ReTMAT
REVISTA TOCANTINENSE DE MATEMÁTICA

Revista Tocantinense de Matematica
e-ISSN: 3086-7371
Vol. 1, n. 1, 2026, p. 1–9
DOI: 10.20873/retmat.uft.v1n1.2026.23458
Recebido: 15 de agosto de 2026
Aceito: 15 de outubro de 2026

Da Otimização à Geometria: uma demonstração da fórmula da distância entre ponto e reta via multiplicadores de Lagrange

Abraão Caetano Mendes[1,*]

Resumo

Motivado essencialmente pela curiosidade acadêmica e pela busca por conexões inovadoras entre diferentes subáreas da matemática, este trabalho apresenta uma demonstração alternativa para a clássica fórmula da distância entre ponto e reta utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange. Embora se trate de um conteúdo tradicional da Geometria Analítica na Educação Básica, a literatura voltada à formação docente carece de publicações precedentes que explorem o problema sob a ótica da otimização restrita. Com um forte apelo visual e didático, a proposta transita por metáforas intuitivas e aplicações práticas antes de formalizar o rigor algébrico da dedução. O texto oferece um material de aprofundamento enriquecedor para professores e estudantes de licenciatura, estimulando o olhar investigativo sobre fórmulas frequentemente consolidadas nos livros didáticos.

Palavras-chave: Curiosidade matemática, Demonstração analítica, Distância entre ponto e reta, Multiplicadores de Lagrange, Formação de professores.

MSC 2020: 97B50; 97G40; 51N20; 90C30

Abstract

Driven essentially by academic curiosity and the search for innovative connections between different subfields of mathematics, this paper presents an alternative proof for the classic formula of the distance between a point and a line using the method of Lagrange multipliers. Although this is a traditional topic of Analytic Geometry in basic education, literature aimed at teacher training lacks preceding publications that explore the problem from the perspective of constrained optimization. With a strong visual and pedagogical appeal, the proposal moves through intuitive metaphors and practical applications before formalizing the algebraic rigor of the deduction. The text offers an enriching depth of material for teachers and undergraduate students, stimulating an investigative look at formulas that are often taken for granted in textbooks.

Keywords: Mathematical curiosity, Analytical proof, Distance between point and line, Lagrange multipliers, Teacher training.

[1] Instituto Federal do Amazonas (IFAM), Campus Tefé, Amazonas, Brasil. E-mail: abraao.mendes@ifam.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0009-0008-9307-6552.
[*] Autor correspondente.

Sumário

1 Introdução 2

2 Uma breve revisão do método dos multiplicadores de Lagrange 3

3 Demonstração da fórmula da distância entre ponto e reta 8

1 Introdução

Lendo o artigo do professor Elias Luiz Elizeu “Demonstração da fórmula de distância de ponto à reta utilizando relações métricas no triângulo retângulo” [3] , chamou-me a atenção o fato de que a maioria dos livros didáticos de matemática não apresenta uma demonstração da “fórmula da distância entre ponto e reta” (veja [1], [5], [2], [6]). Por isto, propus-me a apresentar uma demonstração alternativa da referida fórmula.

Diferente das abordagens geométricas tradicionais, este trabalho propõe uma formulação analítica motivada essencialmente pela curiosidade acadêmica e pela busca por conexões entre subáreas da matemática. Trata-se de uma proposta metodológica de natureza inovadora e, até onde mapeamos na literatura voltada à formação docente, ainda não publicada sob esta ótica específica. Unindo ferramentas de otimização clássica a problemas fundamentais da Geometria Analítica, este texto busca enriquecer o repertório do professor da Educação Básica por meio de uma interpretação visual e conceitual integradora, cuja dinâmica geométrica é detalhada ao longo das seções seguintes.

Este artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2, fazemos uma revisão simples sobre o método dos multiplicadores de Lagrange, explicando como ele funciona com exemplos práticos e gráficos. Na Seção 3, usamos esse método para mostrar o passo a passo da demonstração da fórmula da distância entre um ponto e uma reta. Por fim, na Seção 4, apresentamos a bibliografia que usamos como referência para este trabalho.

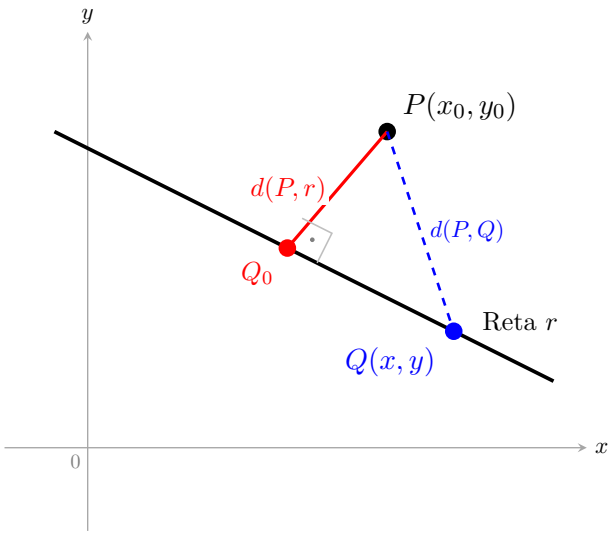


Figura 1: Representação geométrica da distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ a uma reta r. O segmento vermelho denota a menor distância possível ($d(P, r)$), obtida perpendicularmente no ponto Q_0, enquanto o segmento tracejado azul ilustra a distância a um ponto arbitrário $Q(x, y)$ sobre a restrição.

2 Uma breve revisão do método dos multiplicadores de Lagrange

O método dos multiplicadores de Lagrange serve para encontrar máximos e mínimos de uma função quando existe uma restrição de igualdade. Ele responde a problemas onde busca-se o ponto ótimo respeitando uma condição obrigatória.

Do ponto de vista geométrico, o método baseia-se no fato de que, no ponto de ótimo, a curva de nível da função objetivo $f(x, y)$ é perfeitamente tangente à curva definida pela restrição $g(x, y) = 0$. Intuitivamente, se elas não fossem tangentes e se cruzassem, seria possível caminhar ao longo da curva de restrição para atingir valores maiores ou menores de f, o que descaracterizaria o ponto como um extremo. Matematicamente, a tangência implica que os vetores gradientes de ambas as funções são paralelos no ponto crítico:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \tag{1}$$

Onde λ (lambda) é o chamado multiplicador de Lagrange, que atua como uma constante de proporcionalidade escalar entre os vetores.

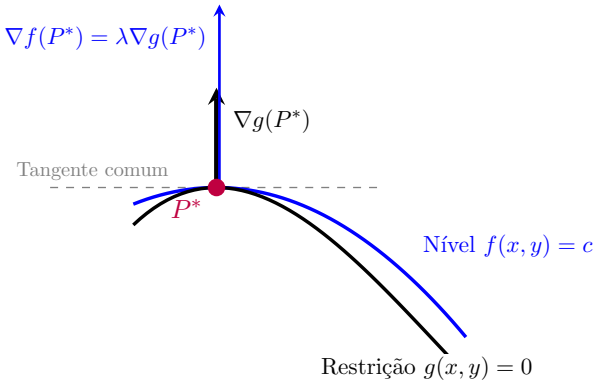


Figura 2: Condição de paralelismo: no ponto de ótimo P^*, a curva de nível e a restrição compartilham a mesma reta tangente. Consequentemente, seus vetores gradientes ∇f e ∇g apontam para a mesma direção perpendicular, tornando-se múltiplos escalares.

Para entender o método de forma simples, imagine que você está subindo uma montanha e quer atingir o ponto mais alto possível (o máximo da função f). Porém, você é obrigado a caminhar seguindo estritamente uma trilha demarcada no chão (a restrição $g = 0$). Enquanto a trilha estiver cruzando as linhas de altitude da montanha, significa que você ainda consegue subir mais se continuar andando. O ponto ideal, onde você não consegue mais subir nem descer mantendo-se na trilha, acontece exatamente onde a trilha corre perfeitamente paralela às linhas de altitude. Geometricamente, é o ponto de tangência onde os caminhos não se cruzam mais, revelando o ponto de máximo ou mínimo sob restrição.

Representação 3D da Montanha com Trilha de Restrição

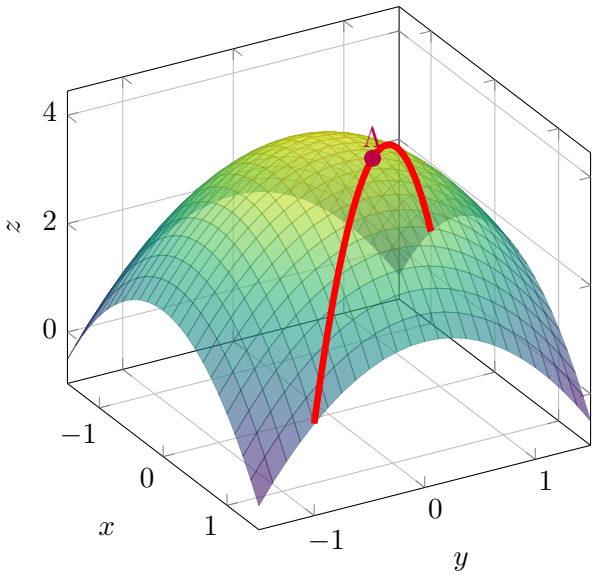


Figura 3: Superfície tridimensional representando o relevo de uma montanha. A linha vermelha destaca a restrição e o ponto Λ indica a altitude máxima permitida ao longo da trilha.

Além da geometria, essa ferramenta é extremamente poderosa no mundo real, especialmente na economia e na engenharia. Na vida prática, quase nunca podemos otimizar algo livremente, pois sempre temos limitações. Por exemplo, uma empresa que deseja maximizar seus lucros (função objetivo) está limitada pela quantidade de matéria-prima disponível no estoque (restrição). Da mesma forma, uma família que busca maximizar seu bem-estar na compra de alimentos está limitada pelo tamanho do seu salário do mês. O multiplicador de Lagrange (λ) funciona como um indicador que mede o "custo de oportunidade" de flexibilizar essa restrição, mostrando quanto o nosso objetivo ganharia se tivéssemos um pouquinho mais de recurso disponível.

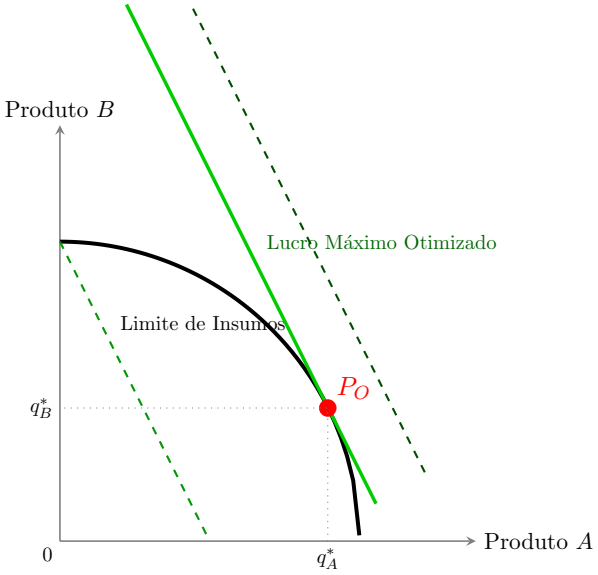


Figura 4: Otimização da firma: as linhas verdes representam os níveis de lucro crescente. O ponto P_O indica a combinação ideal de fabricação (q_A^*, q_B^*) que maximiza o rendimento sem violar o limite físico de matéria-prima disponível.

Abaixo, apresentamos o Teorema 2.1 ([4]). Ele é a principal ferramenta que vamos usar na Seção 3 para descobrir e provar a fórmula da distância entre um ponto e uma reta.

Teorema 2.1. *([4]) Seja $f(x, y)$ diferenciável no aberto A e seja $B = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$, onde g é de classe C^1 em A, e $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ em B. Uma condição necessária para que (x^*, y^*) seja extremante local de f em B é que exista um real λ tal que:*

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*) \tag{2}$$

Exemplo 2.2. ([4]). Determine os pontos de máximo/mínimo da função $f(x, y) = 3x + 2y$ com a restrição $x^2 + y^2 = 1$.

Demonstração. Seja $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Queremos os extremantes de f em $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$. Como g é de classe C^1 e $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ em B, os candidatos são as soluções do sistema Lagrangiano:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (3, 2) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Da primeira equação, temos $x = \frac{3}{2\lambda}$ e $y = \frac{1}{\lambda}$. Substituindo na restrição:

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \implies \lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{2} \tag{4}$$

Logo, os candidatos são $M = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ e $N = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$. Como B é compacto e $f(M) > f(N)$, resulta que M é ponto de máximo e N é ponto de mínimo de f em B. A interpretação geométrica desta otimização e o paralelismo dos gradientes podem ser visualizados na figura abaixo. □

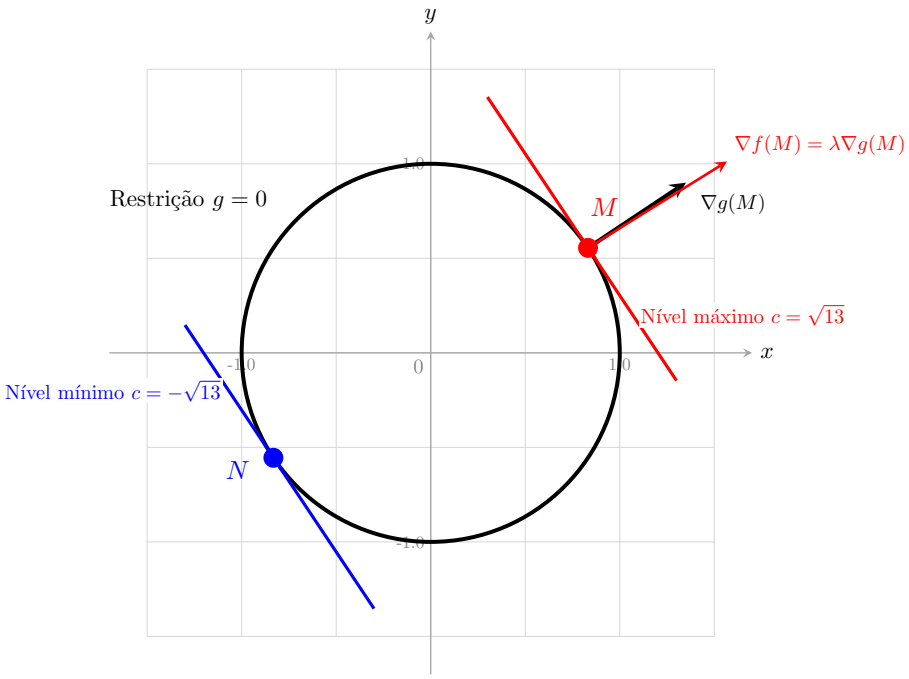


Figura 5: Representação geométrica do Exemplo 2.2. As retas tangentes vermelha e azul denotam os níveis extremos alcançados pela função objetivo linear sob a restrição do círculo unitário, evidenciando o paralelismo dos vetores gradientes nos pontos críticos M e N.

Exemplo 2.3. Determine o ponto pertencente ao plano $x + 2y + 3z = 14$ que se encontra a uma distância mínima da origem $(0, 0, 0)$.

Demonstração. Para simplificar os cálculos e eliminar a raiz quadrada, minimizamos o quadrado da distância euclidiana até a origem, definindo a função objetivo como $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. A restrição é dada pela equação do plano, ou seja, $g(x, y, z) = x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Calculando os respectivos vetores gradientes, obtemos $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ e $\nabla g(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, montamos o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = 2\lambda \\ 2z = 3\lambda \\ x + 2y + 3z - 14 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Isolando as variáveis em função do parâmetro escalar λ, temos $x = \frac{\lambda}{2}$, $y = \lambda$ e $z = \frac{3\lambda}{2}$. Substituindo diretamente esses valores na equação da restrição do plano:

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 2(\lambda) + 3\left(\frac{3\lambda}{2}\right) - 14 = 0 \implies \frac{\lambda + 4\lambda + 9\lambda}{2} = 14 \implies 7\lambda = 14 \implies \lambda = 2 \tag{6}$$

Substituindo $\lambda = 2$ de volta nas expressões das coordenadas, encontramos o ponto crítico único $P_C = (1, 2, 3)$. Geometricamente, este ponto corresponde à projeção ortogonal da origem sobre o plano, representando a distância mínima procurada, conforme ilustrado tridimensionalmente na Figura 6. □

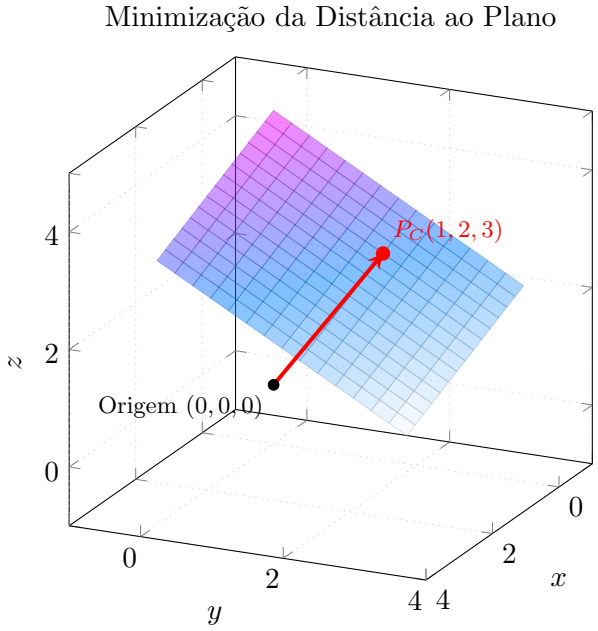


Figura 6: Visualização tridimensional do Exemplo 2.3. O segmento vermelho representa o vetor perpendicular ao plano que conecta a origem ao ponto mais próximo, $P_C(1,2,3)$, obtido via multiplicadores de Lagrange.

Exemplo 2.4. Um fazendeiro possui 40 metros de cerca para construir um galinheiro retangular aproveitando ao máximo o espaço disponível. Determine as dimensões do retângulo que maximizam a área sob essa restrição de perímetro.

Demonstração. Sejam x e y as dimensões dos lados do retângulo. Queremos maximizar a função área, dada por $f(x,y) = xy$. A restrição diz respeito ao perímetro disponível, ou seja, $2x + 2y = 40$, o que nos dá a função de restrição $g(x,y) = 2x + 2y - 40 = 0$.

Calculando os respectivos vetores gradientes, temos $\nabla f(x,y) = (y,x)$ e $\nabla g(x,y) = (2,2)$. Montando o sistema lagrangiano com base na proporcionalidade dos gradientes:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2\lambda \\ x = 2\lambda \\ 2x + 2y - 40 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Das duas primeiras equações, observamos imediatamente uma simetria geométrica fundamental: $x = y = 2\lambda$. Isto nos indica, de forma analítica direta, que o retângulo de área máxima sob perímetro fixo deve ser, obrigatoriamente, um quadrado. Substituindo essa igualdade na restrição do perímetro:

$$2(2\lambda) + 2(2\lambda) - 40 = 0 \implies 8\lambda = 40 \implies \lambda = 5 \tag{8}$$

Substituindo o valor do multiplicador $\lambda = 5$ de volta nas relações dos lados, obtemos $x = 10$ e $y = 10$. Portanto, o espaço ideal máximo é um quadrado de 10×10 metros, totalizando uma área de 100 m^2. A dinâmica geométrica deste problema clássico — onde as curvas de nível hiperbólicas da área tangenciam a reta linear do perímetro disponível — está ilustrada na Figura 7. □

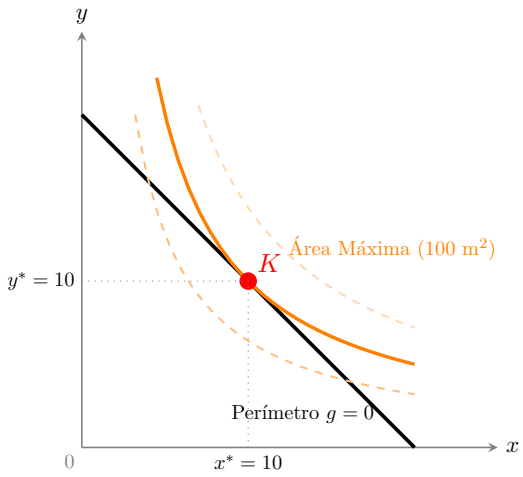


Figura 7: Otimização isoperimétrica do Exemplo 2.4. As curvas laranjas representam os níveis crescentes de área. O ponto de tangência K determina univocamente que a geometria quadrática ($x^* = y^*$) maximiza a superfície útil interna.

3 Demonstração da fórmula da distância entre ponto e reta

Queremos mostrar que a distância entre um ponto $P = (x_0, y_0)$ a uma reta $r : ax+by+c = 0$ é dada pela fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{9}$$

Seja $Q = (x, y)$ um ponto genérico sobre a reta r. A distância geométrica euclidiana entre P e Q é expressa por $d(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Minimizar d equivale a minimizar o seu quadrado. Definimos então a função objetivo $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, modelando o problema de otimização restrita:

$$\begin{cases} \text{minimizar } f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\ \text{sujeito a } ax + by + c = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Montando o sistema através dos gradientes $\nabla f = \lambda \nabla g$, obtemos:

$$\begin{cases} (2(x - x_0), 2(y - y_0)) = \lambda(a, b) \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \tag{11}$$

A partir das equações componentes do gradiente, isolamos os termos lineares:

$$x = \frac{a\lambda + 2x_0}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{b\lambda + 2y_0}{2} \tag{12}$$

Substituindo estas coordenadas diretamente na equação da reta restritiva:

$$a\left(\frac{a\lambda + 2x_0}{2}\right) + b\left(\frac{b\lambda + 2y_0}{2}\right) + c = 0$$

Explicitando o multiplicador de Lagrange λ, encontramos:

$$\lambda = \frac{-2(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \tag{13}$$

Substituindo o valor obtido de λ de volta nas relações dos componentes do sistema, deduzimos as diferenças algébricas:

$$x - x_0 = \frac{-a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad y - y_0 = \frac{-b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \tag{14}$$

Substituindo estas diferenças diretamente na nossa função objetivo quadrática $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left(\frac{-a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{-b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}\right)^2 \\ &= \frac{(a^2 + b^2)(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Sabendo que $f(x, y) = d^2$, extraímos a raiz quadrada em ambos os lados para retornar à unidade métrica original:

$$d^2 = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2} \implies d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Como queríamos demonstrar.

Referências

[1] Luiz Roberto Dante. *Matemática: Contexto e Aplicações*, volume único. Editora Ática, São Paulo, 2004.

[2] Fabio Martins de Leonardo. *Conexões com a Matemática*, volume 3. Editora Moderna, São Paulo, 3 edition, 2016.

[3] Elias Luíz Elizeu. Demonstração da fórmula de distância de ponto à reta utilizando relações métricas no triângulo retângulo. *Revista do Professor de Matemática*, (112), 2025.

[4] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um curso de Cálculo*, volume 2. Editora LTC, Rio de Janeiro, 5 edition, 2001.

[5] Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Perigo, and Nilson de Almeida. *Matemática: Ciência e Aplicações*, volume 3. Saraiva, São Paulo, 6 edition, 2010.

[6] Cláudio Xavier and Benigno Barreto. *Matemática por Toda Parte, Ensino Médio: Volume Geometria e Álgebra*. Editora FTD, São Paulo, 2020.