendo funções trigonométricas, buscando aproximar diferentes formas de representar e compreender esses números.

Nesse contexto, o GeoGebra [12] e o Manim [10] contribuem de forma complementar. O GeoGebra é utilizado nas construções geométricas e na exploração das relações entre os elementos das figuras, enquanto as animações em Manim auxiliam na visualização dos resultados e das transformações discutidas no texto. Esses recursos integram a sequência didática apresentada ao final do artigo e são utilizados como apoio à compreensão dos conceitos e à organização das ideias matemáticas desenvolvidas ao longo do trabalho.

Após esta introdução, apresentamos uma abordagem histórica da Seção 2, reunimos na Seção 3 os resultados preliminares utilizados nas demonstrações da Seção 4, onde também são apresentadas as construções e a animação associada à Observação 4.3. A Seção 5 organiza esses elementos em uma proposta de sequência didática, seguida das considerações finais na Seção 6.

2 Abordagem histórica

Nesta seção, realizaremos uma revisão histórica sobre os números irracionais e os números irracionais trigonométricos. Para uma análise mais abrangente e detalhada desses conceitos, recomendamos a leitura das referências bibliográficas [2, 20].

A noção de números irracionais remonta à antiga Grécia, período em que foram desenvolvidos importantes conceitos e resultados que contribuíram para a consolidação da matemática como ciência. Os primeiros conflitos surgiram quando os gregos descobriram que nem todas as medidas podiam ser expressas como razões de números inteiros. A descoberta mais famosa foi a de que a raiz quadrada de 2 não pode ser expressa como uma razão entre dois números inteiros, fato que foi provado por Hípaso de Metaponto, um discípulo de Pitágoras. Modernamente, denominamos esse tipo de número de irracional. A revelação de que existiam números que não podiam ser expressos como uma fração inteira trouxe um desafio para a visão pitagórica do

mundo, que acreditava que todos os aspectos do universo podiam ser explicados por números inteiros e suas razões.

Os polígonos regulares têm despertado fascínio entre os estudiosos da geometria desde os primórdios da ciência (ver, por exemplo, [6]). Os babilônios já haviam compreendido o triângulo equilátero e o quadrado. Os gregos, por sua vez, direcionaram sua atenção ao pentágono regular, um polígono com cinco vértices. Ao desenharmos todas as diagonais de um pentágono regular, obtemos uma estrela, como ilustrado na Figura 1.

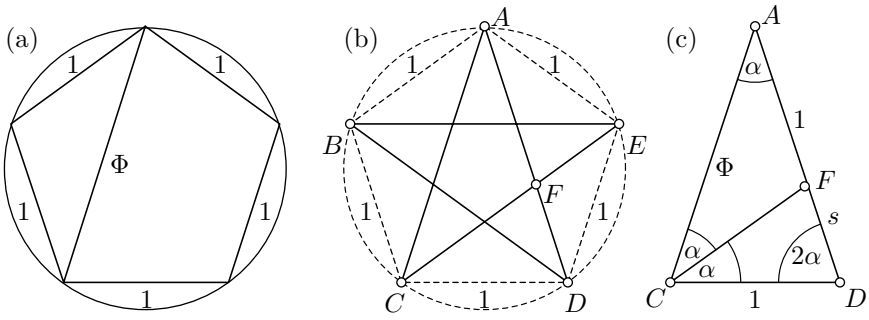
Figura 1: Estrela obtida pelas diagonais de um pentágono regular.



Fonte: [20].

Esta estrela era para os pitagóricos um símbolo de reconhecimento entre os membros, tradição que perdura até hoje em movimentos revolucionários. Em [20], é apresentada uma construção para determinar o comprimento, digamos Φ, da diagonal de um pentágono regular de lado 1 (veja a Figura 2).

Figura 2: Pentágono regular de lado unitário e segmentos associados à sua diagonal.



Fonte: Esquema baseado em Ostermann e Wanner [20].

A construção da Figura 2 permite obter $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e $s = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (ver [14, 20]). A demonstração geométrica desse resultado é apresentada em uma animação complementar, que pode ser acessada escaneando ou clicando no QR code da Figura 3.

Figura 3: QR Code para a animação do pentágono regular.



Fonte: Elaborado pelos autores.

> "Tudo é número", afirmou Pitágoras, que aparentemente tinha em mente apenas números racionais. No entanto, logo se descobriu que $\sqrt{2}$ e ϕ não são racionais... O fato de o pentágono regular, considerado sagrado pelos pitagóricos, ter uma diagonal não mensurável foi um verdadeiro choque. Uma lenda diz que Hípaso, tendo descoberto esse fato e falado demais, se afogou no mar. Essa descoberta também foi um grande transtorno para a teoria... Isso complicou consideravelmente os Elementos de Euclides... O número ϕ é chamado de proporção áurea. O fato de muitos belos edifícios antigos, em particular o Partenon na Acrópole, se encaixarem tão perfeitamente em um "retângulo dourado" (um retângulo com lados de comprimento 1 e ϕ) levou à notação ϕ em homenagem a seu arquiteto (OSTERMANN, A.; WANNER, G. [20]).

A aceitação dos números irracionais também encontrou desafios em outras civilizações. No mundo islâmico medieval, a matemática avançou consideravelmente, mas a ideia de números irracionais foi inicialmente rejeitada por alguns estudiosos islâmicos. Foi apenas no século IX que o matemático persa Al-Khwarizmi (ver [5]) reconheceu a existência dos números irracionais e os incorporou em suas obras.

A abordagem dos números irracionais trigonométricos teve um desenvolvimento separado. A trigonometria se originou na antiga civilização grega, onde o estudo dos triângulos e dos círculos levou à descoberta de relações trigonométricas fundamentais. No entanto, ao calcular certos valores trigonométricos, os gregos encontraram resultados que não podiam ser expressos como frações. Por exemplo, a medida dos ângulos em radianos mostrou-se frequentemente irracional.

Os números irracionais trigonométricos foram amplamente estudados pelos matemáticos indianos e islâmicos medievais. A obra do matemático indiano Aryabhata (ver [5]), no século V, envolveu a utilização de senos e cossenos de ângulos irracionais. Posteriormente (ver [1]), Al-Biruni, matemático, astrônomo, historiador e polímata persa, que viveu entre os séculos X e XI, explorou amplamente os números irracionais e sua aplicação na trigonometria. Al-Biruni investigou a relação entre ângulos e cordas em círculos, expandindo os conhecimentos matemáticos existentes da época. Ele reconheceu que muitos valores de cordas correspondiam a números irracionais e investigou os métodos para calcular esses valores com precisão. Além disso, ele desenvolveu técnicas trigonométricas para a medição de ângulos e a determinação de distâncias astronômicas.

Os números irracionais são uma categoria importante na teoria dos números e desempenham um papel fundamental na matemática. São números que não podem ser expressos como uma fração simples (razão de dois inteiros) e não têm uma representação decimal periódica. Nesta categoria, destacam-se os números irracionais trigonométricos, que estão relacionados com as funções trigonométricas e aparecem em diversas áreas da matemática e física (ver [7, 13] e [19]).

3 Resultados preliminares

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos os resultados auxiliares que serão usados no decorrer do artigo. ara uma abordagem complementar dos números reais e de propriedades elementares da teoria dos números, recomendamos as referências [8, 21] ou [22].

Lema 3.1. *Se p é um primo tal que $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.*

Lema 3.2. *Sejam $a, p \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ e p um número primo. Então, a é divisível por p se, e somente se, a^2 é divisível por p.*

Demonstração. Notemos inicialmente que para qualquer inteiro n, pelo Algoritmo de Euclides, $n = pq + r$, em que $p, q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$. Logo, se o inteiro n for divisível por p, ele é da forma $n = pq$, com $q \in \mathbb{Z}$.
($\Rightarrow$) Suponhamos que a é divisível por p. Então, $a = pn$, com $n \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$a^2 = (pn)^2 = p^2n^2 = p(pn^2) = pk, \quad \text{com } k = pn^2 \in \mathbb{Z}.$$

($\Leftarrow$) Segue diretamente do Lema 3.1. □

A distinção entre números racionais e irracionais, bem como algumas de suas caracterizações, é discutida em [4]. A seguir, apresentamos uma demonstração clássica da irracionalidade da raiz quadrada de um número primo.

Lema 3.3. *Se p é um número primo, então $\sqrt{p}$ é um número irracional.*

Demonstração. Suponhamos que $\sqrt{p}$ é um número racional, isto é, $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$. Assim, obtemos que $p = \frac{a^2}{b^2}$, o que implica que $a^2 = pb^2$ e, pelo Lema 3.2, resulta que a é divisível por p. Logo, $a = pn$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Como $a^2 = pb^2$, temos que $(pn)^2 = pb^2$, o que implica que $b^2 = pk$, com $k = n^2$. Novamente pelo Lema 3.2, obtemos que b é divisível por p. Como p divide a e b, obtemos que $\text{mdc}(a, b) \geq p$, o que contraria o fato do $\text{mdc}(a, b) = 1$. Portanto, $\sqrt{p}$ é um número irracional. □

Dados dois conjuntos A e B, a diferença $A - B$ é definida por

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Assim, no que segue, o conjunto dos números irracionais será denotado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Lema 3.4. *Sejam $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}$ e $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Então, $\alpha + \beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $\alpha\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.*

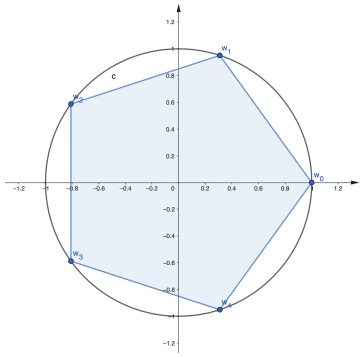
Demonstração. Suponhamos que $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}$ ou $\alpha\beta \in \mathbb{Q}$, isto é, que existem $x, y \in \mathbb{Q}$ tais que $\alpha + \beta = x \in \mathbb{Q}$ ou $\alpha\beta = y \in \mathbb{Q}$. Assim, $\beta = x - \alpha \in \mathbb{Q}$ ou $\beta = \frac{y}{\alpha} \in \mathbb{Q}$, o que é um absurdo, pois $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset$. □

O resultado abaixo será de extrema importância para obtermos os resultados principais desse trabalho. Antes, lembremos que um número complexo w é denominado uma raiz n-ésima da unidade se $w^n = 1$, para algum inteiro positivo n. As raízes n-ésimas da unidade são dadas por

$$w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Geometricamente, essas raízes correspondem a n pontos igualmente espaçados sobre a circunferência unitária do plano complexo, formando os vértices de um polígono regular de n lados, para $n \geq 3$. Por exemplo, as soluções da equação $z^5 = 1$ são representadas pelos vértices de um pentágono regular inscrito na circunferência unitária, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4: As cinco raízes quintas da unidade, com $w_0 = 1$, formando um pentágono regular.



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra.

Lema 3.5. *Seja $w \in \mathbb{C}$, com $w \neq 1$ uma raiz da equação $w^n = 1$. Então,*

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0.$$

Demonstração. Seja

$$S = 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1}. \tag{1}$$

Multiplicando ambos os membros de (1) por w, obtemos que

$$wS = w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} + w^n, \tag{2}$$

Subtraindo (2) de (1), obtemos que

$$S(1 - w) = 1 - w^n.$$

Como $w \neq 1$ e $w^n = 1$, segue que $S = 0$, como queríamos demonstrar. □

Outro resultado de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho é a Fórmula de De Moivre para potências, que enunciamos a seguir.

Lema 3.6 (Fórmula de De Moivre para potências)**.** *Seja $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ um número complexo não nulo, em que $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}$, tem-se*

$$z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)\big).$$

4 Resultados principais

Nesta seção apresentaremos e demonstraremos os principais resultados deste trabalho. Antes disso, recordemos que a cada número complexo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ podemos associar um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e, reciprocamente, a cada ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ podemos associar um número complexo $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

Essa correspondência é justificada pelo fato de que os espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ são isomorfos. Mais precisamente, considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (a,b) & \longmapsto & a + bi. \end{array}$$

É imediato verificar que T é uma transformação linear bijetora. Portanto, concluímos que os espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ são isomorfos.

Proposição 4.1. *Para $\theta = \frac{2\pi}{5}$, temos*

$$\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \tag{3}$$
$$\cos 2\theta,\ \operatorname{sen} 2\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \tag{4}$$
$$\cos\frac{\theta}{2},\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \tag{5}$$

Além disso,

$$\cos\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad e \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \tag{6}$$
$$\cos 2\theta = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad e \quad \operatorname{sen} 2\theta = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \tag{7}$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} \quad e \quad \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}. \tag{8}$$

Demonstração. Dividiremos a prova em três itens: **(I)** θ, **(II)** $\frac{\theta}{2}$ e **(III)** 2θ.
(I) Aplicando o Lema 3.5, com $n = 5$, obtemos que as raízes da equação $z^5 = 1$, são $1, z, z^2, z^3, z^4$, com

$$z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$$

e

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0. \tag{9}$$

Como $z \neq 0$, dividindo ambos os membros da equação (9) por z^2, reagrupando os termos, obtemos

$$\left(\frac{1}{z^2} + z^2\right) + \left(\frac{1}{z} + z\right) + 1 = 0. \tag{10}$$

Note que

$$\left(\frac{1}{z} + z\right)^2 = \frac{1}{z^2} + 2\frac{1}{z}z + z^2 = \frac{1}{z^2} + z^2 + 2$$

e, portanto,

$$\frac{1}{z^2} + z^2 = \left(\frac{1}{z} + z\right)^2 - 2.$$

Substituindo a igualdade acima em (10), obtemos

$$\left(\frac{1}{z} + z\right)^2 + \left(\frac{1}{z} + z\right) - 1 = 0. \tag{11}$$

Pela Fórmula de De Moivre para potências (Lema 3.6), temos que

$$\frac{1}{z} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}.$$

Utilizando este fato, segue que

$$\left(\frac{1}{z} + z\right)^2 = \left[\left(\cos\frac{2\pi}{5} - i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}\right) + \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}\right)\right]^2 = \left(2\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 = 4\cos^2\frac{2\pi}{5} \tag{12}$$

e

$$\frac{1}{z} + z = \left[\left(\cos\frac{2\pi}{5} - i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}\right) + \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}\right)\right] = 2\cos\frac{2\pi}{5}. \tag{13}$$

Substituindo (12) e (13) em (11), obtemos

$$4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0.$$

Seja $x=\cos\frac{2\pi}{5}$. Então x satisfaz a equação quadrática

$$4x^2+2x-1=0.$$

As soluções dessa equação são dadas por

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

Em particular, concluímos que

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

pois $\cos\frac{2\pi}{5}>0$, o que mostra $(6)_1$. Além disso, como, pelo Lema 3.3, $\sqrt{5}$ é um número irracional, podemos concluir, pelo Lema 3.4, que $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ é um número irracional, provando assim $(3)_1$.

No que segue, vamos mostrar que $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ e

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

De fato, pela relação fundamental da trigonometria, obtemos

$$\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{5}=1-\cos^2\frac{2\pi}{5}=1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=1-\left(\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}\right)=\frac{10+2\sqrt{5}}{16},$$

o que implica que

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

uma vez que $\frac{2\pi}{5}$ pertence ao primeiro quadrante, e isso prova $(6)_2$.

Suponhamos agora que $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}\in\mathbb{Q}$. Assim, $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}=\frac{a}{b}$, com $a,b\in\mathbb{Z}$ e $b\neq 0$, ou seja,

$$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=\frac{a}{b}.$$

Portanto,

$$\frac{10+2\sqrt{5}}{16}=\frac{a^2}{b^2},$$

do qual decorre que

$$\sqrt{5}=\frac{16a^2-10b^2}{2b^2}.$$

Como $16a^2-10b^2, 2b^2\in\mathbb{Q}$, segue que $\frac{16a^2-10b^2}{2b^2}\in\mathbb{Q}$, o que é um absurdo, pois, pelo Lema 3.3, $\sqrt{5}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Portanto, $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, o que mostra $(3)_2$.

(II) Agora vamos calcular $\cos\frac{\pi}{5}$. Para ângulos no primeiro quadrante, vale a identidade

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}.$$

Tomando $\theta = \frac{2\pi}{5}$, obtemos

$$\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}.$$

Isso prova a igualdade $(8)_1$.

Mostremos que $\cos\frac{\pi}{5}$ é irracional. Suponhamos, por absurdo, que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Assim,

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{a}{b}$$

e, portanto,

$$\frac{3+\sqrt{5}}{8} = \frac{a^2}{b^2},$$

donde concluímos que

$$\sqrt{5} = \frac{8a^2 - 3b^2}{b^2}.$$

Como $8a^2 - 3b^2, b^2 \in \mathbb{Q}$, segue que $\frac{8a^2-3b^2}{b^2} \in \mathbb{Q}$, o que é um absurdo, pois $\sqrt{5} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Portanto, $\cos\frac{\pi}{5}$ é irracional, o que mostra $(5)_1$.

Como $\frac{\theta}{2}$ é um ângulo do primeiro quadrante, temos que

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},$$

o que prova $(8)_2$.

De maneira análoga ao que foi feito para mostrar que $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$ e $\cos\frac{\pi}{5}$ são números irracionais, mostra-se que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$ também é irracional, ficando, assim, $(5)_2$ demonstrado.

(III) Usando o fato que $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, obtemos que

$$\cos 2\theta = 2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4},$$

o que mostra $(7)_1$ e, como aplicação imediata dos Lemas 3.3 e 3.4.

Agora usando o fato que $\operatorname{sen}^2 2\theta = 1 - \cos^2 2\theta$ e que $\operatorname{sen} 2\theta > 0$, obtemos que

$$\operatorname{sen} 2\theta = \sqrt{1-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

o que mostra $(7)_2$.

Argumentando por contradição, de forma similar ao que foi feito anteriormente, mostramos que $\operatorname{sen} 2\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, mostrando, assim, $(4)_2$. □

Observação 4.2. Com o auxílio do software GeoGebra [12] e utilizando o fato de que $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ são isomorfos, podemos construir a representação geométrica das raízes da equação $z^5 = 1$ (ver Figuras 5 e 6), interpretando números complexos como pontos no plano. Essa construção se baseia no resultado de que as raízes n-ésimas da unidade correspondem aos vértices de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência unitária (ver [17]).

Figura 5: Polígono regular inscrito.

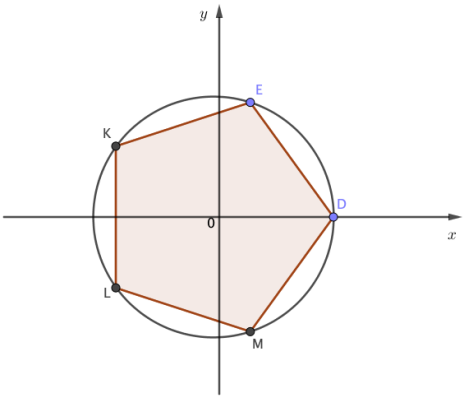
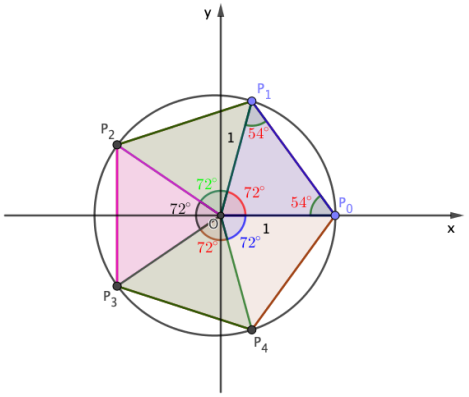


Figura 6: Polígono regular inscrito com ângulo central.



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra.

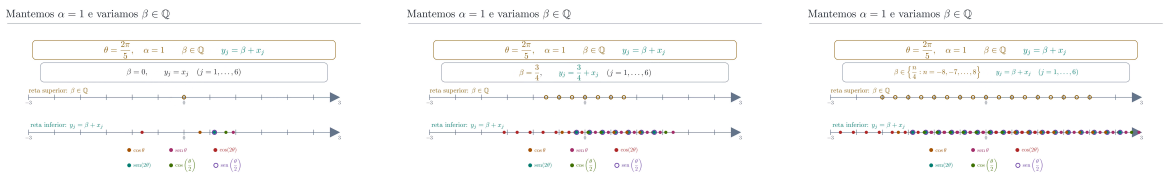
Observação 4.3. Sabendo que $\cos\frac{2\pi}{5}, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{\pi}{5}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}, \operatorname{sen}\frac{4\pi}{5} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, podemos concluir, pelo Lema 3.4, que, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ com $\alpha \neq 0$,

- $\beta + \alpha\cos\frac{2\pi}{5} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$,
- $\beta + \alpha\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$,
- $\beta + \alpha\cos\frac{\pi}{5} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$,
- $\beta + \alpha\operatorname{sen}\frac{\pi}{5} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$,
- $\beta + \alpha\cos\frac{4\pi}{5} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$,
- $\beta + \alpha\operatorname{sen}\frac{4\pi}{5} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

As famílias da Observação 4.3 podem ser acompanhadas na animação elaborada pelos autores em Manim[1], na qual os seis valores trigonométricos da Proposição 4.1 são denotados por $x_1, \ldots, x_6$ e transformados em $y_j = \beta + \alpha x_j$. O vídeo apresenta duas etapas, primeiro mantém $\alpha = 1$ e varia $\beta \in \mathbb{Q}$, depois fixa $\beta = 0$ e varia $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Figura 7: Acúmulo de valores na reta real ao variar β, com $\alpha = 1$.

(a) (b) (c)

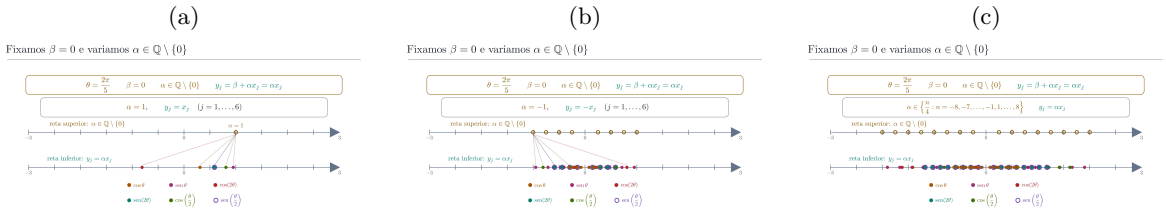


Fonte: Quadros da animação elaborada pelos autores em Manim.

[1]Manim (Mathematical Animation Engine), biblioteca de animação matemática em Python.

Na Figura 7, a reta superior registra as escolhas de β, enquanto a inferior acumula os resultados $y_j = \beta + x_j$, conservando as marcações anteriores. O quadro (a) mostra o caso inicial $\beta = 0$, em (b), aparece a escolha $\beta = \frac{3}{4}$, junto dos resultados já obtidos, em (c), vê-se a amostra ao fim dessa etapa, com $\beta = \frac{n}{4}$ para $n = -8, -7, \ldots, 8$.

Figura 8: Acúmulo de valores na reta real ao variar α, com $\beta = 0$.



Fonte: Quadros da animação elaborada pelos autores em Manim.

Na Figura 8, mantém-se $\beta = 0$, de modo que a reta superior passa a indicar os valores de α e a inferior acumula os produtos $y_j = \alpha x_j$. Os quadros mostram o caso inicial $\alpha = 1$, uma etapa intermediária e a amostra final.

Nas duas etapas, as cores identificam as expressões trigonométricas, e o marcador em anel destaca a coincidência $x_4 = x_6$, pois $\operatorname{sen}(2\theta) = \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})$ para $\theta = \frac{2\pi}{5}$. A irracionalidade dos resultados é garantida pelo Lema 3.4, sob as hipóteses da Observação 4.3, enquanto os quadros representam uma amostra finita por coordenadas aproximadas. O vídeo completo pode ser acessado pelo QR Code da Figura 9 e retomado nas atividades da Seção 5.

Figura 9: QR Code para a animação dos números irracionais na reta real.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A partir desses valores trigonométricos, a Observação 4.3 fornece famílias infinitas de números irracionais por transformações com coeficientes racionais.

Em [19, Theorem 6.16] é apresentado um resultado geral do Lema 3.4 e da Observação 4.3. No entanto, a demonstração apresentada aqui, neste contexto, utiliza argumentos completamente distintos e de natureza mais elementar e, além disso, apresentamos a forma do número irracional, o que não é mostrado em [19] . O teorema mencionado do artigo [19] é o seguinte:

Teorema 4.4. *Se $\theta = r\pi$, com $r \in \mathbb{Q}$, então $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ e $\tan\theta$ são números irracionais, exceto nos casos em que $\tan\theta$ é indefinido, e nas exceções*

$$\cos\theta = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1; \quad \operatorname{sen}\theta = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1; \quad \tan\theta = 0, \pm 1.$$

Note que, se $\theta = \frac{\pi}{4}$, temos que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, mas $\cos 2\theta \in \mathbb{Q}$, pois $\cos 2\theta = 0$. Esta observação mostra que, se $\cos\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, não podemos concluir que $\cos 2\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Mais geralmente, isto pode ser observado no Teorema 4.4 acima. Em [18], prova-se que, se $\cos 2\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, então $\cos\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Motivados pelo Lema 3.4, a seguir enunciaremos e provaremos o principal resultado deste artigo.

Teorema 4.5. *Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$, com $a, b \neq 0$, e p um número primo tais que $|a + b\sqrt{p}| < 1$. Se $\theta \in \mathbb{R}$ é tal que $\cos\theta = a + b\sqrt{p}$, então*

$$\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \tag{14}$$

$$\cos 2\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \quad e \quad \operatorname{sen} 2\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \ \ se\ a^2 + pb^2 \neq \frac{1}{2}, \tag{15}$$

$$\cos\frac{\theta}{2},\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \tag{16}$$

Além disso,

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{(1 - a^2 - pb^2) - 2ab\sqrt{p}}, \tag{17}$$

$$\cos 2\theta = (2a^2 + 2pb^2 - 1) + 4ab\sqrt{p} \quad e \quad \operatorname{sen} 2\theta = \pm 2(a + b\sqrt{p})\sqrt{(1 - a^2 - pb^2) - 2ab\sqrt{p}}, \tag{18}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1+a) + b\sqrt{p}}{2}} \quad e \quad \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1-a) - b\sqrt{p}}{2}}. \tag{19}$$

Demonstração. Com o objetivo de promover a clareza e a organização, iremos proceder à subdivisão da prova em seis itens.

(a) Pelo Lema 3.3, obtemos que $\sqrt{p}$ é irracional e pelo Lema 3.4, resulta que $a + b\sqrt{p}$ é irracional. Portanto, $\cos\theta = a + b\sqrt{p}$ é irracional.

(b) Vamos supor que $\operatorname{sen}\theta$ seja racional. Assim, existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $\operatorname{sen}\theta = c$. Da relação fundamental da trigonometria, resulta que $c = \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$. Logo,

$$c^2 = 1 - (a + b\sqrt{p})^2,$$

de onde decorre que

$$\sqrt{p} = \frac{-c^2 + (1 - a^2 - pb^2)}{2ab}. \tag{20}$$

Como $\frac{-c^2+(1-a^2-pb^2)}{2ab} \in \mathbb{Q}$, resulta de (20) que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, o que contraria o Lema 3.3. Portanto, $\operatorname{sen}\theta$ é um número irracional.

(c) Vamos supor que $\cos 2\theta = c$, com $c \in \mathbb{Q}$. Assim,

$$c = 2\cos^2\theta - 1 = 2(a + b\sqrt{p})^2 - 1$$

e, portanto,

$$\sqrt{p} = \frac{c - (-1 + 2a^2 + 2pb^2)}{4ab}. \tag{21}$$

Como $\frac{c-(-1+2a^2+2pb^2)}{4ab} \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{p} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, temos uma contradição em (21). Portanto, $\cos 2\theta$ é irracional.

(d) Suponhamos que $\operatorname{sen} 2\theta = c$, com $c \in \mathbb{Q}$. Recorde que pelo item (a), $\cos\theta \neq 0$. Assim,

$$c = \operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

ou seja,

$$\frac{c}{\cos\theta} = 2\operatorname{sen}\theta$$

e, consequentemente,

$$\frac{c^2}{\cos^2\theta} = 4(1-\cos^2\theta).$$

Assim,

$$\frac{c^2}{(a+b\sqrt{p})^2} = 4 - 4(a+b\sqrt{p})^2,$$

de onde decorre que

$$c^2 + 4(a^2+pb^2)^2 - (4a^2+4pb^2) + 16a^2b^2p = 8ab(1-2(a^2+pb^2))\sqrt{p}.$$

Como $a^2+pb^2 \neq \frac{1}{2}$, segue que

$$\frac{c^2 + 4(a^2+pb^2)^2 - (4a^2+4pb^2) + 16a^2b^2p}{8ab(1-2(a^2+pb^2))} = \sqrt{p}. \tag{22}$$

Como $\frac{c^2+4(a^2+pb^2)^2-(4a^2+4pb^2)+16a^2b^2p}{8ab(1-2(a^2+pb^2))} \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{p} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, de (22) obtemos uma contradição. Portanto, $\operatorname{sen} 2\theta$ é irracional.

(e) Suponhamos que $\cos\frac{\theta}{2}$ seja um número racional. Assim, existe $c \in \mathbb{Q}$, com $c = \cos\frac{\theta}{2}$. Logo,

$$c = \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \Rightarrow \quad c^2 = \frac{1+\cos\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad 2c^2 - 1 = \cos\theta$$
$$\Rightarrow \quad 2c^2 - 1 = a + b\sqrt{p} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{p} = \frac{2c^2-(1+a)}{b},$$

o que é um absurdo, uma vez que $\frac{2c^2-(1+a)}{b} \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{p} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Portanto, $\cos\frac{\theta}{2}$ é irracional.

Como $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$, obtemos

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1+a)+b\sqrt{p}}{2}}.$$

(f) Suponhamos que $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ seja um número racional. Assim, existe $c \in \mathbb{Q}$ com $c = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$. Portanto,

$$c = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \Rightarrow \quad c^2 = \frac{1-\cos\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad 2c^2 - 1 = -\cos\theta$$
$$\Rightarrow \quad 1 - 2c^2 = a + b\sqrt{p} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{p} = \frac{(1-a)-2c^2}{b},$$

o que é um absurdo, pois $\frac{(1-a)-2c^2}{b} \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{p} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Portanto, $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ é irracional.

Como $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$, obtemos

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1-a)-b\sqrt{p}}{2}}. \tag{23}$$

□

Observação 4.6. Se $\cos\theta = a + b\sqrt{p}$, com $a, b \in \mathbb{Q}, a, b \neq 0$, e p é um número primo, então, pelo Teorema 4.5 e pelo Lema 3.4, para $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq 0$, resulta

- $\beta + \alpha\cos\theta \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$,

- $\beta + \alpha \operatorname{sen}\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$,
- $\beta + \alpha \cos 2\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$,
- $\beta + \alpha \operatorname{sen} 2\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, se $a^2 + pb^2 \neq \frac{1}{2}$,
- $\beta + \alpha \cos\frac{\theta}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$,
- $\beta + \alpha \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Observação 4.7. Como uma consequência direta do Teorema 4.5, obtemos uma outra demonstração da Proposição 4.1. De fato, como a função $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$, $f(\theta) = \cos\theta$, é bijetora, dado $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \in [-1, 1]$, existe um único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$f(\theta) = \cos\theta = \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Pela injetividade de f, resulta que $\theta = \frac{2\pi}{5}$, pois $\cos\theta = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Como $\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$, os resultados estabelecidos na Proposição 4.1 seguem do Teorema 4.5.

Observação 4.8. O Teorema 4.5 pode ser facilmente generalizado. De fato, devido a irracionalidade das raízes quadradas inexatas, observando a demonstração do Teorema 4.5, vemos que podemos substituir $\sqrt{p}$ por $\sqrt{m}$, com $m \in \mathbb{N}$, desde que $\sqrt{m}$ não seja exata.

Mais geralmente (veja [19, Corollary 6.15]), sabemos que, se $\sqrt[n]{m}$ não é exata, com $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$, então $\sqrt[n]{m}$ é irracional. Portanto, usando expansão binomial, podemos generalizar ainda mais o Teorema 4.5.

5 Proposta de uma sequência didática

A sequência retoma o estudo de números como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ em situações de construção e comparação de comprimentos, a partir das quais se chega aos valores irracionais de seno e cosseno apresentados na Proposição 4.1.

O GeoGebra será utilizado nas construções e na exploração da circunferência trigonométrica, permitindo relacionar ângulos, segmentos e coordenadas, enquanto o estudo da irracionalidade se apoia nas expressões exatas e na argumentação algébrica. As animações elaboradas pelos autores em Manim serão apresentadas como vídeos prontos, e serão retomadas nos momentos em que ajudam a discutir as relações estudadas.

A organização se apoia na concepção de sequência didática de Zabala [23], entendida como um conjunto de atividades articuladas em torno de objetivos de aprendizagem. Cada encontro retoma elementos do anterior e introduz uma nova questão, conduzindo das construções na reta às expressões trigonométricas e, depois, às transformações que produzem outros irracionais.

Público e condições de aplicação

A proposta destina-se ao Ensino Médio e pressupõe conhecimentos de números reais, radicais, equações quadráticas, Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos e razões trigonométricas. As identidades de ângulo duplo e de meio ângulo devem ser retomadas pelo professor quando necessário.

Prevê-se o trabalho em duplas, com caderno, régua, compasso e acesso ao GeoGebra. Havendo apenas um computador com projetor, o professor pode conduzir as construções a partir das sugestões dos estudantes, que registram individualmente suas previsões e cálculos. Na falta de recursos digitais, as construções podem ser adaptadas para régua e compasso,

e os quadros das animações reproduzidos em material impresso, o uso das ferramentas do GeoGebra pode ser apresentado durante as atividades.

As tarefas iniciais retomam as habilidades EF09MA01 e EF09MA02 da BNCC [3], relacionadas a comprimentos irracionais e à sua localização aproximada na reta. Os problemas com triângulos também se relacionam à habilidade EM13MAT308, pelo uso de relações métricas e semelhança. A articulação entre investigação, representação e demonstração orienta o uso dos recursos digitais ao longo da proposta.

Objetos do conhecimento

- números racionais e irracionais, suas representações e sua localização na reta real;
- Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos;
- circunferência trigonométrica, pentágono regular e valores de seno e cosseno associados a $\theta = \frac{2\pi}{5}$;
- representação geométrica das raízes quintas da unidade, como aprofundamento para turmas que já conhecem números complexos;
- transformações $\beta + \alpha x$, com coeficientes racionais e $\alpha \neq 0$;
- distinção entre observação, conjectura e justificação matemática.

Objetivo geral

Investigar como construções geométricas e expressões exatas permitem obter e justificar números irracionais, articulando o trabalho no GeoGebra à análise algébrica e à interpretação das animações em Manim.

Objetivos específicos

Ao final da sequência, espera-se que os estudantes sejam capazes de:

- construir e localizar $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e outras raízes quadradas na reta real, explicando as propriedades utilizadas;
- distinguir uma expressão exata de uma aproximação decimal e reconhecer os limites da representação na tela;
- relacionar o pentágono regular aos ângulos $\theta = \frac{2\pi}{5}$, 2θ e $\frac{\theta}{2}$, identificando seno e cosseno como coordenadas;
- justificar a irracionalidade dos valores estudados com os resultados da Proposição 4.1 e dos Lemas 3.3 e 3.4;
- calcular transformações com coeficientes racionais e explicar por que a condição $\alpha \neq 0$ é necessária;
- formular conjecturas, apresentar argumentos e relacionar as transformações algébricas às duas etapas da animação das retas.

Etapas de desenvolvimento

O planejamento compreende cinco encontros de aproximadamente 45 a 50 minutos. Esse tempo é uma referência, e o terceiro encontro pode ser desdobrado se a turma precisar retomar semelhança ou identidades trigonométricas.

Primeiro encontro

Antes de apresentar o problema, o professor pede que os estudantes classifiquem $\frac{1}{3}$, 0,333…, 1,414, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{9}$ como racionais ou irracionais, justificando suas escolhas. Também solicita um esboço de como poderiam localizar $\sqrt{2}$ na reta. As atividades iniciais exploram propriedades elementares da geometria plana, particularmente o Teorema de Pitágoras e a construção de segmentos, temas abordados em [11]. As respostas ficam registradas para comparação no último encontro.

Atividade 5.1. José está desenhando um canteiro triangular para a horta da escola. No projeto, dois lados perpendiculares medem 1 m cada. Qual é o comprimento do terceiro lado? Represente o projeto no GeoGebra e encontre uma maneira de transportar esse comprimento para uma reta graduada em metros, sem substituir a raiz por um decimal.

Encaminhamento. Tomando uma unidade do desenho como 1 m, marcam-se $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $H = (0, 1)$. O triângulo ABH é retângulo em A e $BH^2 = 1^2 + 1^2 = 2$; logo, o terceiro lado mede $\sqrt{2}$ m. Uma circunferência de centro A e raio igual ao comprimento de BH encontra o semieixo positivo no ponto $K = (\sqrt{2}, 0)$. O professor pede que as duplas expliquem por que essa construção conserva o comprimento.

Atividade 5.2. José modifica o projeto, em que um cateto continua medindo 1 m, mas o outro passa a medir 2 m. Determine o comprimento do terceiro lado e represente-o na mesma reta. Ao registrar uma aproximação dessa medida, João escreve no caderno $\sqrt{5} = 2{,}236$. A igualdade está correta? Explique como essa anotação deveria ser feita.

Encaminhamento. Em uma nova construção, use $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = (2, 0)$. Pelo Teorema de Pitágoras, $BC^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, de modo que o terceiro lado mede $\sqrt{5}$ m. A circunferência de centro A e raio BC determina $E = (\sqrt{5}, 0)$ no semieixo positivo. As Figuras 10 e 11 representam as duas construções.

Figura 10: Construção de $\sqrt{2}$ na reta real.

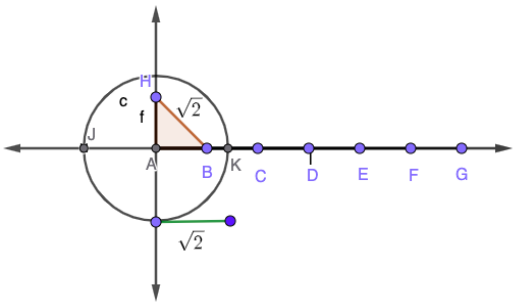
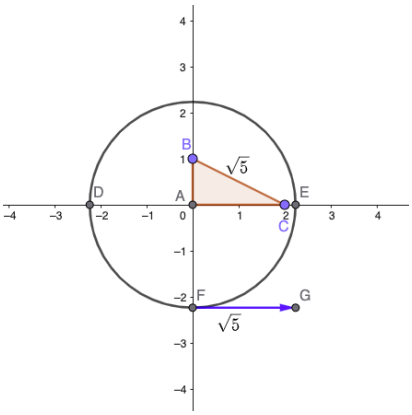


Figura 11: Construção de $\sqrt{5}$ na reta real.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Para examinar a anotação de João, as duplas calculam

$$2{,}236^2 = 4{,}999696 < 5 < 5{,}004169 = 2{,}237^2.$$

Como os extremos são positivos, $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$. Portanto, 2,236 é uma aproximação, com erro absoluto menor que 0,001, e a escrita adequada é $\sqrt{5} \approx 2{,}236$. A irracionalidade de $\sqrt{5}$ é justificada pelo Lema 3.3.

Segundo encontro

Atividade 5.3. Para um painel da feira de Matemática, José, João e seus colegas querem distribuir cinco marcas igualmente espaçadas sobre uma circunferência. No GeoGebra, adote o centro $O = (0, 0)$, raio 1 e a primeira marca em $A = (1, 0)$. Qual deve ser o ângulo central entre marcas consecutivas? Construa o pentágono regular e identifique as coordenadas das marcas correspondentes a $\theta = \frac{2\pi}{5}$ e 2θ.

O ângulo central é $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ = \frac{2\pi}{5}$. Para construir o pentágono, os alunos podem rotacionar A em 72° em torno de O, no sentido anti-horário, obtendo B, e usar a ferramenta de polígono regular com os vértices A, B e cinco lados. Também podem repetir a rotação até obter os cinco vértices.

Atividade 5.4. Marque também o ponto da circunferência correspondente a $\frac{\theta}{2} = 36^\circ$, por uma rotação de A em torno de O. Para os ângulos 36°, 72° e 144°, trace as projeções dos pontos sobre os eixos e registre as aproximações do seno e do cosseno. Antes de consultar as medidas, preveja os sinais dessas coordenadas. Há valores que parecem coincidir? Explique o que a figura sugere.

Na circunferência unitária, o ponto de ângulo t tem coordenadas $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Os pontos de 36° e 72° estão no primeiro quadrante; o de 144°, no segundo, tem cosseno negativo e seno positivo. Nas turmas que já conhecem números complexos, os cinco vértices podem ser identificados com as raízes de $z^5 = 1$, como nas Figuras 5 e 6.

As aproximações ficam em uma tabela no caderno para serem comparadas com as expressões exatas no encontro seguinte. Uma coincidência merece atenção: $\operatorname{sen} 144^\circ = \operatorname{sen} 36^\circ$, pois os ângulos são suplementares, assim, as seis expressões trigonométricas estudadas correspondem a cinco números distintos.

Terceiro encontro

O professor retoma a questão deixada, como determinar as coordenadas sem copiar os decimais do GeoGebra? Para obter $\cos 72^\circ$, pode recorrer à construção da Figura 2 e à animação do pentágono, indicada na Figura 3.

Na Figura 2, F é a interseção de AD com CE. A análise dos ângulos e dos triângulos isósceles fornece $AF = CF = CD = 1$ e $ACD \sim CDF$. Chamando a diagonal de Φ, tem-se $DF = \Phi - 1$ e

$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1}, \qquad \Phi^2 - \Phi - 1 = 0, \qquad \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Escolhe-se a solução positiva por se tratar de um comprimento. Se M é o ponto médio de CD, o triângulo ACM é retângulo em M, $CM = \frac{1}{2}$ e $\widehat{ACM} = 72^\circ$. Logo,

$$\cos 72^\circ = \frac{CM}{AC} = \frac{1}{2\Phi} = \frac{1}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

O vídeo pode ser pausado para que os estudantes expliquem a semelhança e a escolha da raiz. Se não for exibido, a mesma discussão pode ser conduzida com a figura e a construção no GeoGebra.

Atividade 5.5. Partindo de $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, com $\theta = 72°$, obtenha os demais valores da Proposição 4.1. Use a relação $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, as identidades de ângulo duplo e as de meio ângulo. Compare os resultados com a tabela do encontro anterior e justifique a escolha dos sinais das raízes.

O professor pode distribuir os cálculos entre as duplas e organizar a conferência coletiva. Para 2θ, usam-se $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ e $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$; para $\frac{\theta}{2}$, usam-se $\cos^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1+\cos\theta}{2}$ e $\operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1-\cos\theta}{2}$. Os valores a conferir são

Ângulo	Cosseno	Seno
$\theta = 72°$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$2\theta = 144°$	$-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
$\frac{\theta}{2} = 36°$	$\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$

Atividade 5.6. José registra uma aproximação decimal de $\cos 72°$ obtida no GeoGebra, enquanto João escreve $\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. O que cada representação informa sobre esse número? Justifique sua irracionalidade a partir de $4\cos 72° + 1 = \sqrt{5}$ e explique por que a medida exibida na tela não basta para essa conclusão. Em seguida, escolha um dos senos da tabela e examine seu quadrado para justificar sua irracionalidade.

Se $\cos 72°$ fosse racional, $\sqrt{5}$ também seria racional. Para os senos, os quadrados são $\frac{5+\sqrt{5}}{8}$ ou $\frac{5-\sqrt{5}}{8}$, ambos irracionais pelo Lema 3.4. Como o quadrado de um racional é racional, os senos não podem ser racionais. O mesmo raciocínio se aplica a $\cos 36°$, cujo quadrado é $\frac{3+\sqrt{5}}{8}$; para $\cos 144°$, usa-se diretamente sua expressão afim em $\sqrt{5}$.

Quarto encontro

Atividade 5.7. Para ampliar o painel, a turma decide obter novos exemplos a partir de $x = \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. José sugere dobrar esse número, João propõe somar 1, e os demais colegas sugerem subtraí-lo de 2 ou multiplicá-lo por $\frac{3}{2}$ antes de subtrair 1. Calcule, na forma exata,

$$2x, \qquad 1+x, \qquad 2-x, \qquad -1+\frac{3}{2}x.$$

Escreva cada expressão como $\beta + \alpha x$, identifique os coeficientes racionais e justifique a classificação do resultado.

Após comparar as respostas, o professor pode registrar os resultados

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad \frac{3+\sqrt{5}}{4}, \qquad \frac{9-\sqrt{5}}{4}, \qquad \frac{3\sqrt{5}-11}{8},$$

correspondentes, nessa ordem, aos pares $(\alpha,\beta) = (2,0), (1,1), (-1,2), (\frac{3}{2}, -1)$.

Atividade 5.8. Mantendo x irracional e β racional, compare $\beta + 2x$, $\beta - x$ e $\beta + \frac{x}{2}$ com $\beta + 0x$. Formule uma regra para a natureza de $y = \beta + \alpha x$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, e explique por que é necessário separar o caso $\alpha = 0$.

Quando $\alpha = 0$, o resultado é o racional β. Quando $\alpha \neq 0$, supor y racional levaria a

$$x = \frac{y - \beta}{\alpha} \in \mathbb{Q},$$

contradizendo a hipótese sobre x. Essa é a justificativa da propriedade usada na Observação 4.3, a partir do Lema 3.4.

Depois da investigação algébrica, o professor retoma a animação apresentada após a Observação 4.3, acessível pelo QR Code da Figura 9, e solicita previsões antes de cada trecho. Na primeira etapa, os estudantes comparam as translações obtidas ao manter $\alpha = 1$ e variar β, como nos quadros da Figura 7; na segunda, examinam o efeito de variar $\alpha \neq 0$ com $\beta = 0$, conforme a Figura 8.

Atividade 5.9. Identifique no vídeo os valores iniciais, os parâmetros e os pontos produzidos pelas transformações. Relacione o deslocamento à parcela β e, quando $\beta = 0$, interprete o efeito do sinal e do módulo de α. Explique por que aparecem duas expressões associadas ao mesmo ponto inicial e qual argumento garante a irracionalidade dos resultados.

Os alunos devem relacionar a coincidência à igualdade $\operatorname{sen} 144° = \operatorname{sen} 36°$. Com $\beta = 0$, o módulo de α multiplica a distância à origem, se $\alpha < 0$, o ponto também passa para o lado oposto da reta. É importante salientar que a animação permite acompanhar essas transformações, mas exibe uma amostra finita, desenhada com aproximações.

Quinto encontro

O último encontro começa pela revisão das respostas diagnósticas. Cada estudante conserva a resposta inicial e escreve ao lado o que manteria ou corrigiria e por quê. Em seguida, resolve individualmente as questões abaixo.

Atividade 5.10.

1. No projeto do segundo canteiro de José, por que $\sqrt{5}$ e 2,236 não podem ser ligados por um sinal de igualdade? Encontre dois racionais entre os quais esteja $\sqrt{5}$ e confira sua resposta pelos quadrados desses números.

2. Para $x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\beta = -1$, determine $y = \beta + \alpha x$ na forma exata e justifique sua irracionalidade. Explique o que mudaria se α fosse zero.

3. Escolha outro valor da Proposição 4.1 e proponha coeficientes racionais $\alpha \neq 0$ e β. Apresente a expressão exata de $\beta + \alpha x$ e justifique por que ela é irracional.

4. Cite uma relação percebida no GeoGebra ou na animação e explique qual argumento matemático permite confirmá-la.

Avaliação

A avaliação leva em conta os registros feitos pelas duplas, as construções realizadas, os cálculos desenvolvidos e as respostas individuais. Ao longo das atividades, o professor acompanha se os estudantes conseguem justificar por que um comprimento é preservado quando

é transportado para a reta, identificar corretamente os sinais dos valores trigonométricos e compreender a diferença entre uma medida aproximada e uma expressão exata.

Nas atividades que envolvem transformações algébricas, também é importante observar se os estudantes utilizam corretamente as hipóteses de racionalidade dos coeficientes e a condição $\alpha \neq 0$, evitando conclusões baseadas apenas na aparência do resultado.

Ao final, as respostas são comparadas com o diagnóstico inicial, permitindo identificar os avanços dos estudantes e os pontos que ainda precisam ser retomados.

6 Considerações finais

A ênfase dada ao ensino dos números irracionais nas etapas de ensino fundamental e médio é limitada. Na educação básica, os números irracionais mais frequentemente encontrados são π e $\sqrt{p}$, em que p é um número primo. No entanto, é comum encontrar em grande parte dos livros didáticos a afirmação de que $\sqrt{2}$ e π são números irracionais, sem que seja apresentada qualquer justificativa plausível para tal afirmação.

Outro número irracional importante que surge em vários fenômenos naturais é o número e, a base do logaritmo natural. Utilizando a expansão da série de Taylor $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$ e considerando $x = 1$, é possível obter aproximações satisfatórias para e, como $e \approx 2,718$.

Ao longo de sua história, o ensino da matemática tem passado por significativas transformações, levando os professores dessa disciplina a buscar inovações e dar sentido ao ensino de matemática. Nesse contexto, com o objetivo de suprir essa carência e de fornecer uma contribuição na formação de professores de matemática e áreas relacionadas, bem como dos estudantes da educação básica e dos cursos de licenciatura em matemática, optamos por abordar o tema neste artigo. Aqui, utilizando apenas ferramentas simples, foram obtidos infinitos valores irracionais trigonométricos, conforme estabelecido no Teorema 4.5 e na Proposição 4.1. Esperamos que este trabalho possa ser uma fonte de apoio para estudantes e professores de matemática e áreas afins, contribuindo assim para sua formação e enriquecendo o conhecimento dos apaixonados por essa disciplina.

Financiamento

O primeiro e o segundo autores receberam apoio da Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (FAPESQ), no âmbito do Termo de Outorga nº 2457/2026.

Referências

[1] AL BIRUNI at al. *Book of Instructions in the Elements of the Art of Astrology*. Astrology Classics, Benton Harbor, EUA, 2006.

[2] C. B. BOYER and U. C. MERZBACH. *História da Matemática*. Blucher, São Paulo, 3ª edition, 2012. 504 p.

[3] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação, Brasília, 2018.

[4] M. A. CAMARGO. Caracterização dos números racionais e irracionais. *Revista da Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás*, (4):76–83, 2003.

[5] W. E. CLARK. *The Aryabhatiya of Aryabhata: An Ancient Indian Work on Mathematics and Astronomy*. Kessinger Publishing, Whitefish, EUA, 2010.

[6] E. A. COSTA. A beleza pela (na) matemática. *Revista Estudos - Revista de Ciências Ambientais e Saúde (EVS)*, 35(2):187–199, 2008.

[7] R. COURANT and F. JOHN. *Introduction to Calculus and Analysis - Volume I*. Springer, Nova Iorque, EUA, 1999.

[8] E. DE ALENCAR FILHO. *Teoria elementar dos números*. Nobel, São Paulo, 1992.

[9] D. G. DE FIGUEIREDO. *Números irracionais e transcendentes*. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. SBM, Rio de Janeiro, 1985.

[10] MANIM COMMUNITY DEVELOPERS. Manim: Mathematical animation framework. Versão 0.21.0. 2026. Software. Disponível em: https://www.manim.community/. Acesso em: 18 set. 2026.

[11] M. DONAIRE PEÑA, W. REYES PÉREZ, and L. A. FRANCIA RUIZ. *Geometría plana: fundamentos y aplicaciones de las figuras bidimensionales*. Asociación Fondo de Investigadores y Editores: LUMBRERAS, Lima, 1 edition, 2019.

[12] GEOGEBRA. Geogebra: Software de matemática dinâmica. Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 14 jan. 2026.

[13] J. HAVIL. *The Irrationals: A Story of the Numbers You Can't Count on*. Princeton University Press, Princeton, EUA, 2014.

[14] H. E. HUNTLEY. *A divina proporção: um ensaio sobre a beleza na matemática*. Editora da Universidade de Brasília, Brasília, 1985.

[15] E. L. LIMA, P. C. P. CARVALHO, E. WAGNER, and A. C. MORGADO. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*. Coleção Professor de Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[16] D. C. MORAIS FILHO and A. T. LOURÊDO. O surpreendente comportamento das sequências sen n e cos n. *Revista Tocantinense de Matemática*, 1(1), 2026.

[17] A. C MUNIZ NETO. *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

[18] I. NIVEN. *Números racionais e irracionais*. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. SBM, Rio de Janeiro, 1984.

[19] I. NIVEN, H. S. ZUCKERMAN, and H. L. MONTGOMERY. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, Nova Jersey, EUA, 1991.

[20] A. OSTERMANN and G. WANNER. *Geometry by Its History*. Springer, Nova Iorque, EUA, 2012.

[21] M. D. PIETERZACK. Números reais. *Revista da Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás*, (1):75–100, 2000.

[22] V. L. VIEIRA. *Um Curso Básico em Teoria dos Números*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2020.

[23] A. ZABALA. *A prática educativa: como ensinar*. Artmed, Porto Alegre, 1998. Tradução de Ernani F. da F. Rosa.