Revista Tocantinense de Matematica
Vol. 1, n. 1, 2026, p. 1–17
DOI: 10.20873/retmat.uft.v1n1.2026.23172
Recebido: 28 de maio 2026
Aceito: 02 de junho 2026

A generalização da forma matricial híbrida das sequências de segunda ordem

Milena Carolina dos Santos Mangueira[1,*], Renata Passos Machado Vieira[2], Francisco Regis Vieira Alves[3], Paula Maria Machado Cruz Catarino[4], Eudes Antonio da Costa[5]

Resumo

Com base no conjunto numérico dos números híbridos, este artigo explora sua aplicação em sequências lineares e recursivas, com ênfase nas sequências de segunda ordem, como Fibonacci, Lucas, Pell, Mersenne, Repunidade, Jacobsthal e Oresme. O objetivo é apresentar as formas matriciais híbridas dessas sequências, abordando o cálculo de seus determinantes e a identidade de Cassini associada a eles, além de generalizar essas formas matriciais para índices inteiros não positivos. Embora a literatura já trate da matriz híbrida dessas sequências, suas formas matriciais ainda não foram devidamente abordadas. Para futuros trabalhos, propõe-se investigar possíveis aplicações desse conteúdo em outras áreas.

Palavras-chave: números híbridos; matrizes híbridas; sequências lineares recursivas

MSC 2020: 11B37; 11B39

Abstract

Based on the numerical set of hybrid numbers, this paper explores their application in linear and recursive sequences, with an emphasis on second-order sequences such as Fibonacci, Lucas, Pell, Mersenne, Repunit, Jacobsthal, and Oresme. The aim is to present the hybrid matrix forms of these sequences, addressing the calculation of their determinants and the Cassini identity associated with them, as well as generalizing these matrix forms for non-positive integer indices. Although the literature already discusses the hybrid matrix of these sequences, their matrix forms have not yet been adequately addressed. For future work, the application of this content in other areas will be investigated.

Keywords: hybrid numbers; hybrid matrices; recursive linear sequences

Sumário

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), Campus Fortaleza, Fortaleza, Brasil. E-mail: milenacarolina24@gmail.com. ORCID: 0000-0002-4446-155X. [*] Autor correspondente. [2] Secretaria da Educação do estado do Ceará, Ceará, Brasil. E-mail: re.passosm@gmail.com. ORCID: 0000-0002-1966-7097. [3] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), Campus Fortaleza, Fortaleza, Brasi. E-mail: fregis@ifce.edu.br. ORCID: 0000-0003-3710-1561. [4] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Vila Real, Portugal. E-mail: pcatarino23@gmail.com. ORCID: 0000-0001-6917-5093. [5] Universidade Federal do Tocantins (UFT), Tocantins, Brasil. E-mail: eudes@uft.edu.br. ORCID: 0000-0001-6684-9961.

1 Introdução

As sequências matemáticas são sucessões infinitas de termos, algumas das quais geradas por uma recorrência linear, conhecida como fórmula de recorrência, que permite determinar um termo da sequência a partir de seus antecessores imediatos. As sequências são classificadas de acordo com a ordem dessa recorrência, podendo ser de primeira, segunda, terceira ordem, entre outras. O estudo das sequências abre espaço para a aplicação desse conteúdo em diversas áreas, como física, biologia, engenharia, artes, entre outras.

Há um vasto estudo sobre sequências matemáticas, com destaque para a sequência de Fibonacci. Na literatura e na história da Matemática, são numerosos os trabalhos que exploram a generalização, extensão, complexificação e hipercomplexificação dessas sequências. Um exemplo disso é a hibridização de sequências, um processo que associa dois domínios matemáticos: as sequências numéricas e os números híbridos.

O conjunto dos números híbridos foi apresentado inicialmente por [12], no qual realizou a junção de três sistemas numéricos: complexo, hiperbólico e dual. Disto isto, apresentamos a definição de número híbrido.

Definição 1.1. Um número híbrido é dado por:

$$\mathbb{K} = \{z = a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i\}$$

O conjunto $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial com base $\{1, i, \varepsilon, h\}$ e coeficientes em um corpo, por exemplo aqui, consideramos o corpo dos reais. Além da adição entre números híbridos e a multiplicação escalar de um real por um número híbrido, temos também a multiplicação entre os elementos híbridos, conforme tabela de multiplicação das unidades híbridas, veja Tabela 1).

$\cdot$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1-h$	$\varepsilon+i$
ε	ε	$1+h$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon-i$	ε	1

Tabela 1: Tabela de multiplicação para um número híbrido.

Assim $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um domínio de integridade não comutativo, ou seja, é possível efetuar a soma e subtração entre dois números híbridos, multiplicação por escalar e o produto entre dois números híbridos. Em destaque, a multiplicação entre dois números híbridos é realizada distribuindo-se os termos à direita, preservando a ordem de multiplicação das unidades.

Existem inúmeros trabalhos utilizam números híbridos para ampliar o estudo de uma sequência numérica, no sentido de estender a sequência, estudando sua forma linear e a recorrência recursiva. São exemplos desse processo de hibridização e extensão de uma sequência: [4], [5], [10], [17], [18] e [20].

Não obstante, a matriz geradora de uma sequência permite obter os termos de uma sequência sem ser necessário obter os termos iniciais. Dessa forma, este trabalho, têm como objetivo apresentar as matrizes geradoras híbridas de recorrência de segunda ordem.

2 Sequências de segunda ordem

As sequências dadas por uma recorrência de segunda ordem, com coeficientes constantes, tem a forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, com $q \neq 0$. Para cada sequência de segunda ordem, é possível associá-la a uma equação do segundo grau da forma $x^2 + px + q = 0$ [7].

Diante disso, tem-se a sequência de Fibonacci, foi criada pelo matemático Leonardo Pisano (1180- 1250) conhecido como Fibonacci ou "filho de Bonaccio", em que apresenta a sua recorrência dada por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$, com os valores iniciais $F_0 = 0, F_1 = 1$ e apresenta a equação característica $x^2 - x - 1 = 0$, possuindo duas raízes reais. Assim, a sequência híbrida de Fibonacci é dada por: $FH_n = F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}\varepsilon + F_{n+3}h$ [6].

A sequência de Lucas, foi criada pelo matemático francês Édouard Anatole Lucas (1842-1891) e apresenta grande semelhança com a sequência de Fibonacci, possuindo a mesma relação de recorrência e alterando apenas as condições iniciais para $L_0 = 2, L_1 = 1$ e sua equação característica é dada por $y^2 - y - 1 = 0$. Logo, tem-se a sua relação de recorrência dada por $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2$. A sequência híbrida de Lucas é dada por: $LH_n = L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3}h$ [6].

A sequência de Pell, assim como a sequência de Fibonacci e Lucas, também é uma sequência numérica, linear e recorrente de segunda ordem, a sequência de Pell esta relacionada ao matemático inglês John Pell (1611-1685), apresentando a sua relação de recorrência dada por: $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, n \geq 2$, com os valores iniciais iguais a $P_0 = 0, P_1 = 1$ e sua equação característica é dada por $z^2 - 2z - 1 = 0$. A sequência híbrida de Pell é dada por: $PH_n = P_n + P_{n+1}i + P_{n+2}\varepsilon + P_{n+3}h$ [19].

A sequência de Mersenne, atribuída ao matemático francês Marin Mersenne (1588-1648), é uma sequência numérica, linear e recorrente de segunda ordem, apresentado pela relação de recorrência descrita por: $M_n = M_{n-1} - 2M_{n-2}, n \geq 2$, com os valores iniciais iguais a $M_0 = 2, M_1 = 3$ e sua equação característica dada por: $w^2 - 3w + 2 = 0$ [2]. A sequência híbrida de Mersenne é expressa por: $MH_n = M_n + M_{n+1}i + M_{n+2}\varepsilon + M_{n+3}h$ [3], [8] e a sequência híbrida de Oresme é dada por: $OH_n = O_n + O_{n+1}i + O_{n+2}\varepsilon + O_{n+3}h$ [8], [11].

A sequência Repunidade (ou repunit) é uma classe especial de números que consiste apenas no dígito 1 repetido várias vezes. O nome "repunidade" vem de “repeated unit”, que se refere à repetição do dígito 1 [13], [14]. A relação de recorrência dessa sequência é descrita por: $R_{n+2} = 11R_{n+1} - 10R_n$, $n \geq 0$, sendo $R_0 = 0$ e $R_1 = 1$ suas condições iniciais. Logo, tem-se que que o número híbrido Repunidade é apresentado como: $RH_n = R_n + R_{n+1}i + R_{n+2}\varepsilon + R_{n+3}h$.

A sequência de Jacobsthal é uma sequência numérica, linear e recorrente de segunda ordem, esta sequência carrega este nome em homenagem ao matemático Ernest Erich Jacobsthal (1882-1965), apresentando a sua relação de recorrência dada por: $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$, com os valores iniciais iguais a $J_0 = 0$, $J_1 = 1$ e sua equação característica é apresentada por $v^2 - v - 2 = 0$. A sequência híbrida de Jacobsthal é dada por: $JH_n = J_n + J_{n+1}i + J_{n+2}\varepsilon + J_{n+3}h$ [20].

A sequência de Oresme, originada por Nicole Oresme (1320-1382), assim como a sequência de Mersenne, é uma sequência linear recorrênte de segunda ordem, descrita pela relação de recorrência: $O_n = O_{n-1} - \frac{1}{4}O_{n-2}, n \geq 2$, com os valores iniciais iguais a $M_0 = 2, M_1 = 3$ e

$O_0 = \frac{1}{2}, O_1 = \frac{2}{4}$ e sua equação característica dada por: $t^2 - t + \dfrac{1}{4} = 0$ [2]. A sequência híbrida de Oresme é dada por: $OH_n = O_n + O_{n+1}i + O_{n+2}\varepsilon + O_{n+3}h$ [8], [11].

Doravante, serão realizados os estudos em torno das formas matriciais híbridas dessas sequências.

3 Forma matricial híbrida de uma sequência

Nesta seção, serão apresentada as formas matriciais híbridas das sequências de Fibonacci, Lucas, Pell, Mersenne, Repunidade, Jacobsthal e Oresme, com referências à suas respectivas recorrências e os trabalhos de [1], [9], [10], [15], [20], [21] e [22]. Assim, este estudo é motivado pelo processo de generalização desses números apresentando sua extensão para os números inteiros não positivos e suas respectivas matrizes híbridas.

3.1 Sequência de Fibonacci

Nesta subseção apresentaremos a forma matricial híbrida para a sequência de Fibonacci para índice inteiros não negativo e não positivo.

A conhecida sequência de Fibonacci de números inteiros $\{F_n\}_{n\geq 0}$ é definida como $F_{n+2} = F_n + F_{n+1},\ n \geq 0$, com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, a sequência A000045 na OEIS [16]. A sequência de Fibonacci é estendida para todo número inteiro pela relação $F_{-n} = (-1)^{n-1}F_n$. Na Tabela 2 listamos alguns termos da sequência de Fibonacci:

Tabela 2: Termos da sequência de Fibonacci.

$\cdots$	F_{-6}	F_{-5}	F_{-4}	F_{-3}	F_{-2}	F_{-1}	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	$\cdots$
$\cdots$	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	$\cdots$

Definição 3.1. A relação de recorrência da sequência híbrida de Fibonacci para $n \geq 1$, é dada por:

$$FH_{n+1} = FH_n + FH_{n-1},$$

sendo $FH_0 = i + \varepsilon + 2h$ e $FH_1 = 1 + i + 2\varepsilon + 3h$ os termos iniciais desta sequência.

Definição 3.2. Os números híbridos de Fibonacci com índices negativos são definidos por:

$$FH_{-n} = F_{-n} + F_{-n+1}i + F_{-n+2}\varepsilon + F_{-n+3}h,$$

sendo $FH_{-1} = 1 + \varepsilon + h$ e $FH_{-2} = -1 + i + h$ os termos iniciais desta sequência.

Façamos $\phi_n = \begin{bmatrix} FH_{n+1} & FH_n \\ FH_n & FH_{n-1} \end{bmatrix}$ a forma matricial híbrida de Fibonacci. O próximo resultado, para todo $n \geq 0$, a matriz híbrida de Fibonacci ϕ_n descrevera cada elemento da sequência FH_n em termos das potências da matriz ϕ_n na posição a_{11}, usando o seguinte produto.

Teorema 3.3. *A forma matricial híbrida de Fibonacci, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} FH_{n+1} & FH_n \\ FH_n & FH_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FH_1 & FH_0 \\ FH_0 & FH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n, \tag{1}$$

em que $\{FH_n\}_{n\geq\ 0}$ é a sequencia híbrida de Fibonacci.

Demonstração. Utilizando o princípio da indução infinita em n, tem-se que:

Para $n = 1$:

$$\begin{bmatrix} FH_1 & FH_0 \\ FH_0 & FH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FH_1 + FH_0 & FH_1 \\ FH_0 + FH_{-1} & FH_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FH_2 & FH_1 \\ FH_1 & FH_0 \end{bmatrix} .$$

Supondo que seja válido para algum k inteiro, com $1 \leq k$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} FH_1 & FH_0 \\ FH_0 & FH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} FH_{k+1} & FH_k \\ FH_k & FH_{k-1} \end{bmatrix} .$$

Mostraremos que é válido para $k + 1$. Vejamos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} FH_1 & FH_0 \\ FH_0 & FH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} FH_1 & FH_0 \\ FH_0 & FH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} FH_{k+1} & FH_k \\ FH_k & FH_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} FH_{k+1} + FH_k & FH_{k+1} \\ FH_k + FH_{k-1} & FH_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} FH_{k+2} & FH_{k+1} \\ FH_{k+1} & FH_k \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

o que garante a validade do resultado. □

Considere a expressão da esquerda na Equação (1) para a matriz ϕ_n, temos que o determinante desta matriz resulta em

$$det(\phi_n) = FH_{n+1}FH_{n-1} - FH_n^2.$$

Dada a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, temos que $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$. Agora, com a ajuda da propriedade do determinante de um produto de matrizes, concluímos que $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = (-1)^n$.

Agora vamos determinar a identidade de Cassini para a sequência híbrida de Fibonacci $\{FH_n\}_{n\geq 0}$.

Proposição 3.4. *Para todo inteiro não negativo n, temos que a identidade ocorre:*

$$FH_{n+1}FH_{n-1} - FH_n^2 = (-1)^{n+1}(2i + 5\varepsilon + 3h) .$$

sendo $\{FH_n\}_{n\geq 0}$ a sequencia híbrida de Fibonacci.

Demonstração. Vamos calcular o determinante da matriz ϕ_n usando o produto de matrizes da direita na Equação (1). Vejamos:

$$\begin{aligned} & \det\left(\begin{bmatrix} FH_1 & FH_0 \\ FH_0 & FH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n\right) \\ = \ & \det \begin{bmatrix} FH_1 & FH_0 \\ FH_0 & FH_{-1} \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \\ = \ & (-1)^n(FH_1FH_{-1} - FH_0^2) \\ = \ & (-1)^n \left[(1 + i + 2\varepsilon + 3h)(1 + \varepsilon + h) - (i + \varepsilon + 2h)^2\right] \\ = \ & (-1)^n(2i + 5\varepsilon + 3h), \end{aligned}$$

como desejávamos. □

O próximo resulta expressa a forma matricial híbrida de Fibonacci para índice inteiro não positivo. Prova-se usando indução matemática em n, tal como fizemos no Teorema 3.3.

Teorema 3.5. *A forma matricial híbrida de Fibonacci para índice inteiro não positivo, $n > 0$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} FH_1 & FH_0 \\ FH_0 & FH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} FH_{-n+1} & FH_{-n} \\ FH_{-n} & FH_{-n-1} \end{bmatrix},$$

em que $\{FH_n\}_{n\geq 0}$ é a sequencia híbrida de Fibonacci.

3.2 Sequência de Lucas

Nesta subseção, apresentaremos a formulação matricial híbrida da sequência de Lucas, considerando índices inteiros tanto não negativos quanto não positivos.

A sequência de Lucas de números inteiros $\{L_n\}_{n\geq 0}$ é definida pela mesma relação de recorrência da sequência de Fibonacci, ou seja, $L_{n+2} = L_n + L_{n+1},\ n \geq 0$, com $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$, a sequência listado como A000032 na OEIS [16]. A sequência de Lucas é estendida para todo número inteiro pela relação $L_{-n} = (-1)^n L_n$. Na Tabela 3 listamos alguns termos da sequência de Lucas:

Tabela 3: Termos da sequência de Lucas.

$\cdots$	L_{-6}	L_{-5}	L_{-4}	L_{-3}	L_{-2}	L_{-1}	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	$\cdots$
$\cdots$	18	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11	18	$\cdots$

Definição 3.6. A fórmula de recorrência da sequência híbrida de Lucas para $n \geq 1$, é dada por:

$$LH_{n+1} = LH_n + LH_{n-1},$$

sendo $LH_0 = 2 + i + 3\varepsilon + 4h$ e $LH_1 = 1 + 3i + 4\varepsilon + 7h$ os termos iniciais desta sequência.

Definição 3.7. Os números híbridos de Lucas com índices negativos são definidos por:

$$LH_{-n} = L_{-n} + L_{-n+1}i + L_{-n+2}\varepsilon + L_{-n+3}h,$$

sendo $LH_{-1} = -1 + 2i + \varepsilon + 3h$ e $LH_{-2} = 3 - i + 2\varepsilon + h$ os termos iniciais desta sequência.

Os dois principais resultados desta subseção apresentam a forma matricial híbrida da sequência de Lucas para índices inteiros não negativo e não positivo. A demonstração é feita por indução matemática em n, seguindo o mesmo procedimento utilizado no Teorema 3.3.

Seja $\lambda_n = \begin{bmatrix} LH_{n+1} & LH_n \\ LH_n & LH_{n-1} \end{bmatrix}$ a matriz híbrida de Lucas. O próximo resultado mostra que, para todo $n \geq 0$, a matriz λ_n descreve cada elemento da sequência LH_n em termos das potências da matriz λ_n, especificamente na entrada a_{11}, conforme o seguinte produto.

Teorema 3.8. *A forma matricial híbrida de Lucas, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} LH_{n+1} & LH_n \\ LH_n & LH_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LH_1 & LH_0 \\ LH_0 & LH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n, \quad (2)$$

sendo LH_n o n-ésimo termo da sequencia híbrida de Lucas.

Se considerarmos a expressão à esquerda na equação (2) para a matriz λ_n, temos que o determinante desta matriz dá

$$\det(\lambda_n) = LH_{n+1}LH_{n-1} - LH_n^2 \ .$$

Dada a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, temos que $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$. Agora, com a ajuda da propriedade do determinante de um produto de matrizes, concluímos que $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = (-1)^n$.

Agora vamos determinar a identidade de Cassini para a sequência híbrida de Lucas $\{LH_n\}_{n\geq 0}$.

Proposição 3.9. *Para todo inteiro não negativo n, temos que a identidade ocorre:*

$$LH_{n+1}LH_{n-1} - LH_n^2 = (-1)^{n+1}(10i + 25\varepsilon + 15h) \ .$$

sendo $\{LH_n\}_{n\geq 0}$ a sequencia híbrida de Lucas.

Demonstração. Vamos calcular o determinante da matriz λ_n usando o produto de matrizes da direita na Equação (2). Vejamos:

$$\begin{aligned}
& \det\left(\begin{bmatrix} LH_1 & LH_0 \\ LH_0 & LH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n\right) \\
= \ & \det \begin{bmatrix} LH_1 & LH_0 \\ LH_0 & LH_{-1} \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \\
= \ & (-1)^n(LH_1LH_{-1} - LH_0^2) \\
= \ & (-1)^n \left[(1 + 3i + 4\varepsilon + 7h)(-1 + 2i + \varepsilon + 3h) - (2 + i + 3\varepsilon + 4h)^2\right] \\
= \ & (-1)^n(-10i - 25\varepsilon - 15h) \\
= \ & (-1)^{n+1}(10i + 25\varepsilon + 15h),
\end{aligned}$$

como desejávamos. □

O resultado a seguir apresenta a forma matricial híbrida da sequência de Lucas para índices inteiros não positivo.

Teorema 3.10. *A forma matricial híbrida de Lucas para índice inteiro não positivo, $n > 0$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} LH_{-n+1} & LH_{-n} \\ LH_{-n} & LH_{-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LH_1 & LH_0 \\ LH_0 & LH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^n .$$

3.3 Sequência de Pell

Nesta subseção, será apresentada a formulação matricial híbrida da sequência de Pell, abrangendo índices inteiros tanto não positivos quanto não negativos.

A sequência de Pell, denotada por $\{P_n\}_{n\geq 0}$, é definida pela seguinte relação de recorrência: $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, \quad n \geq 0$, com os valores iniciais $P_0 = 0$ e $P_1 = 1$. Esta sequência corresponde à entrada A000129 na OEIS [16]. A sequência de Pell pode ser estendida para todos os inteiros, utilizando a relação $P_{-n} = (-1)^n P_n$. A Tabela 4 apresenta alguns termos dessa sequência:

Tabela 4: Termos da sequência de Pell.

$\cdots$	P_{-6}	P_{-5}	P_{-4}	P_{-3}	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	$\cdots$
$\cdots$	70	-29	12	-5	2	-1	0	1	2	5	12	29	70	$\cdots$

Definição 3.11. A fórmula de recorrência da sequência híbrida de Pell para $n \geq 1$, é dada por:

$$PH_{n+1} = 2PH_n + PH_{n-1},$$

com $PH_0 = i + 2\varepsilon + 5h$ e $PH_1 = 1 + 2i + 5\varepsilon + 12h$ os valores iniciais desta sequência.

Definição 3.12. Os números híbridos de Pell com índices negativos são definidos por:

$$PH_{-n} = P_{-n} + P_{-n+1}i + P_{-n+2}\varepsilon + P_{-n+3}h,$$

sendo $PH_{-1} = -1 + \varepsilon + 2h$ e $PH_{-2} = -2 + i + h$ os termos iniciais desta sequência.

Os dois principais resultados desta subseção apresentam a forma matricial híbrida da sequência de Pell para índices inteiros não negativos e não positivos. A prova é conduzida por meio de indução matemática em n, seguindo o mesmo procedimento adotado no Teorema 3.3.

Agora, tomemos $\delta_n = \begin{bmatrix} PH_{n+1} & PH_n \\ PH_n & PH_{n-1} \end{bmatrix}$ a matriz híbrida de Pell. O próximo resultado mostra que, para todo $n \geq 0$, a matriz δ_n descreve cada elemento da sequência PH_n em termos das potências da matriz δ_n, especificamente na entrada a_{11}, conforme o seguinte produto.

Teorema 3.13. *A forma matricial híbrida de Pell, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} PH_{n+1} & PH_n \\ PH_n & PH_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PH_1 & PH_0 \\ PH_0 & PH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n, \tag{3}$$

sendo PH_n o n-ésimo termo da sequencia híbrida de Pell.

Ao analisarmos a expressão à esquerda da equação (3) para a matriz δ_n, o determinante dessa matriz é dado por:

$$det(\delta_n) = \begin{vmatrix} PH_{n+1} & PH_n \\ PH_n & PH_{n-1} \end{vmatrix} = PH_{n+1}PH_{n-1} - PH_n^2.$$

Dada a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, temos que det $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$. Agora, com a ajuda da propriedade do determinante de um produto de matrizes, concluímos que det $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = (-1)^n$.

Agora vamos determinar a identidade de Cassini para a sequência híbrida de Pell $\{PH_n\}_{n\geq 0}$.

Proposição 3.14. *Para todo inteiro não negativo n, temos que a identidade ocorre:*

$$PH_{n+1}PH_{n-1} - PH_n^2 = (-1)^n(-3 + 2i + 2\varepsilon - 12h) .$$

sendo $\{PH_n\}_{n\geq 0}$ a sequencia híbrida de Pell.

Demonstração. Vamos calcular o determinante da matriz δ_n usando o produto de matrizes da direita na Equação (3). Vejamos:

$$\begin{aligned}
&\det\left(\begin{bmatrix} PH_1 & PH_0 \\ PH_0 & PH_{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}^n\right) \\
= &\det\begin{bmatrix} PH_1 & PH_0 \\ PH_0 & PH_{-1}\end{bmatrix}\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}^n \\
= &(-1)^n(PH_1PH_{-1} - PH_0^2) \\
= &(-1)^n\left[(1+2i+5\varepsilon+12h)(-1+\varepsilon+2h) - (i+2\varepsilon+5h)^2\right] \\
= &(-1)^n(-3+2i+2\varepsilon-12h)
\end{aligned}$$

como desejávamos. □

Por fim, apresentamos a forma matricial híbrida de Pell para índice inteiro não positivo.

Teorema 3.15. *A forma matricial híbrida de Pell para índice inteiro não positivo, $n > 0$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} PH_{-n+1} & PH_{-n} \\ PH_{-n} & PH_{-n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PH_1 & PH_0 \\ PH_0 & PH_{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\end{bmatrix}^n,$$

sendo PH_n o n-ésimo termo da sequencia híbrida de Pell.

3.4 Sequência de Mersenne

Esta subseção apresenta uma formulação de matriz híbrida da sequência de Mersenne, abrangendo índices inteiros não positivos e não negativos.

A sequência de Mersenne, representada por $\{M_n\}_{n\geq 0}$, é definida pela seguinte relação de recorrência: $M_{n+2} = 2M_{n+1} + M_n, \quad n \geq 0$, com os valores iniciais $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$. Essa sequência corresponde à entrada A000225 na OEIS [16]. A extensão da sequência de Mersenne para números inteiros é dada pela fórmula $M_{-n} = -\frac{M_n}{2^n}$. Na Tabela 5, apresentamos alguns termos da sequência de Pell:

Tabela 5: Termos da sequência de Mersenne.

$\cdots$	M_{-6}	M_{-5}	M_{-4}	M_{-3}	M_{-2}	M_{-1}	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	$\cdots$
$\cdots$	$-\frac{63}{64}$	$-\frac{31}{32}$	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	3	7	15	31	63	$\cdots$

A seguir apresentamos a definição para uma sequência híbrida de Mersenne com índice não negativo e não positivo.

Definição 3.16. A fórmula de recorrência da sequência híbrida de Mersenne para $n \geq 0$, é dada por:

$$MH_{n+2} = 3MH_{n+1} - 2MH_n,$$

sendo $MH_0 = i + 3\varepsilon + 7h$ e $MH_1 = 1 + 3i + 7\varepsilon + 15h$ os termos iniciais desta sequência.

Definição 3.17. Os números híbridos de Mersenne com índices negativos são definidos por:

$$MH_{-n} = M_{-n} + M_{-n+1}i + M_{-n+2}\varepsilon + M_{-n+3}h,$$

sendo $MH_{-1} = -\dfrac{1}{2} + \varepsilon + 3h$ e $MH_{-2} = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}i + h$ os termos iniciais desta sequência.

Os dois principais resultados desta subseção apresentam a forma matricial híbrida da sequência de Mersenne para índices inteiros não negativo e para índices inteiros não positivo. Como antes, a demonstração é feita por indução matemática em n, seguindo o mesmo procedimento utilizado no Teorema 3.3.

Seja $\epsilon_n = \begin{bmatrix} MH_{n+1} & MH_n \\ MH_n & MH_{n-1} \end{bmatrix}$ a matriz híbrida de Mersenne. O próximo resultado demonstra que, para todo $n \geq 0$, a matriz ϵ_n expressa cada elemento da sequência MH_n em função das potências da matriz ϵ_n. Mais especificamente, o elemento MH_{n+1} pode ser obtido na entrada a_{11} da matriz ϵ_n.

Teorema 3.18. *A forma matricial híbrida de Mersenne, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} MH_{n+1} & MH_n \\ MH_n & MH_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MH_1 & MH_0 \\ MH_0 & MH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^n , \tag{4}$$

sendo $\{MH_n\}_{n\geq 0}$ a sequencia híbrida de Mersenne.

Considere a matriz da esquerda na Equação (4) para a matriz ϵ_n, temos que o determinante desta matriz resulta em

$$det(\epsilon_n) = MH_{n+1}MH_{n-1} - MH_n^2 .$$

Dada a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, temos que $\det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = 2$. Agora, com a ajuda da propriedade do determinante de um produto de matrizes, concluímos que $\det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^n = 2^n$.

Agora vamos determinar a identidade de Cassini para a sequência híbrida de Mersenne $\{MH_n\}_{n\geq 0}$.

Proposição 3.19. *Para todo inteiro não negativo n, temos que a identidade ocorre:*

$$MH_{n+1}MH_{n-1} - MH_n^2 = 2^n(-13 + 15i + \varepsilon - 15h) .$$

sendo $\{MH_n\}_{n\geq 0}$ a sequencia híbrida de Mersenne.

Demonstração. Vamos calcular o determinante da matriz ϵ_n usando o produto de matrizes da direita na Equação (4). Vejamos:

$$\begin{aligned}
& \det\left(\begin{bmatrix} MH_1 & MH_0 \\ MH_0 & MH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^n\right) \\
= \; & \det \begin{bmatrix} MH_1 & MH_0 \\ MH_0 & MH_{-1} \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^n \\
= \; & 2^n(MH_1MH_{-1} - MH_0^2) \\
= \; & 2^n\left[(1 + 3i + 7\varepsilon + 15h)\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon + 3h\right) - (i + 3\varepsilon + 7h)^2\right] \\
= \; & 2^{n-1}(-13 + 15i + \varepsilon - 15h),
\end{aligned}$$

como desejávamos. □

Por fim, apresentamos a forma matricial híbrida de Mersenne para índice inteiro não positivo.

Teorema 3.20. *Para todo inteiro não negativo $n > 0$, temos que:*

$$\begin{bmatrix} MH_{-n} & MH_{-n} \\ MH_{-n+1} & MH_{-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MH_0 & MH_{-1} \\ MH_1 & MH_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^n ,$$

em que $\{MH_n\}_{n\geq 0}$ é a sequencia híbrida de Mersenne.

3.5 Sequência Repunidade

Esta subseção apresenta uma formulação de matriz híbrida da sequência repunidade, a sequência formada apenas pelos números repunidades, correspondendo à sequência $A002275$ na OEIS [16], conforme [13] e [14], abrangendo índices inteiros não positivos e não negativos.

Tabela 6: Termos da sequência de Repunidade.

$\cdots$	R_{-5}	R_{-4}	R_{-3}	R_{-2}	R_{-1}	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	$\cdots$
$\cdots$	$-\frac{11111}{10^5}$	$-\frac{1111}{10^4}$	$-\frac{111}{10^3}$	$-\frac{11}{10^2}$	$-\frac{1}{10}$	0	1	11	111	1111	11111	$\cdots$

Em continuidade, apresentamos a definição de um número híbrido repunidade. Primeiro a definição de um número híbrido repunidade com índice positivo.

Definição 3.21. A fórmula de recorrência da sequência híbrida repunidade para $n \geq 0$, é dada por:

$$RH_{n+2} = 11RH_{n+1} - 10RH_n,$$

sendo $RH_0 = i + 11\varepsilon + 111h$ e $MH_1 = 1 + 11i + 111\varepsilon + 1111h$ os termos iniciais desta sequência.

Agora a definição de um número híbrido repunidade com índice negativo.

Definição 3.22. Os números híbridos de repunidade com índices negativos são definidos por:

$$RH_{-n} = R_{-n} + R_{-n+1}i + R_{-n+2}\varepsilon + R_{-n+3}h,$$

sendo $RH_{-1} = -\dfrac{1}{10} + \varepsilon + 11h$ e $RH_{-2} = -\dfrac{11}{100} - \dfrac{1}{10}i + 11h$ os termos iniciais desta sequência.

Os dois principais resultados desta subseção apresentam a forma matricial híbrida da sequência repunidade para índices inteiros não negativo e para índices inteiros não positivo. A demonstração também é feita por indução matemática em n, seguindo o mesmo procedimento utilizado no Teorema 3.3.

Seja $\rho_n = \begin{bmatrix} RH_{n+1} & RH_n \\ RH_n & RH_{n-1} \end{bmatrix}$ a matriz híbrida repunidade. O próximo resultado demonstra que, para todo $n \geq 0$, a matriz ρ_n descreve cada elemento da sequência RH_n em termos das potências da matriz ρ_n, mais especificamente na entrada a_{11}, como indicado pelo seguinte produto.

Teorema 3.23. *A forma matricial híbrida repunidade, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} RH_{n+1} & RH_n \\ RH_n & RH_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RH_1 & RH_0 \\ RH_0 & RH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}^n, \tag{5}$$

sendo $\{RH_n\}_{n\geq 0}$ a sequencia híbrida repunidade.

Considere a expressão da esquerda na Equação (5) para a matriz ρ_n, temos que o determinante desta matriz resulta em

$$det(\rho_n) = RH_{n+1}RH_{n-1} - RH_n^2 .$$

Dada a matriz $\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$, temos que $\det \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} = 10$. Agora, fazendo uso da propriedade do determinante de um produto de matrizes, concluímos que $\det \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}^n = 10^n$.

Agora vamos determinar a identidade de Cassini para a sequência híbrida repunidade $\{RH_n\}_{n\geq 0}$.

Proposição 3.24. *Para $n \geq 1$, vale a seguinte identidade:*

$$RH_{n+1}RH_{n-1} - RH_n^2 \;=\; 10^{n-1}(121999 - i - 2210\varepsilon - 2111h)\ ,$$

sendo $\{RH\}_{n\geq 0}$ a sequência híbrida repunidade .

Demonstração. Veja que

$$\begin{aligned} & det\left(\begin{bmatrix} RH_1 & RH_0 \\ RH_0 & RH_{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}^n\right) \\ = \;& 10^n(RH_1RH_{-1} - RH_0^2) \\ = \;& 10^n\left[(1 + 11i + 111\varepsilon + 1111h)\left(-\frac{1}{10} + \varepsilon + 11h\right) - (i + 11\varepsilon + 111h)^2)\right] \\ = \;& 10^{n-1}(-1001 + 1199i + 9\varepsilon - 1111h)\ , \end{aligned}$$

como desejamos. □

Para finalizar a seção apresentamos a forma matricial da sequencia híbrida repunidade para índice inteiro não positivo.

Teorema 3.25. *Para todo $n > 0$, temos que:*

$$\begin{bmatrix} RH_{-n} & RH_{-n} \\ RH_{-n+1} & RH_{-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RH_0 & RH_{-1} \\ RH_1 & RH_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} \\ 1 & \frac{11}{10} \end{bmatrix}^n,$$

sendo $\{RH_n\}_{n\geq 0}$ a sequencia híbrida repunidade.

3.6 Sequência de Jacobsthal

Nesta subseção, será apresentada a formulação matricial híbrida da sequência de Jacobsthal, abrangendo índices inteiros tanto não positivos quanto não negativos.

A sequência de Jacobsthal de números inteiros $\{J_n\}_{n\geq 0}$ é definida pela relação de recorrência: $J_n = J_{n-1}+2J_{n-2},\ n \geq 2$, com $J_0 = 0$ e $J_1 = 1$, a sequência listado como A001045 na OEIS [16]. A sequência de Jacobsthal é estendida para todo número inteiro pela relação $J_{-n} = \frac{J_{-n+2}-J_{-n+1}}{2}$. Na Tabela 7 listamos alguns termos da sequência de Jacobsthal:

Tabela 7: Termos da sequência de Jacobsthal.

$\cdots$	J_{-6}	J_{-5}	J_{-4}	J_{-3}	J_{-2}	J_{-1}	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	$\cdots$
$\cdots$	$-\frac{21}{64}$	$\frac{11}{32}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	1	1	3	5	11	21	$\cdots$

Definição 3.26. A fórmula de recorrência da sequência híbrida de Jacobsthal para $n \geq 2$, é dada por:

$$JH_n = JH_{n-1} + 2JH_{n-2},$$

sendo $JH_0 = i + \varepsilon + 3h$ e $JH_1 = 1 + i + 3\varepsilon + 5h$ os termos iniciais desta sequência.

Definição 3.27. Os números híbridos de Jacobsthal com índices negativos são definidos por:

$$JH_{-n} = J_{-n} + J_{-n+1}i + J_{-n+2}\varepsilon + J_{-n+3}h,$$

sendo $JH_{-1} = \dfrac{1}{2} + \varepsilon + h$ e $JH_{-2} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}i + h$ os termos iniciais desta sequência.

Os dois principais resultados desta subseção apresentam a forma matricial híbrida da sequência de Jacobsthal para índices inteiros não negativos e não positivos. A prova é conduzida por meio de indução matemática em n, seguindo o mesmo procedimento adotado no Teorema 3.3.

Agora, tomemos $\zeta_n = \begin{bmatrix} JH_{n+1} & 2JH_n \\ JH_n & 2JH_{n-1} \end{bmatrix}$ a matriz híbrida de Jacobsthal. O próximo resultado mostra que, para todo $n \geq 0$, a matriz ζ_n descreve cada elemento da sequência JH_n em termos das potências da matriz ζ_n, especificamente na entrada a_{11}, conforme o seguinte produto.

Teorema 3.28. *A forma matricial híbrida de Jacobsthal, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\zeta_n = \begin{bmatrix} JH_{n+1} & 2JH_n \\ JH_n & 2JH_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JH_1 & 2JH_0 \\ JH_0 & 2JH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n . \tag{6}$$

Demonstração. A validação ocorre de forma análoga à demonstração do Teorema 3.3. □

Ao analisarmos a expressão à esquerda da equação (6) para a matriz ζ_n, o determinante dessa matriz é dado por:

$$det(\zeta_n) = \begin{vmatrix} JH_{n+1} & 2JH_n \\ JH_n & 2JH_{n-1} \end{vmatrix} = JH_{n+1}JH_{n-1} - JH_n^2.$$

Dada a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, temos que det $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2$. Agora, com a ajuda da propriedade do determinante de um produto de matrizes, concluímos que det $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = (-2)^n$.

Agora vamos determinar a identidade de Cassini para a sequência híbrida de Jacobsthal $\{JH_n\}_{n\geq 0}$.

Proposição 3.29. *Para todo inteiro não negativo n, temos que a identidade ocorre:*

$$JH_{n+1}JH_{n-1} - JH_n^2 = (-2)^{n-1}(-7 + 3i + 10\varepsilon + 5h) .$$

sendo $\{JH_n\}_{n\geq 0}$ a sequencia híbrida de Jacobsthal.

Demonstração. Vamos calcular o determinante da matriz ζ_n usando o produto de matrizes da direita na Equação (6). Vejamos:

$$\begin{aligned} & \det\left(\begin{bmatrix} JH_1 & JH_0 \\ JH_0 & JH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \right) \\ = \; & \det \begin{bmatrix} JH_1 & JH_0 \\ JH_0 & JH_{-1} \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \\ = \; & (-2)^n (JH_1 JH_{-1} - JH_0^2) \\ = \; & (-2)^n \left[(1 + i + 3\varepsilon + 5h) \left(\frac{1}{2} + \varepsilon + h \right) - (i + \varepsilon + 3h)^2 \right] \\ = \; & (-2)^{n-1}(-7 + 3i + 10\varepsilon + 5h) \end{aligned}$$

como desejávamos. □

Por fim, apresentamos a forma matricial híbrida de Jacobsthal para índice inteiro não positivo.

Teorema 3.30. *A forma matricial híbrida de Jacobsthal para índice inteiro não positivo, $n > 0$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} JH_{-n+1} & 2JH_{-n} \\ JH_{-n} & 2JH_{-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JH_1 & 2JH_0 \\ JH_0 & 2JH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^n .$$

Demonstração. A validação ocorre de forma análoga à demonstração do Teorema 3.3. □

3.7 Sequência de Oresme

Nesta subseção, será apresentada a formulação matricial híbrida da sequência de Oresme, abrangendo índices inteiros tanto não positivos quanto não negativos.

A sequência de Oresme de números inteiros $\{O_n\}_{n\geq 0}$ é definida pela relação de recorrência: $O_{n+2} = O_{n+1} - \frac{1}{4}O_n,\ n \geq 0$, com $O_0 = 0$ e $O_1 = \frac{1}{2}$, a sequência listado como A273692 na OEIS [16]. A sequência de Oresme é estendida para todo número inteiro pela relação $O_{-n} = 4O_{-n+1} - 4O_{-n+2}$. Na Tabela 8 listamos alguns termos da sequência de Oresme:

Tabela 8: Termos da sequência de Oresme.

$\cdots$	O_{-6}	O_{-5}	O_{-4}	O_{-3}	O_{-2}	O_{-1}	O_0	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	$\cdots$
$\cdots$	-384	-160	-64	-24	-8	-2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{6}{64}$	$\cdots$

Definição 3.31. A fórmula de recorrência da sequência híbrida de Oresme para $n \geq 0$, é dada por:

$$OH_{n+2} = OH_{n+1} - \frac{1}{4}OH_n,$$

sendo $OH_0 = \dfrac{1}{2}i + \dfrac{2}{4}\varepsilon + \dfrac{3}{8}h$ e $OH_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4}i + \dfrac{3}{8}\varepsilon + \dfrac{4}{16}h$ os termos iniciais desta sequência.

Definição 3.32. Os números híbridos de Oresme com índices negativos são definidos por:

$$OH_{-n} = O_{-n} + O_{-n+1}i + O_{-n+2}\varepsilon + O_{-n+3}h,$$

sendo $OH_{-1} = -2 + \dfrac{1}{2}\varepsilon + \dfrac{2}{4}h$ e $OH_{-2} = -8 - 2i + \dfrac{1}{2}h$ os termos iniciais desta sequência.

Os dois principais resultados desta subseção apresentam a forma matricial híbrida da sequência de Oresme para índices inteiros não negativos e não positivos. A prova é conduzida por meio de indução matemática em n, seguindo o mesmo procedimento adotado no Teorema 3.3.

Agora, tomemos $\eta_n = \begin{bmatrix} OH_{n+1} & OH_n \\ OH_n & OH_{n-1} \end{bmatrix}$ a matriz híbrida de Oresme. O próximo resultado mostra que, para todo $n \geq 0$, a matriz η_n descreve cada elemento da sequência OH_n em termos das potências da matriz η_n, especificamente na entrada a_{11}, conforme o seguinte produto.

Teorema 3.33. *A forma matricial híbrida de Oresme, para $n \geq 1$, é dada por:*

$$\eta_n = \begin{bmatrix} OH_{n+1} & OH_n \\ OH_n & OH_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OH_1 & OH_0 \\ OH_0 & OH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}^n . \tag{7}$$

Demonstração. A validação ocorre de forma análoga à demonstração do Teorema 3.3. □

Ao analisarmos a expressão à esquerda da equação (7) para a matriz η_n, o determinante dessa matriz é dado por:

$$det(\eta_n) = \begin{vmatrix} OH_{n+1} & OH_n \\ OH_n & OH_{n-1} \end{vmatrix} = OH_{n+1}OH_{n-1} - OH_n^2.$$

Dada a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$, temos que $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}$. Agora, com a ajuda da propriedade do determinante de um produto de matrizes, concluímos que $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Agora vamos determinar a identidade de Cassini para a sequência híbrida de Oresme $\{OH_n\}_{n\geq 0}$.

Proposição 3.34. *Para todo inteiro não negativo n, temos que a identidade ocorre:*

$$OH_{n+1}OH_{n-1} - OH_n^2 = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{10155625}{10^5} + \frac{75}{10^2}i + \frac{3125}{10^4}\varepsilon + \frac{1}{2}h\right).$$

sendo $\{OH_n\}_{n\geq 0}$ a sequencia híbrida de Oresme.

Demonstração. Vamos calcular o determinante da matriz η_n usando o produto de matrizes da direita na Equação (7). Vejamos:

$$\begin{aligned}
&\det\left(\begin{bmatrix} OH_1 & OH_0 \\ OH_0 & OH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}^n\right) \\
= \ &\det \begin{bmatrix} OH_1 & OH_0 \\ OH_0 & OH_{-1} \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}^n \\
= \ &\left(\frac{1}{4}\right)^n (OH_1 OH_{-1} - OH_0^2) \\
= \ &\left(\frac{1}{4}\right)^n \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4}i + \frac{3}{8}\varepsilon + \frac{4}{16}h\right)\left(-2 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{2}{4}h\right) - \left(\frac{1}{2}i + \frac{2}{4}\varepsilon + \frac{3}{8}h\right)^2\right] \\
= \ &-\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{10155625}{10^5} + \frac{75}{10^2}i + \frac{3125}{10^4}\varepsilon + \frac{1}{2}h\right),
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Por fim, apresentamos a forma matricial híbrida de Oresme para índice inteiro não positivo.

Teorema 3.35. *A forma matricial híbrida de Oresme para índice inteiro não positivo, $n > 0$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} OH_{-n+1} & OH_{-n} \\ OH_{-n} & OH_{-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OH_1 & OH_0 \\ OH_0 & OH_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^n.$$

Demonstração. A validação ocorre de forma análoga à demonstração do Teorema 3.3. □

4 Conclusão

Este estudo possibilitou a análise das formas matriciais híbridas de sequências lineares recursivas de segunda ordem, como as de Fibonacci, Lucas, Pell, Mersenne, Repunidade, Jacobsthal e Oresme. Com isso, foi possível obter as matrizes híbridas geradoras a partir das respectivas sequências unidimensionais, bem como calcular o determinante dessas matrizes e suas respectivas identidades de Cassini. Além disso, foi realizada uma extensão para índices inteiros não positivos, permitindo uma generalização das formas matriciais híbridas associadas às sequências analisadas.

Para trabalhos futuros, investiga-se a aplicação das formas matriciais híbridas dessas sequências integradas à outras áreas.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Revista Tocantinense de Matemática pelo espaço de divulgação científica.

Financiamento

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P (FCT), no âmbito do projeto UID/00013/2025 (https://doi.org/10.54499/UID/00013/2025).

Referências

[1] Francisco Alves. Sequência generalizada de Pell (SGP): aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. *Revista Thema*, 13(2):27–41, 2016.

[2] Francisco Alves. Bivariate Mersenne polynomials and matrices. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 26(3):83–95, 2020.

[3] Dorota Bród and Anetta Szynal-Liana. On Mersenne numbers and their bihyperbolic generalizations. In *Annales Mathematicae Silesianae*, volume 39, pages 130–142, 2025.

[4] Paula Catarino. On k-Pell hybrid numbers. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 22(1):83–89, 2019.

[5] Gamaliel Cerda-Morales. Investigation of generalized hybrid Fibonacci numbers and their properties. *arXiv preprint arXiv:1806.02231*, 2018.

[6] Can Kızılateş. A new generalization of Fibonacci hybrid and lucas hybrid numbers. *Chaos, Solitons & Fractals*, 130:109449, 2020.

[7] Elon Lages Lima, Paulo Carvalho, Eduardo Wagner, and Augusto César Morgado. *A matemática do ensino médio*, volume 2. SBM Rio de Janeiro, 2000.

[8] Milena Mangueira, Francisco Alves, and Paula Catarino. Números híbridos de Mersenne. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 18:1–11, 2020.

[9] Milena Mangueira, Renata Vieira, Francisco Alves, and Paula Catarino. As generalizações das formas matriciais e dos quatérnios da sequência de Mersenne. *Revista de Matemática da UFOP*, 1(1):1–17, 2021.

[10] Milena Mangueira, Renata Vieira, Francisco Alves, and Paula Catarino. The oresme sequence: The generalization of its matrix form and its hybridization process. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(1):101–111, 2021.

[11] Milena Mangueira, Renata Vieira, Francisco Alves, and Paula Catarino. Os números híbridos de k-Mersenne e k-Oresme. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2021.

[12] Mustafa Özdemir. Introduction to hybrid numbers. *Advances in applied Clifford algebras*, 28(1):11, 2018.

[13] Douglas Santos and Eudes Costa. A note on Repunit number sequence. *Intermaths*, 5(1):54–66, 2024.

[14] Douglas Santos and Eudes da Costa. Um passeio pela sequência repunidade. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, pages 241–254, 2023.

[15] Bruno Astrolino Silva. *Números de Fibonacci e números de Lucas*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2017.

[16] Neil JA Sloane et al. The on-line encyclopedia of integer sequences. Sequence A002275. [S. l.]: The OEIS Foundation Inc., 2024.

[17] Elen Spreafico, Eudes Costa, and Paula Catarino. A note on hybrid numbers with generalized hybrid k-Pell numbers as coefficients. *Communications in Advanced Mathematical Sciences*, 8(3):125–135.

[18] Elen Spreafico, Eudes Costa, and Paula Catarino. Hybrid numbers with hybrid Leonardo number coefficients. *Journal of Mathematical Extension*, 18, 2024.

[19] Anetta Szynal-Liana and Iwona Włoch. On pell and Pell-Lucas hybrid numbers. *Commentationes Mathematicae*, 58(1-2):11–17, 2018.

[20] Anetta Szynal-Liana and Iwona Włoch. On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas hybrid numbers. In *Annales Mathematicae Silesianae*, volume 33, pages 276–283. University of Silesia in Katowice, Institute of Mathematics, 2019.

[21] Renata Vieira, Francisco Alves, Paula Catarino, and Anabela Rodrigues. Construção da forma matricial de sequências lineares e recorrentes: um estudo da matriz geradora. *Cadernos do IME-Série Matemática*, (15):167–180, 2020.

[22] Arfat Wani, V. Badshah, G. Rathore, and Paula Catarino. Generalized Fibonacci and k-Pell matrix sequences. *Journal of Mathematics*, 51:17–28, 2019.