

O surpreendente comportamento das sequências ($\sin n$) e ($\cos n$)

Daniel Cordeiro de Moraes Filho ^{1,*} & Aldo Trajano Lourêdo ²

Resumo

Neste artigo abordamos de forma didática e pictográfica o comportamento das sequências $\sin n$ e $\cos n$, que são densas no intervalo fechado $[-1, 1]$ da reta real. Esse é um resultado surpreendente, mas muitas vezes desconhecido. Focando um público iniciante em Análise Real, usamos uma compilação bibliográfica sobre o assunto, porém, desenvolvendo uma maneira estimulante de apresentar os resultados, ilustrando-os com animações feitas no software dinâmico GeoGebra. As animações facilitam bastante o entendimento de como se comportam as sequências $\sin n$ e $\cos n$, e a demonstração de que são densas em $[-1, 1]$.

Palavras-chave: Ensino de Análise Real. Séries e sequências. Noções básicas de Topologia. Animações com o GeoGebra

MSC 2020: 40A05; 97I30

Abstract

In this article, we present a didactic and pictographic exploration of the behavior of the sequences $\sin n$ and $\cos n$, which are dense in the closed interval $[-1, 1]$. This is a surprising, yet often overlooked, result. Aimed at beginners in Real Analysis, we compile key references on the subject while developing an engaging approach to presenting the results, supported by dynamic animations created in GeoGebra. These animations greatly enhance the understanding of how the sequences $\sin n$ and $\cos n$ behave and help to illustrate the proof of their density in $[-1, 1]$.

Keywords: Teaching of Real Analysis. Series and sequences. Basic notions on Topology. Use of GeoGebra animations

Sumário

1	Introdução	2
2	Um pouco sobre as sequências ($\sin n$) e ($\cos n$)	3

¹ Unidade Acadêmica de Matemática, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campus Campina Grande, Paraíba, Brasil. E-mail: daniel@mat.ufcg.edu.br. ORCID: [0009-0005-3835-7894](https://orcid.org/0009-0005-3835-7894).

* Autor correspondente.

² Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campus Campina Grande, Paraíba, Brasil. E-mail: aldo@servidor.uepb.edu.br. ORCID: [0000-0002-5037-4022](https://orcid.org/0000-0002-5037-4022).

3	Resultados Básicos	5
4	Uma versão do Teorema de densidade Kronecker: um resultado de densidade na reta bem surpreendente e necessário	6
5	Um resultado crucial sobre a sequência $(1rad, 2rad, 3rad, \dots)$	10
6	Uma demonstração algébrica da densidade da sequência $(\sin n)$ no intervalo $[-1, 1]$	11

1 Introdução

Na Matemática há algumas séries e sequências que se destacam e se tornaram admiradas e estudadas por suas inesperadas características. Por exemplo, um resultado inesperado sobre séries é que a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é surpreendentemente divergente, e a surpresa decorre da extrema lentidão de sua divergência ([1], [3], [7]). Outro resultado que causa surpresa é que a sequência dos números primos, $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots)$, possui várias características intrigantes, entre essas, que seu termo geral não pode ser dado por um polinômio, a uma variável, com coeficientes inteiros, mas existem expressões bem esquisitas que fornecem todos os números primos. Dado um número natural, também é possível obter dois termos consecutivos da sequência de números primos cuja distância entre eles é maior do que esse número natural! ([8])

Nessa busca de séries e sequências interessantes, há duas sequências bastante simples de serem expostas, com propriedades, também, bastante surpreendentes, que nos parece não serem muito conhecidas ou estudadas:

$(\sin n)$ e $(\cos n)$, com $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, n medido em radianos.

Neste artigo, direcionado principalmente aos iniciantes, faremos um estudo detalhado, de forma didática, sobre o comportamento e convergência das sequências acima e de subsequências delas. Como ambas são sequências limitadas, o famoso Teorema de Bolzano-Weierstrass ([3]) estudado nas primeiras disciplinas de Análise Real, assegura que cada uma possui, pelo menos, uma subsequência convergente.

Provaremos bem mais do que acabamos de relatar: embora, as sequências $(\sin n)$ e $(\cos n)$ divergem, elas possuem infinitas subsequências convergentes especiais. O caráter especial dessas subsequências convergentes vem do fato inesperado, de que, dado um número real qualquer $L \in [-1, 1]$, existe uma subsequência $(\sin n_k)$ de $(\sin n)$, com

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k = L.$$

De maneira análoga, prova-se que para qualquer $M \in [-1, 1]$, existe uma subsequência $(\cos n_j)$ de $(\cos n)$, com

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \cos n_j = M.$$

Recorrendo a conceitos topológicos básicos da Análise Real, dados os conjuntos $A \subset B \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que A é **denso em** B , se dados qualquer $x \in B$ e qualquer $\varepsilon > 0$, tem-se $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, ou seja, existe $x_a \in A$, tal que, $|x - x_a| < \varepsilon$. Em termos de sequência, este conceito toma a forma: para todo $x \in B$, existe uma sequência $(x_n) \subset A$, tal que, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Nesse contexto, vamos mostrar que os conjuntos $\{\sin n; n \in \mathbb{N}, n \geq 1, n \text{ medido em radianos}\}$ e $\{\cos n; n \in \mathbb{N}, n \geq 1, n \text{ medido em radianos}\}$, com a topologia usual da reta, são densos no intervalo fechado $[-1, 1]$, um resultado que achamos surpreendente e não muito conhecido, às vezes, mesmo por aqueles cujo trabalho envolve especificamente a Matemática.

Diferentemente de abordagens existentes na literatura sobre o tema, nossa proposta visa estimular alunos de cursos de Cálculo ou de Análise Real para verem a importância dos conceitos que aprendem. Além disso, pretendemos ressaltar o uso desses conceitos para provar resultados inesperados, que os estimulem e despertem sua curiosidade para estudos mais avançados e para a pesquisa científica futura.

Com esse objetivo, nossa apresentação usa um enfoque geométrico, apresentando animações geométricas elaboradas com o GeoGebra, bem como simulações numéricas. Isso proporciona uma melhor visualização e compreensão desses resultados, particularmente para os iniciantes.

2 Um pouco sobre as sequências $(\sin n)$ e $(\cos n)$

Ao longo do texto, o ângulo n no círculo trigonométrico será sempre medido em radianos. Tudo o que mostraremos valer para a sequência $(\sin n)$, vale de modo análogo para a sequência $(\cos n)$ (ver, por exemplo, [7]). Por isso, nos concentraremos no estudo da sequência $(\sin n)$.

Antes de começarmos a estudar sequências envolvendo o seno, analisemos o comportamento geométrico da sequência:

$$(1 \text{ rad}, 2 \text{ rad}, 3 \text{ rad}, \dots), \quad (1)$$

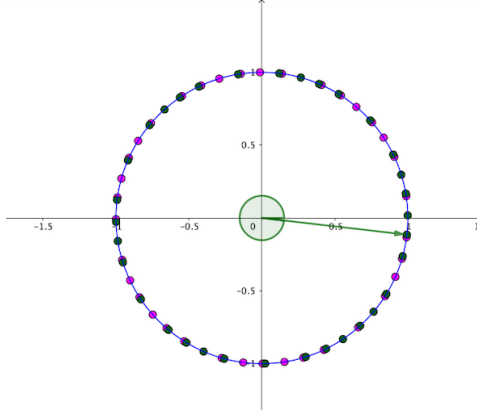
que é muito importante para o entendimento e apresentação do que queremos demonstrar.

Uma observação inicial e crucial sobre a sequência (1) é que nenhum de seus pontos se repete. De fato, se existissem inteiros positivos m e n tais que $n \text{ rad} = m \text{ rad} + 2k\pi \text{ rad}$, para algum $k \in \mathbb{Z}^+$, decorreria dessa igualdade que π seria um número racional, um absurdo!

Como $\frac{\pi}{2} \text{ rad} \approx 1,57 \text{ rad}$, observa-se que, ao marcar no círculo trigonométrico os elementos da sequência (1), no máximo dois de seus elementos consecutivos podem ser marcados em um único quadrante, e o próximo será marcado no quadrante seguinte. Um fato simples, porém importante é que a medida em radiano independe do raio do círculo considerado.

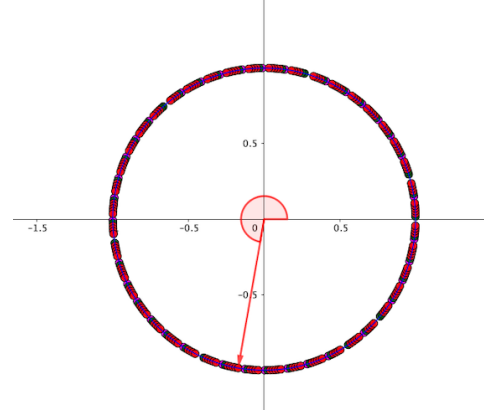
No que segue, faremos a marcação da sequência (1) no círculo trigonométrico. Observe a animação gráfica do resultado acima, ilustrando que todos os pontos da sequência são distintos. Os pontos mudam de cor nas animações, para conferirmos que os pontos variam em todo círculo. Nas Figuras 1 e 2 temos um print da tela do GeoGebra e neste link está disponível uma animação dessas figuras: <https://www.geogebra.org/m/qfj8abae>

Figura 1: Representação de alguns pontos no ciclo trigonométrico



Fonte: Os autores

Figura 2: Representação de vários pontos no ciclo trigonométrico



Fonte: Os autores

Voltaremos a trabalhar com a sequência (1) na Seção 5. No que segue, mostraremos que a sequência $(\sin n)$ diverge.

Teorema 2.1. *A sequência $(\sin n)$ é divergente.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que a sequência $(\sin n)$ seja convergente. Digamos, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = a \in \mathbb{R}$. Usando a fórmula do arco da soma, obtemos

$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1. \quad (2)$$

Passando ao limite em (2), resulta em

$$a = a \cos 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos n \sin 1). \quad (3)$$

De (3) deduzimos que a sequência $(\cos n \sin 1)$ converge e portanto a sequência $(\cos n)$ é convergente. Digamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = b \in \mathbb{R}$. Logo, a partir de (3), por passagem ao limite,

$$a = a \cos 1 + b \sin 1. \quad (4)$$

Agora, usando o fato de

$$\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1, \quad (5)$$

e passando ao limite em (5), obtemos

$$b = b \cos 1 - a \sin 1. \quad (6)$$

De (4) e (6) seguem as igualdades

$$ab = ab \cos 1 + b^2 \sin 1 \text{ e } -ab = -ab \cos 1 + a^2 \sin 1.$$

Adicionando membro a membro as igualdades anteriores, decorre que

$$(a^2 + b^2) \sin 1 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0.$$

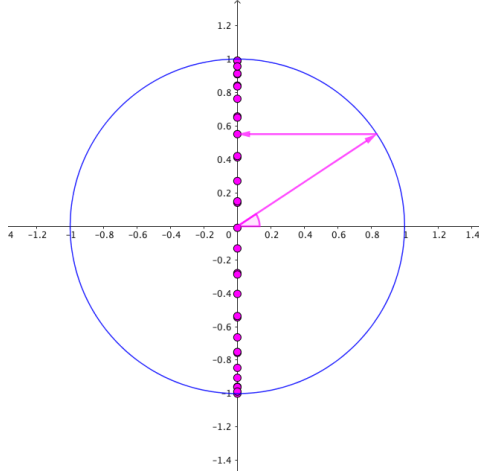
Assim, $a = b = 0$, o que é contradição, pois

$$a^2 + b^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 n + \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^2 n + \cos^2 n) = 1.$$

Portanto, a sequência $(\sin n)$ diverge, como queríamos demonstrar. $\square$

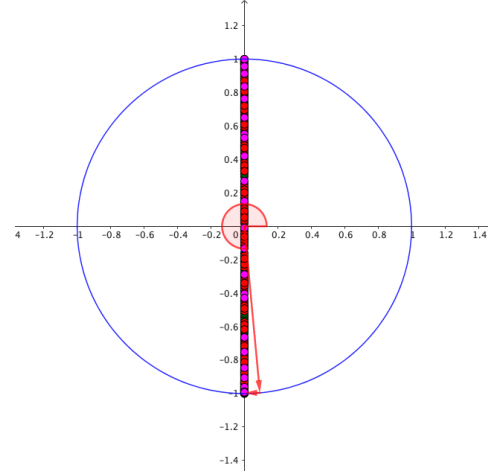
Veja geometricamente o que ocorre com essa sequência na animação que fizemos:

Figura 3: Alguns pontos da sequência $(\sin n)$ no intervalo $[-1, 1]$



Fonte: Os autores

Figura 4: Vários pontos da sequência $(\sin n)$, ilustrando sua densidade no intervalo $[-1, 1]$



Fonte: Os autores

Nas Figuras 3 e 4 temos um print da tela do GeoGebra e no link abaixo, temos a animação dessas figuras, as quais representam a densidade da sequência $(\sin n)$ no intervalo $[-1, 1]$. A animação encontra-se no link: <https://www.geogebra.org/m/fpe6cbbt>

Da demonstração do teorema anterior decorre o seguinte resultado:

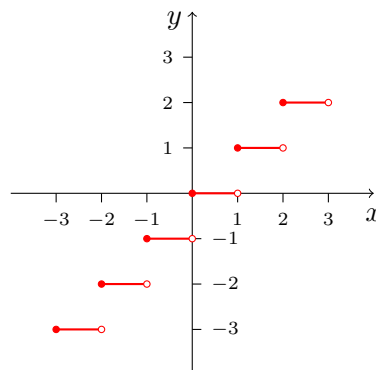
Corolário 2.2. *A sequência $(\cos n)$ diverge.*

3 Resultados Básicos

No que segue, apresentaremos duas funções muito úteis no que vamos fazer, bem como apresentaremos algumas propriedades dessas funções.

A função $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ é chamada **função parte inteira de x** . Abaixo, segue o gráfico da função $\lfloor x \rfloor$.

Figura 5: Gráfico da função parte inteira $\lfloor x \rfloor$



Fonte: Os autores

Como $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, então para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

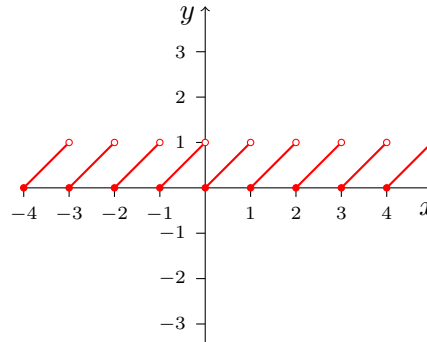
No decorrer deste artigo, para todo $x \in \mathbb{R}$, vamos utilizar a notação $\{x\}$ para representar a função $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, denominada **parte fracionária de x** .

Observe que

$$0 \leq \{x\} < 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

O gráfico da função parte fracionária de x está representado na figura a seguir:

Figura 6: Gráfico da função $\{x\}$



Fonte: Os autores

4 Uma versão do Teorema de densidade Kronecker: um resultado de densidade na reta bem surpreendente e necessário

Para apresentarmos uma demonstração algébrica de que, dado $L \in [-1, 1]$ qualquer, existe uma subsequência $(\sin n_k)$ de $(\sin n)$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k = L,$$

ou seja, que a sequência $(\sin n)$ é densa no intervalo $[-1, 1]$, faremos uso de um resultado de densidade na reta, devido ao matemático alemão Leopold Kronecker (1823-1891), que julgamos bem interessante e é o ponto de partida de nossa demonstração principal.

Para demonstrar esse resultado, necessitaremos do lema seguinte que utiliza as funções definidas na seção anterior.

Lema 4.1. *Seja $\alpha \notin \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existem $n' \in \mathbb{Z}^+$ e $m' \in \mathbb{Z}$, tais que*

$$|n' + m'\alpha| < \varepsilon.$$

Demonstração. Para o $\varepsilon > 0$ dado, pela Propriedade Arquimediana dos números reais, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Consideremos o seguinte conjunto

$$\mathcal{A} = \{\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \dots, \{(N+1)\alpha\}\}. \quad (8)$$

Esse conjunto tem as seguintes propriedades, a serem justificadas mais adiante:

1. $\{i\alpha\} \in (0, 1)$, para $i = 1, 2, \dots, N+1$;

2. Os números no conjunto $\mathcal{A}$ não estão em uma lista (necessariamente) monótona crescente ou decrescente;
3. É formado por números irracionais;
4. É formado por números distintos.

Justificativa da propriedade (1):

Como $\alpha \notin \mathbb{Q}$, α tem uma representação decimal infinita e não periódica. Portanto, por (7), sua parte fracionária $\{i\alpha\} \in (0, 1)$.

Justificativa da propriedade (2):

O Exemplo 4.2, mais adiante, ilustra o fato de uma sequência desse tipo não ser necessariamente monótona.

Justificativa da propriedade (3):

Ora,

$$\{j\alpha\} = j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor, \text{ onde } \lfloor j\alpha \rfloor \in \mathbb{Z}, \text{ para } j \in \{1, 2, \dots, N+1\}.$$

Como α é irracional e $\lfloor j\alpha \rfloor$ são números inteiros, tem-se $j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor \notin \mathbb{Q}$, e, portanto, $\{j\alpha\} \notin \mathbb{Q}$, o que justifica a afirmação (3).

Justificativa da propriedade (4):

Considere que

$$\alpha = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots, \text{ com } b_0 \in \mathbb{Z}^+ \text{ e } b_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, i \geq 1.$$

seja a expressão decimal infinita e não periódica do número irracional α .

Caso

$$\{i\alpha\} = \{j\alpha\}, \text{ para dois números } i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, N+1\},$$

então, seguindo a notação anterior, podemos representar

$$i\alpha = c_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

e

$$j\alpha = d_0, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

com $c_0, d_0 \in \mathbb{Z}^+$ e $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, i \geq 1$, o que implica em $j\alpha - i\alpha = c_0 - b_0$ e, portanto,

$$\alpha = \frac{c_0 - b_0}{j - i} \in \mathbb{Q},$$

o que é um absurdo, pois $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Portanto, o conjunto $\mathcal{A}$ é formado por elementos distintos, o que prova a afirmação (4).

Consideremos agora a seguinte união disjunta de intervalos abertos de comprimento $\frac{1}{N}$:

$$\left(0, \frac{1}{N}\right) \cup \left(\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right) \cup \dots \cup \left(\frac{N-2}{N}, \frac{N-1}{N}\right) \cup \left(\frac{N-1}{N}, 1\right). \quad (9)$$

Como temos N intervalos e $N+1$ elementos no conjunto $\mathcal{A}$, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos dois elementos do conjunto estão em um mesmo desses intervalos abertos. Logo, existem $r, s \in \{1, 2, \dots, N+1\}$, tais que

$$|\{r\alpha\} - \{s\alpha\}| < \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow |(r-s)\alpha + (\lfloor r\alpha \rfloor - \lfloor s\alpha \rfloor)| < \varepsilon.$$

Podemos considerar sem perda de generalidade que $\lfloor r\alpha \rfloor > \lfloor s\alpha \rfloor$ e daí a demonstração se encerra, bastando tomar $n' = \lfloor r\alpha \rfloor - \lfloor s\alpha \rfloor > 0$ e $m' = r - s$.

□

A fim de entender melhor e visualizar o que ocorre na demonstração anterior, ilustraremos a seguir exemplos do conjunto (8) e dos intervalos (9).

Exemplo 4.2. Veja os valores dos pontos da sequência (8), para o caso em que $\alpha = 2\pi$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ e $N = 11$. Observe que a sequência não é monótona, conforme ilustrado na Figura 7.

Figura 7: Exemplo de uma sequência do tipo (8)

Ponto	Valor aproximado
$\{2\pi\}$	0,28319
$\{4\pi\}$	0,56637
$\{6\pi\}$	0,84956
$\{8\pi\}$	0,13274
$\{10\pi\}$	0,41593
$\{12\pi\}$	0,69911
$\{14\pi\}$	0,98230
$\{16\pi\}$	0,26548
$\{18\pi\}$	0,54867
$\{20\pi\}$	0,83185
$\{22\pi\}$	0,11504
$\{24\pi\}$	0,39822

Fonte: Os autores

As Figuras 8 e 9 ilustram os intervalos (9) e os pontos do conjunto $\mathcal{A}$ para o caso acima. Observe os subintervalos do intervalo $[0, 1]$ que têm mais de um ponto do conjunto $\mathcal{A}$ e essa animação pode ser vista no link

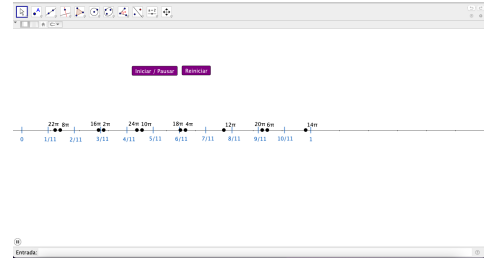
<https://www.geogebra.org/m/ezj4veec>

Figura 8: Divisão do intervalo $[0, 1]$ com $N = 11$



Fonte: Os autores

Figura 9: Animação com os pontos do conjunto $\mathcal{A}$ do exemplo 4.2



Fonte: Os autores

Provemos agora que, para qualquer número real x , existem números $n_x \in \mathbb{Z}^+$ e $m_x \in \mathbb{Z}$ tais que o número $n_x + m_x\alpha$ está tão próximo de x quanto queiramos. Nossa demonstração segue [2].

Teorema 4.3 (Uma versão do Teorema da densidade de Kronecker). *Dado $\alpha \notin \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$, o conjunto*

$$\mathcal{K} = \{n + m\alpha : n \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{Z}\} \quad (10)$$

é denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. A densidade decorre do fato de mostrarmos que existem $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ e $m_\varepsilon \in \mathbb{Z}$, tais que

$$|x - (n_\varepsilon + m_\varepsilon\alpha)| < \varepsilon. \quad (11)$$

Pelo Lema anterior, para o $\varepsilon > 0$ dado, existem $n' \in \mathbb{Z}^+$ e $m' \in \mathbb{Z}$, tais que $|n' + m'\alpha| < \varepsilon$, ou seja,

$$-\varepsilon < n' + m'\alpha < \varepsilon. \quad (12)$$

Como $\alpha \notin \mathbb{Q}$, temos $n' + m'\alpha \neq 0$, e, diante das desigualdades (12) vamos fazer a demonstração dividindo-a em dois casos:

1° **Caso:** $0 < n' + m'\alpha < \varepsilon$.

Primeiro, observe que, dado $x \in \mathbb{R}$, como $\alpha > 0$, pela Propriedade Arquimediana, existe $r \in \mathbb{N}$, tal que, $r\alpha > -x + \varepsilon$ e daí, $x + r\alpha > \varepsilon > 0$. Assim, $x + r\alpha > n' + m'\alpha$, o que implica

$$\frac{x + r\alpha}{n' + m'\alpha} > 1,$$

e portanto,

$$k' = \left\lfloor \frac{x + r\alpha}{n' + m'\alpha} \right\rfloor \in \mathbb{Z}^+.$$

Daí, e por (7), obtemos

$$\begin{aligned} 0 < \frac{x + r\alpha}{n' + m'\alpha} - k' < 1 &\Rightarrow 0 < x + r\alpha - k'n' - k'm'\alpha < n' + m'\alpha \\ &\Rightarrow 0 < x - (k'n' + (k'm' - r)\alpha) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Chamando $n_\varepsilon = k'n' \in \mathbb{Z}^+$ e $m_\varepsilon = k'm' - r \in \mathbb{Z}$, o teorema segue.

2° **Caso:** $-\varepsilon < n' + m'\alpha < 0$.

Nesse caso, consideremos $s \in \mathbb{Z}^+$, tal que $x - s\alpha < 0$ e

$$k'' = \left\lfloor \frac{x - s\alpha}{n' + m'\alpha} \right\rfloor \in \mathbb{Z}^+.$$

Ora, por (7), tem-se

$$\begin{aligned} 0 < \frac{x - s\alpha}{n' + m'\alpha} - k'' < 1 &\Rightarrow n' + m'\alpha < x - s\alpha - k''n' - k''m'\alpha < 0 \\ &\Rightarrow -\varepsilon < m' + n'\alpha < x - (k''n' + (s + k''m')\alpha). \end{aligned}$$

O teorema segue, chamando

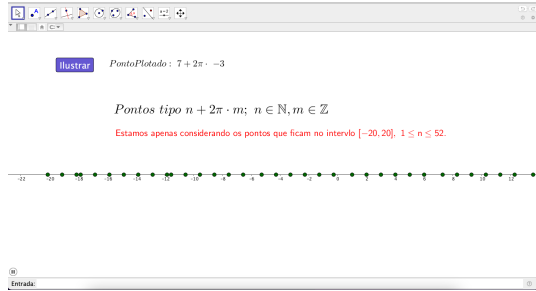
$$n_\varepsilon = k''n' \in \mathbb{Z}^+ \text{ e } m_\varepsilon = s + k''m' \in \mathbb{Z}.$$

Em qualquer dos casos, vale a desigualdade (11). □

Exemplo 4.4. Nas Figuras 10 e 11, temos um print da tela do GeoGebra e no link abaixo, a animação dessas figuras:

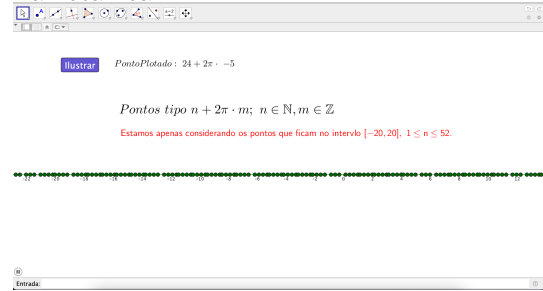
<https://www.geogebra.org/m/dqnfxjkg>

Figura 10: Animação de alguns pontos da forma $n + 2\pi m$



Fonte: Os autores

Figura 11: Animação de vários pontos da forma $n + 2\pi m$, ilustrando sua densidade na reta real



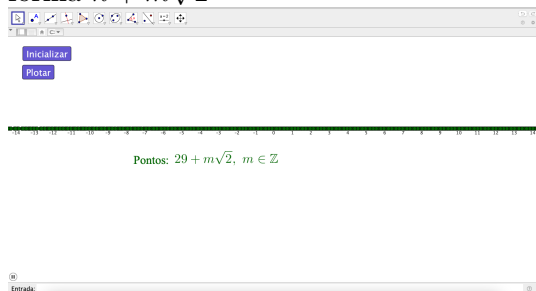
Fonte: Os autores

Exemplo 4.5. Observe agora uma animação do Teorema 4.3 para o caso $\alpha = \sqrt{2}$.

Nas Figuras 12 e 13 temos um print da tela do GeoGebra e no link abaixo, pode-se encontrar uma animação dessas figuras:

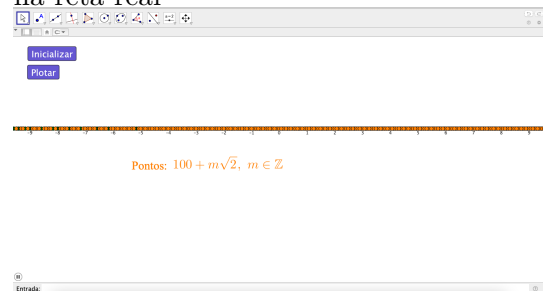
<https://www.geogebra.org/m/pbquwtmv>

Figura 12: Animação de alguns pontos da forma $n + m\sqrt{2}$



Fonte: Os autores

Figura 13: Animação de vários pontos da forma $n + m\sqrt{2}$, ilustrando sua densidade na reta real



Font reale: Os autores

5 Um resultado crucial sobre a sequência $(1rad, 2rad, 3rad, \dots)$

Seguindo [5], uma maneira informal de ver medidas angulares em radianos no círculo trigonométrico C é levar o ponto $0 \in \mathbb{R}$ no ponto $(1, 0) \in C$, encarar a reta real como uma linha inflexível de comprimento infinito, e enrolar essa linha em C , como um carretel, enrolando a parte dos números positivos no sentido anti-horário e a parte dos números negativos no sentido horário. Dessa forma, a medida positiva (no sentido anti-horário) em radianos dos arcos em C é igual ao comprimento deles, e a medida negativa (no sentido horário) em radianos é igual ao

comprimento deles com sinal negativo. De maneira mais formal, como o comprimento de C é 2π , “enrolar a reta na circunferência trigonométrica” é definir a função de Euler $E : \mathbb{R} \rightarrow C$, $t \mapsto E(t)$, com E , periódica, de período 2π ($E(t) = E(t')$ se, e somente se, $t = t' + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$). Para mais detalhes sobre a função de Euler, vide Elon [4] e [6].

Vejamos uma consequência dessa visão:

O teorema anterior assegurou que o conjunto $\mathcal{K} = \{n + m\alpha : n \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{Z}, \alpha \notin \mathbb{Q}, \alpha > 0\}$ é denso na reta real. Para o que queremos, vamos considerar o seguinte conjunto desse tipo:

$$\mathcal{K}_{2\pi} = \{n + 2m\pi : n \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Visto como pontos de $\mathbb{R}$, esse conjunto se espalha em toda reta, já olhando esse conjunto como pontos em C , há uma congruência em certos pontos, justamente aqueles em que $n + 2m\pi \equiv n$ (pois, nestes pontos temos m voltas no ciclo C , no sentido horário ou anti-horário, dependendo do sinal de m). Esse fato resulta em

$$\mathcal{K}_{2\pi} \subset \{1, 2, 3, \dots\}, \text{ tudo em } C, \text{ medidos em radianos.}$$

Em $\mathbb{R}$, dados $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, pelo Teorema 4.3, existem $n_k \in \mathbb{Z}^+$ e $m_k \in \mathbb{Z}$, tais que

$$|x - (n_k + 2\pi m_k)| < \frac{1}{k},$$

ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (n_k + 2\pi m_k) = x.$$

Uma vez que em C , tem-se $n_k \equiv n_k + 2\pi m_k$, esse resultado pode ser visto no círculo trigonométrico como:

Dado $x \in (0, 2\pi]$, existe uma subsequência $(n_k) \subset (n)$, tal que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = x.$$

O resultado anterior diz bem mais sobre a sequência $(1\text{rad}, 2\text{rad}, 3\text{rad}, \dots)$: não só seus pontos são distintos, como vimos na Seção 2, mais do que isso, seus pontos são densos em C !

6 Uma demonstração algébrica da densidade da sequência $(\sin n)$ no intervalo $[-1, 1]$

Encerramos o artigo demonstrando o teorema principal.

Teorema 6.1. *Dado $L \in [-1, 1]$, existe uma subsequência $(\sin n_k) \subset (\sin n)$, tal que,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k = L.$$

Demonstração. Dado $L \in [-1, 1]$, pela sobrejetividade da função $f(x) = \sin x$, existe $x_0 \in (0, 2\pi]$, tal que,

$$\sin x_0 = L.$$

Pelo resultado da última seção, para esse x_0 , existe uma subsequência $(n_k) \subset (n)$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = x_0$.

Daí, pela continuidade da função seno, resulta que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin(n_k) = \sin\left(\lim_{k \rightarrow \infty} n_k\right) = \sin x_0 = L,$$

□

Solicitamos aos leitores a retornarem à Animação 2, agora com o objetivo de perceber graficamente a densidade da sequência $\text{sen}(n)$ no intervalo $[-1, 1]$, cujos pontos estão marcados no eixo das ordenadas.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao professor Jaime Alves Barbosa Sobrinho da UAMat-UFCG pela contribuição na elaboração das figuras utilizando o software dinâmico GeoGebra.

Financiamento

O primeiro autor foi parcialmente financiado pelo PET-Programa de Educação Tutorial/FNDE, MEC-Governo do Brasil.

O segundo autor agradece a FAPESQ pelo apoio financeiro. Termo de Outorga nº 2457/2026, Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (FAPESQ)

Referências

- [1] Série harmônica – pôster. https://www.mat.ufcg.edu.br/pet/arquivos/Coloquio_Serie_Harmonica_Poster_Matheus_Arthur_Paulo_12-11-2012_v5.pdf. Página consultada em agosto de 2026.
- [2] Marco Bertola. The sequence (n) . <https://mypage.concordia.ca/mathstat/pgora/m364/Density.pdf>, 2009. Página consultada em agosto de 2026.
- [3] Elon Lages Lima. *Análise Real: Funções de uma Variável*, volume 1. IMPA, Rio de Janeiro, 2020.
- [4] Elon Lages Lima. *Números e Funções Reais*. Coleção do Profmat. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2023.
- [5] Elon Lages Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, and A. C. Morgado. *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1 of *Coleção do Professor de Matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática, 9 edition, 2016.
- [6] D. C. Morais Filho et al. *Dez ou Onze Temas Interessantes de Matemática Elementar*. EDUEFCG, 2015.
- [7] T. L. Radulescu, V. D. Radulescu, and Titu Andreescu. *Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis*. Springer, 2015.
- [8] Paulo Ribenboim. *Números Primos: Velhos Mistérios e Novos Recordes*. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.