

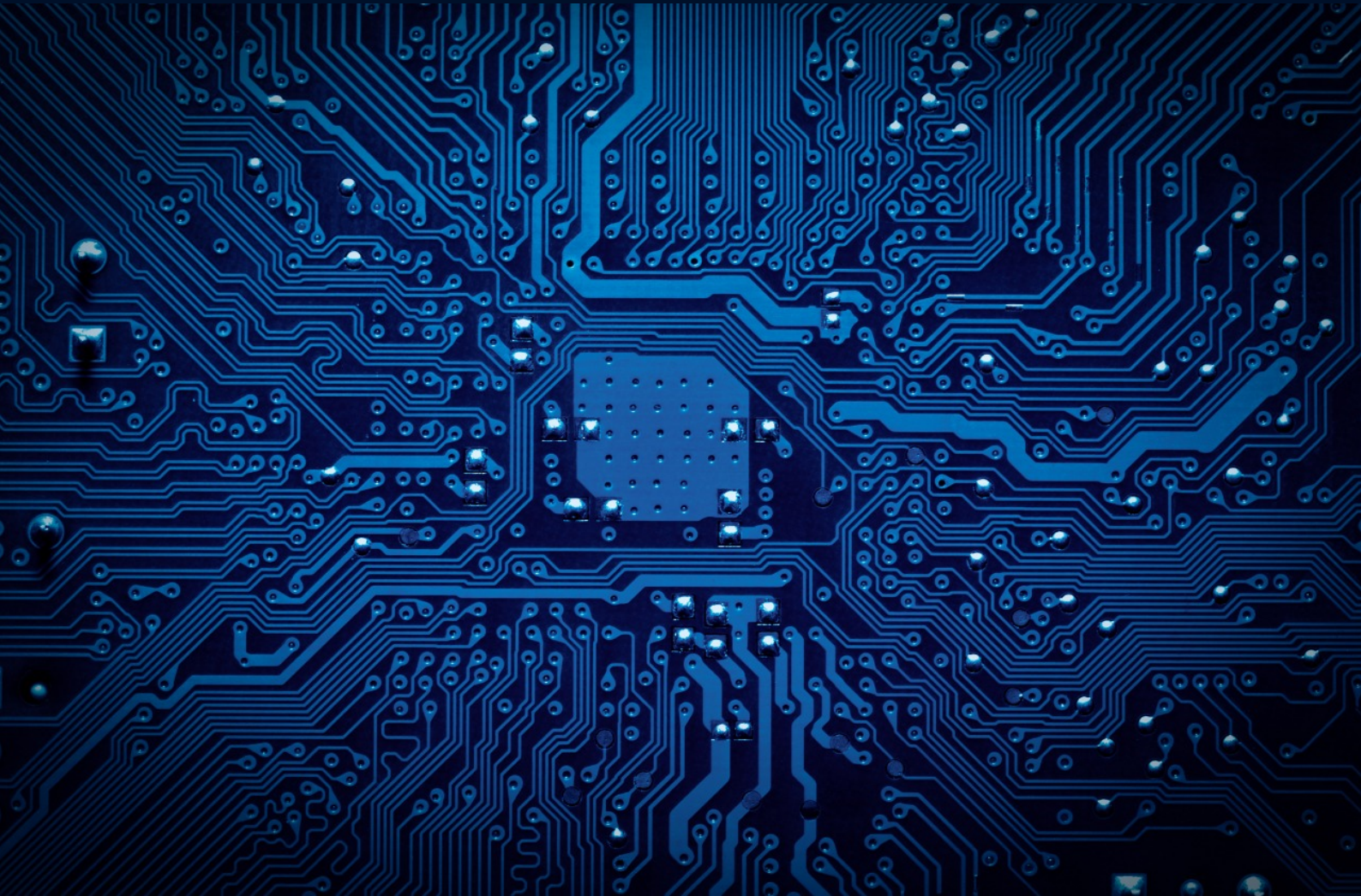
# AJC

Academic Journal on Computing, Engineering and Applied Mathematics

# EAM

2026  
Volume 7 Issue 1

Academic Journal on Computing, Engineering and Applied Mathematics





---

# Universidade Federal do Tocantins

---

**Reitor**

Profa. Dra. Maria Santana Ferreira dos Santos

**Vice-Reitor**

Prof. Dr. Marcelo Leineker Costa

**Pró-Reitoria de Graduação**

Profa. Dra. Valdirene Gomes dos Santos de Jesus

**Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação**

Profa. Dra. Flávia Lucila Tonani

**Pró-Reitoria de Extensão e Cultura**

Bruno Barreto Amorim Campos

**Pró-Reitoria de Administração e Finanças**

Me. Carlos Alberto Moreira de Araújo Júnior

**Pró-Reitoria de Assuntos Estudantis e Comunitários**

Prof. Dr. Kherlley Caxias Batista Barbosa

**Pró-Reitoria de Avaliação e Planejamento**

Prof. Dr. Eduardo Andrea Lemus Erasmo

**Pró-reitoria de Gestão e Desenvolvimento de Pessoas**

Dra. Michelle Matilde Semiguem Lima Trombini Duarte

**Pró-Reitoria de Tecnologia da Informação e Comunicação**

Olívia Tozzi Bittencourt

**Direção do Campus de Palmas**

Prof. Dr. Moisés de Souza Arantes Neto

**Coordenação do Curso de Ciência da Computação**

Prof. Dr. Ary Henrique Morais de Oliveira



---

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Academic Journal on Computing, Engineering and Applied Mathematics (AJCEAM) [recurso eletrônico] / Universidade Federal do Tocantins, Curso de Ciência da Computação. – vol. 07, n. 01 ([october/march], 2026) – Palmas - TO, UFT, 2026. ISSN nº 2675-3588.

Quadrimestral no primeiro ano de publicação 2020

Semestral.

Disponível em:

<https://sistemas.uft.edu.br/periodicos/index.php/AJCEAM/index>

1. Ciência da Computação - periódico. 2. Matemática Aplicada. 3. Computação Aplicada. 4. Engenharias. 5. Ciências Exatas. I. Universidade Federal do Tocantins.

**CDD 22.ed. 004**

---

**Ficha Catalográfica elaborada por Edson de Sousa Oliveira – CRB/2 – 1069.**



---

## Expediente

---

**Editor-Chefe**

Me. Tiago da Silva Almeida (UFT), Brasil

**Editores**

Dr. Edeilson Milhomem Silva (UFT), Brasil

Dr. Marcos Antônio Estremeto (ETEC-SP), Brasil

Dr. Rafael Lima de Carvalho (UFT), Brasil

Dr. Tanilson Dias dos Santos (UFT), Brasil

Me. Tiago da Silva Almeida (UFT), Brasil

Dr. Warley Gramacho da Silva (UFT), Brasil

**Realização**

Fundação Universidade Federal do Tocantins (UFT)

Quadra 109 Norte, Avenida NS-15, ALCNO-14 | Bloco III | sala 214 | Plano Diretor Norte | 77001-090 | Palmas / TO | Brasil

**Periodicidade**

Este periódico possui periodicidade semestral e utiliza a Licença Creative Commons 4.0 - CC BY-NC 4.0. Contudo, a publicação dos artigos em modalidade avançada ou ahead of print, ou seja, tão logo os manuscritos aprovados sejam editados para publicação, é possível. O AJCEAM não possui taxas de publicação, tanto pouco de submissão de manuscritos, sendo totalmente gratuita para autores e leitores.

**Indexadores**

Google Acadêmico, desde 9 de maio de 2020

International Standard Serial Number – ISSN, desde 28 de maio de 2020

Crossref, desde 7 de junho de 2020

Revistas de Livre Acesso – LivRe, desde 24 de junho de 2020

Diretório das revistas científicas eletrônicas brasileiras – Miguilim, desde novembro de 2022



---

## Sumário

---

<b>1</b>	<b>Equal Temperatures at Antipodal Points: A Teaching Proposal for Applying the Intermediate Value Theorem in High School</b>	<b>1</b>
	NUNES SILVA	
<b>2</b>	<b>The shortest path is not always a straight line</b>	<b>9</b>
	MALAQUIAS DE SOUSA	
<b>3</b>	<b>A Teaching Activity Proposal for the Concept of Integral in High School Using the Method of Exhaustion with the Aid of GeoGebra</b>	<b>15</b>
	BRITO	
<b>4</b>	<b>Exploring the JPEG Algorithm: Impacts of Modifications in the Quantization and Transform Stages</b>	<b>23</b>
	KRAUSE AND SANTOS	
<b>5</b>	<b>Estudo da Implantação de um Controlador PID em um Sistema de Saneamento</b>	<b>31</b>
	PEREIRA	
<b>6</b>	<b>Challenges and Perspectives in Conductor Break Detection in Distribution Grids with Electric Vehicle Charging Infrastructure</b>	<b>41</b>
	BARBOSA, DILLI AND SILVA	



# Temperaturas Iguais em Pontos Antípodas: Uma Proposta de Ensino da Aplicação do Teorema do Valor Intermediário no Ensino Médio

## *Equal Temperatures at Antipodal Points: A Teaching Proposal for Applying the Intermediate Value Theorem in High School*

Wesley Nunes Silva<sup>1</sup>, Melquisedeque dos Anjos Alves<sup>1</sup>, Warley Gramacho da Silva<sup>1</sup> e Élis Gardel da C. Mesquita<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal do Tocantins, Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Tocantins, Brasil

Data de recebimento do manuscrito: 03/07/2025

Data de aceitação do manuscrito: 20/12/2025

Data de publicação: 20/12/2025

**Resumo**— Este artigo exibe uma proposta de ensino voltada ao Ensino Médio que procura aproximar os estudantes de um importante trecho matemático: o Teorema do Valor Intermediário. Partindo de uma questionamento instigante — seria possível que dois pontos opostos na Terra tenham exatamente a mesma temperatura em um determinado momento? — a atividade convida os alunos a explorar essa ideia por meio de uma abordagem interdisciplinar. Utilizando dados climáticos, noções de geografia e funções contínuas, a proposta se ancora na realidade local do Tocantins para tornar o conteúdo mais acessível e significativo. Mais do que aplicar um teorema, a atividade estimula o pensamento crítico, o raciocínio lógico e o interesse pela matemática como ferramenta para compreender o mundo.

**Palavras-chave**— Teorema do Valor Intermediário, Ensino Médio, Educação Matemática, Tocantins, Temperatura, Antípodas, Funções Contínuas, Modelagem Matemática.

**Abstract**— This paper proposes an engaging way to introduce the Intermediate Value Theorem (IVT) to high school students by connecting it with a real-world question: can two points on opposite sides of the Earth share the same temperature at a given time? Centered on the local context of Tocantins, Brazil, the idea is to make abstract mathematical concepts more relatable by linking them to climate patterns and geographical positioning. The approach blends mathematics with geography and environmental awareness, encouraging students to explore and interpret a continuous function that models temperature variation between antipodal points. Through this activity, students not only apply the IVT in a meaningful scenario but also strengthen their critical thinking and appreciation for how math helps explain natural phenomena.

**Keywords**— Intermediate Value Theorem, High School Education, Mathematics Education, Tocantins, Temperature, Antipodes, Continuous Functions, Mathematical Modeling.

## I. INTRODUÇÃO

Muitas vezes, a matemática acaba parecendo algo distante, cheia de fórmulas e conceitos que vivem só nos livros. A necessidade de uma educação que conecte a experiência do aluno com o currículo, defendida por pensadores como John Dewey [1], é um antídoto para esse distanciamento. No contexto brasileiro, a Etnomatemática de D'Ambrosio [2] destaca que essa aproximação é fundamental para uma aprendizagem que valoriza o saber

local. A matemática, nessa visão, transcende o utilitarismo e se torna uma ferramenta para a cidadania, ajudando os estudantes a ler e a transformar o mundo ao seu redor, como argumenta Skovsmose [3] em sua visão da Educação Matemática Crítica.

Nesse sentido, este trabalho detalha uma abordagem para ensinar o Teorema do Valor Intermediário (TVI). A proposta parte de uma pergunta investigativa: será que, em um dado momento, sempre existe um lugar no planeta que tem a mesma temperatura que o ponto exatamente do outro lado da Terra? Questões que brotam da curiosidade são um motor poderoso para a aprendizagem [4]. Partir da realidade e dos questionamentos dos educandos é, como nos ensina Paulo Freire [5], uma condição essencial para uma prática

Dados de contato: Wesley Nunes Silva, wesley.uca@gmail.com

educativa que busca a autonomia.

O objetivo é apresentar uma atividade que aplica o TVI de forma prática, partindo do nosso próprio quintal: o estado do Tocantins. Ao investigar o comportamento térmico entre cidades como Palmas ou Gurupi e localidades situadas no extremo oposto do planeta, o teorema deixa de ser uma abstração para tornar-se palpável. Com isso, demonstramos que a matemática é uma ferramenta de modelagem [6] que descreve fenômenos naturais. A atividade integra conhecimentos de Matemática, Geografia e Ciências, em linha com a abordagem interdisciplinar valorizada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [7].

## II. O QUE SÃO PONTOS ANTÍPODAS?

No campo da geometria e da geografia matemática, dois pontos sobre uma esfera são denominados *antípodas* quando se localizam em lados exatamente opostos do globo, isto é, quando o segmento de reta que os conecta passa pelo centro da terra. Para localizar com precisão qualquer ponto na superfície do planeta, utilizamos o sistema de coordenadas geográficas, composto por latitude e longitude. Geograficamente, dois pontos antípodas possuem latitudes simétricas e longitudes que diferem em  $180^\circ$ . Isso significa que:

- A latitude do ponto antípoda é obtida invertendo o sinal da latitude original.
- A longitude do ponto antípoda é obtida somando ou subtraindo  $180^\circ$  da longitude original, ajustando o resultado para o intervalo de longitudes válido, que vai de  $-180^\circ$  a  $+180^\circ$ .

### *Do ponto ao seu Antípoda: O Caminho Geodésico*

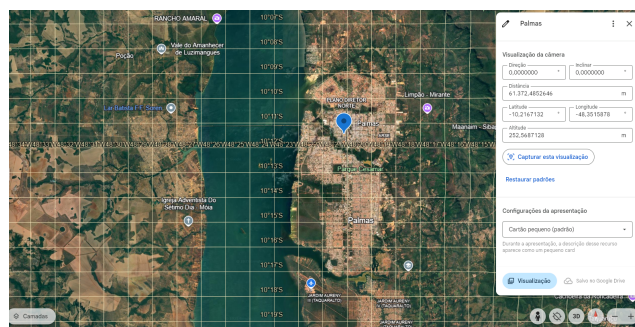
Para conectar um ponto  $P$  ao seu antípoda  $-P$  sobre uma superfície esférica, o caminho mais natural é a *geodésica*, isto é, a curva de menor distância entre dois pontos em uma superfície. Na esfera terrestre, as geodésicas são arcos de grandes círculos, que são círculos cujos centros coincidem com o centro da terra, como é o caso do equador e dos meridianos.

O caminho geodésico que liga  $P$  a  $-P$  possui uma propriedade geométrica importante, ele resulta da interseção da superfície terrestre com um plano que contém o centro da terra e os dois pontos antípodas. Essa trajetória pode ser parametrizada de maneira contínua, por exemplo, pelo ângulo central  $\theta$  que varia de 0 em  $P$  a  $180$  em  $-P$ .

Essa parametrização é fundamental para a modelagem matemática proposta, pois nos permite descrever a variação de uma grandeza física como a temperatura ao longo do caminho como uma função contínua de uma única variável real. Dessa forma, transformamos um problema sobre a superfície esférica em um contexto unidimensional, no qual o Teorema do Valor Intermediário (TVI) pode ser aplicado diretamente.

### *Análise Geo-Matemática: O Caso de Palmas – TO e seu Par Antípoda*

Vamos calcular o ponto antípoda da cidade de **Palmas**, capital do Tocantins.



**Figura 1:** Coordenadas Geográficas de Palmas-TO

Imagem de satélite de Palmas – TO, com marcação de coordenadas geográficas de latitude e longitude. A captura foi feita no Google Earth, destacando a localização aproximada de Palmas ( $10,22^\circ$  S,  $48,35^\circ$  W), utilizada como exemplo para o cálculo de seu ponto antípoda.

- Latitude de Palmas: Aproximadamente  $10,2^\circ$  Sul, o que equivale a  $-10,2^\circ$ .
- Longitude de Palmas: Aproximadamente  $48,3^\circ$  Oeste, o que equivale a  $-48,3^\circ$ .

#### **Passo 1 – Calculando a Latitude do Antípoda:**

- Basta inverter o sinal da latitude.
- Como Palmas está a  $-10,2^\circ$ , o antípoda estará a  $+10,2^\circ$  (ou seja,  $10,2^\circ$  Norte).

#### **Passo 2 – Calculando a Longitude do Antípoda:**

- A longitude antípoda é dada por:

$$\text{Longitude Antípoda} = \text{Longitude Original} \pm 180^\circ$$

- Como Palmas está a  $-48,3^\circ$  (ou seja,  $48,3^\circ$  Oeste), fazemos:

$$-48,3^\circ + 180^\circ = 131,7^\circ$$

- O resultado,  $131,7^\circ$ , está no hemisfério Leste, pois é um valor positivo em longitude.

#### **Passo 3 – Resultado Final:**

Portanto, o ponto antípoda de Palmas está nas coordenadas:

Latitude:  $10,2^\circ$  Norte

Longitude:  $131,7^\circ$  Leste

Esse ponto localiza-se no Oceano Pacífico, a leste das Filipinas.

Localização aproximada do ponto antípoda de Palmas – TO, situado no Oceano Pacífico, a leste das Filipinas. A imagem foi extraída do Google Earth, mostrando as coordenadas geográficas estimadas para o antípoda ( $10,2^\circ$  N,  $131,7^\circ$  E). Essa posição serviu como base para a modelagem matemática proposta no artigo.

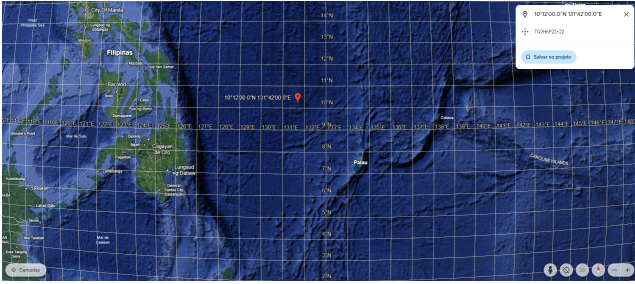


Figura 2: Projeção Geográfica do Antípoda no Oceano Pacífico

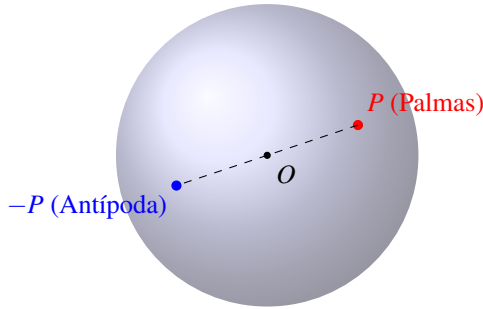


Figura 3: Representação esquemática dos pontos antípodos de Palmas sobre uma esfera terrestre.

**Resumo do Cálculo Antípoda**

De forma geral, para qualquer ponto com latitude  $\lambda$  e longitude  $\phi$ :

- Latitude Antípoda:  $-\lambda$
- Longitude Antípoda:
 
$$\begin{cases} \phi + 180^\circ, & \text{se } \phi < 0^\circ \text{ (Hemisfério Oeste)} \\ \phi - 180^\circ, & \text{se } \phi > 0^\circ \text{ (Hemisfério Leste)} \end{cases}$$
- Caso o resultado ultrapasse os limites de  $-180^\circ$  a  $180^\circ$ , deve-se ajustar para o intervalo correto.

**III. TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO APLICADO À DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS**

O Teorema do Valor Intermediário (TVI) é um resultado fundamental da análise real cuja validade depende da continuidade de uma função em um intervalo fechado [8]. Sua formulação clássica é:

**Teorema.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, e seja  $k$  um número real entre  $f(a)$  e  $f(b)$ . Então, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = k$ .

A aplicação do teorema ao nosso problema pressupõe que a temperatura em um instante fixo seja uma função contínua da posição geográfica, uma hipótese física razoável em escala global [9].

**Demonstração do Teorema do Valor Intermediário**

Apresentamos a seguir uma demonstração baseada na propriedade do supremo e na definição de continuidade por limites. Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $[a, b]$ , com  $f(a) < k < f(b)$ . (O caso  $f(a) > k > f(b)$  é análogo.)

Definimos o conjunto:

$$S = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq k\}$$

Note que  $a \in S$ , pois  $f(a) \leq k$ , então  $S$  é não vazio. Além disso, como  $f(b) > k$ , temos que  $b \notin S$ , o que garante que  $S$  é limitado superiormente por  $b$ . Seja  $c = \sup S$ .

Agora, vamos mostrar que  $f(c) = k$ .

- Como  $c$  é o supremo de  $S$ , para todo  $\epsilon > 0$  existe  $x \in S$  tal que  $c - \epsilon < x \leq c$ . Isso implica que:

$$f(x) \leq k$$

- Por outro lado, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $y \in (c, c + \epsilon)$  tal que  $y \notin S$ , ou seja:

$$f(y) > k$$

- Como  $f$  é contínua em  $c$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

Pelas desigualdades anteriores:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq k$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \geq k$$

- Pela continuidade de  $f$  em  $c$ , os limites laterais coincidem com  $f(c)$ . Portanto:

$$f(c) \leq k \quad \text{e} \quad f(c) \geq k$$

Logo:

$$f(c) = k$$

Assim, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = k$ , o que conclui a demonstração.

**Interpretação Física no Contexto da Temperatura**

No problema proposto, consideramos uma função auxiliar dada por:

$$g(x) = T(x) - T(-x)$$

onde  $T(x)$  representa a temperatura em um ponto  $x$  da superfície terrestre, num instante fixo de tempo.

**Exemplo Prático: Palmas – TO e seu Antípoda**

Suponha que, em determinado dia, a temperatura média em Palmas seja de 30°C e a temperatura média em seu ponto antípoda, localizado no Oceano Pacífico, seja de 25°C. Assim, temos:

$$g(\text{Palmas}) = 30 - 25 = 5$$

$$g(\text{Antípoda}) = 25 - 30 = -5$$

Observe que:

$$g(\text{Antípoda}) = -g(\text{Palmas})$$

Como a função  $g$  é contínua ao longo da trajetória que conecta um ponto a seu antípoda (hipótese razoável, pois a temperatura varia de forma contínua sobre a superfície terrestre), e como  $g(\text{Palmas}) > 0$  e  $g(\text{Antípoda}) < 0$ , podemos aplicar o Teorema do Valor Intermediário. Segundo o TVI, se  $g$  é contínua no intervalo entre dois pontos e assume valores com sinais opostos nos extremos, então existe ao menos um ponto  $x_0$  entre eles tal que:

$$g(x_0) = 0$$

Ou seja:

$$T(x_0) = T(-x_0)$$

Isso implica que, ao longo do caminho geodésico de Palmas até seu antípoda, há pelo menos um ponto intermediário  $x_0$  na superfície terrestre cuja temperatura, naquele momento, é exatamente igual à de seu correspondente antípoda  $-x_0$ .

**Generalização da Argumentação**

Embora os valores de temperatura usados aqui sejam hipotéticos para efeito ilustrativo, o mesmo raciocínio se aplica a qualquer par de pontos antípodas sobre a Terra, desde que a função de temperatura  $T(X)$  seja contínua naquele instante. Essa propriedade é uma consequência direta do TVI e reforça o poder da matemática como ferramenta de explicação de fenômenos naturais.

**IV. PROPOSTA DE ENSINO**

A aplicação didática deste problema deve ser estruturada como uma investigação guiada, que promova o protagonismo estudantil, o pensamento crítico e a modelagem matemática.

**a. Objetivos Pedagógicos**

Conforme a BNCC [7], busca-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender e aplicar o conceito de continuidade e o Teorema do Valor Intermediário (TVI) em um contexto significativo e interdisciplinar.
- Utilizar tecnologias digitais como ferramentas para pesquisa, coleta e visualização de dados [10].
- Desenvolver a habilidade de modelagem matemática, traduzindo um problema real para a linguagem de funções [6].

- Estimular a argumentação matemática e o raciocínio lógico por meio da formulação, validação e demonstração de hipóteses.

**b. Metodologia: A Sequência Fedath**

Para potencializar o processo de ensino-aprendizagem, propomos o uso da metodologia da Sequência Fedath, desenvolvida por Souza e Bezerra [11]. A sigla Fedath representa as etapas: Focalização, Exploração, Discussão, Ampliação, Transferência e Historização.

- **Focalização:** O professor apresenta a pergunta geradora: “Será que dois pontos opostos na Terra têm, em algum momento, a mesma temperatura?”. Para contextualizar, utiliza-se imagens de Palmas e seu antípoda.
- **Exploração:** Os alunos são incentivados a pesquisar sobre o conceito de antípodas, localizando os pontos geográficos em mapas online, como o Google Earth, e identificando as coordenadas geográficas.
- **Discussão:** Em sala, os alunos socializam suas descobertas, enquanto o professor introduz formalmente o conceito de função contínua e o Teorema do Valor Intermediário, com exemplos gráficos.
- **Ampliação:** Propõe-se a construção da função  $g(x) = T(x) - T(-x)$  e a análise de seu comportamento para diferentes valores de  $x$ , reforçando a importância da continuidade.
- **Transferência:** Os alunos resolvem problemas análogos, como aplicação do TVI em outros contextos físicos, por exemplo, distribuição de pressão atmosférica ou níveis de poluição.
- **Historização:** Os estudantes são convidados a relatar, por meio de um pequeno texto, como o TVI permitiu resolver o problema inicial e quais aprendizagens foram significativas no processo.

**c. Exercício Proposto****Situação-Problema:**

Em um determinado dia, a temperatura em Palmas é de 32°C. No mesmo instante, o ponto antípoda de Palmas, no Oceano Pacífico, apresenta temperatura de 26°C. Considerando a temperatura como uma função contínua  $T(X)$  da posição geográfica sobre a Terra, mostre que, entre esses dois pontos, existe ao menos um local na superfície terrestre onde a temperatura seja exatamente 29°C.

**Resolução:**

Sejam:

$$f(x) = \text{temperatura no ponto } x$$

Consideremos um caminho contínuo da cidade de Palmas até seu ponto antípoda. Sabemos que:

$$f(\text{Palmas}) = 32^\circ\text{C}$$

$$f(\text{Antípoda}) = 26^\circ\text{C}$$

Observe que  $29^{\circ}\text{C}$  é um valor intermediário entre  $f(\text{Palmas})$  e  $f(\text{Antípoda})$ , ou seja:

$$f(\text{Antípoda}) < 29 < f(\text{Palmas})$$

Como a função  $f$  é contínua ao longo do percurso geodésico que conecta esses dois pontos, podemos aplicar o **Teorema do Valor Intermediário**, que garante que existe um ponto  $c$  entre Palmas e seu antípoda tal que:

$$f(c) = 29^{\circ}\text{C}$$

#### Dica de Aplicação com os Alunos:

Durante a resolução em sala, o professor pode:

- Representar o problema em um gráfico cartesiano, colocando a posição geográfica no eixo  $x$  e a temperatura no eixo  $y$ , criando uma função idealizada para melhor visualização.
- Propor a construção, em software como GeoGebra, de uma função contínua hipotética que passe pelos pontos  $(x_1, 32)$  e  $(x_2, 26)$ , reforçando visualmente o TVI.
- Solicitar que os alunos identifiquem visualmente o valor intermediário de  $29^{\circ}\text{C}$  no gráfico, localizando o ponto  $c$  onde  $f(c) = 29$ .
- Discutir com os alunos: “O que aconteceria se a função não fosse contínua? O teorema ainda valeria?”

#### Importância Conceitual:

Esta atividade promove a compreensão do TVI não apenas como um resultado teórico, mas como uma ferramenta para a análise de fenômenos naturais. Os alunos podem perceber que, ao partir de um problema concreto, é possível mobilizar conceitos matemáticos avançados de maneira acessível e contextualizada.

## V. POSSIBILIDADES INTERDISCIPLINARES

A proposta que apresentamos é, antes de tudo, um convite para integrar várias áreas do conhecimento numa conversa que faça sentido para os estudantes. Quando juntamos matemática, geografia, física, biologia e outras disciplinas, conseguimos ampliar o olhar dos alunos para os fenômenos naturais — e mostrar que a matemática não é só teoria, mas uma ciência aplicada que conversa com o mundo real.

- **Geografia:** Para entender os pontos antípodas, os alunos precisam lidar com conceitos como latitude, longitude, fusos horários e zonas climáticas. Usar ferramentas como o Google Earth deixa tudo mais visual e concreto, permitindo que eles comparem Palmas com seu ponto oposto no planeta. E, de quebra, ainda dá para discutir os desafios de mostrar uma esfera numa superfície plana — aquele velho problema dos mapas, como [12] destaca.
- **Física:** Ao analisar as diferenças de temperatura entre os pontos, surgem boas oportunidades para conversar sobre transferência de calor, radiação solar, altitude e circulação atmosférica. É uma chance de aproximar a Termodinâmica da realidade, mostrando que conceitos como equilíbrio térmico e isotermas estão presentes no nosso dia a dia, segundo [13].

- **Ciências Ambientais e Biologia:** Essa atividade abre espaço para discutir os efeitos das mudanças climáticas. Os alunos podem pesquisar como o aumento da temperatura afeta ecossistemas diferentes — o Cerrado brasileiro e as regiões oceânicas próximas às Filipinas, por exemplo — e entender as diferenças entre os biomas, conforme aponta [14].
- **Tecnologias Digitais e Informática:** Ao usar softwares como o Google Earth, o Excel ou o GeoGebra, os estudantes aprendem na prática a manipular dados e criar gráficos, visualizando trajetórias e temperaturas de maneira dinâmica. Isso torna o aprendizado mais interessante e conectado com o mundo digital, como explica [10].
- **História da Ciência:** Uma pesquisa sobre a origem do Teorema do Valor Intermediário pode deixar a proposta ainda mais rica. Os alunos descobrem como essa ideia evoluiu desde o século XVII, passando por diversos matemáticos, até sua formalização no século XIX, segundo [15].
- **Educação Ambiental:** Por fim, vale trazer o tema do aquecimento global para o debate, falando sobre os acordos internacionais e os desafios para reduzir as emissões de gases que causam efeito estufa. Perguntas do tipo “Como as mudanças climáticas podem alterar a distribuição de temperaturas nas próximas décadas?” ajudam a desenvolver um olhar crítico sobre o futuro, como lembra [14].

#### Sugestão de Atividade Interdisciplinar

Como um próximo passo, sugerimos organizar uma mesa-redonda interdisciplinar com professores de Matemática, Geografia, Física e Biologia. Os estudantes podem ser divididos em grupos para apresentar — usando mapas, gráficos e dados reais — os seguintes tópicos:

1. O que é o Teorema do Valor Intermediário (TVI) e como ele se aplica na variação de temperaturas.
2. Diferenças geográficas, ambientais e climáticas entre Palmas e seu ponto antípoda.
3. Impactos possíveis se as temperaturas globais continuarem subindo.
4. Como a modelagem matemática ajuda a entender e prever fenômenos ambientais.

Além de aproximar o aprendizado do cotidiano dos alunos, essa proposta ajuda a desenvolver competências importantes da BNCC, como pensamento crítico e científico, uso de tecnologias digitais e trabalho colaborativo entre diferentes áreas do conhecimento.

## VI. RESULTADOS ESPERADOS E DISCUSSÃO

Ao final da aplicação desta proposta didática, espera-se que os alunos desenvolvam uma **compreensão conceitual profunda** sobre o Teorema do Valor Intermediário (TVI), superando abordagens tradicionais baseadas apenas na memorização de definições e teoremas.

### ***Desenvolvimento Cognitivo***

Em termos de aprendizagem matemática, os alunos devem ser capazes de:

- Compreender intuitiva e formalmente o conceito de continuidade de uma função.
- Reconhecer a aplicabilidade do TVI em situações reais, percebendo-o como um instrumento para explicar fenômenos naturais, como a distribuição de temperaturas na superfície terrestre.
- Realizar análises de dados climáticos e representar informações por meio de gráficos e funções matemáticas.
- Formular hipóteses, argumentar matematicamente e validar conclusões com base em raciocínio lógico-dedutivo.
- Interpretar funções em múltiplas representações: gráfica, algébrica e descritiva.

### ***Desenvolvimento de Habilidades Socioemocionais***

Além das habilidades cognitivas, espera-se que os alunos desenvolvam competências socioemocionais, tais como:

- Trabalho colaborativo, ao interagir com os colegas durante as etapas da sequência Fedath, especialmente nas fases de discussão e transferência.
- Autonomia intelectual, ao conduzir pesquisas, buscar dados climáticos reais e construir argumentações próprias.
- Responsabilidade socioambiental, ao refletir sobre questões climáticas e ambientais em uma perspectiva global, compreendendo o papel da ciência na solução de problemas sociais [14].

### ***Instrumentos de Avaliação***

Para acompanhar e compreender melhor o que os alunos realmente aprenderam, é possível lançar mão de diferentes formas de avaliação — afinal, cada estudante tem seu jeito de expressar o que sabe. Abaixo, apresentamos algumas sugestões que tornam esse processo mais rico e reflexivo:

- Relatórios individuais ou em grupo: Uma ótima maneira de os alunos colocarem no papel suas descobertas. Eles podem registrar cada etapa da investigação, os cálculos realizados e as conclusões que conseguiram tirar ao longo do caminho. É como montar uma história da própria aprendizagem!
- Apresentações orais: Aqui, os estudantes têm a chance de explicar — com seus próprios argumentos — como aplicaram o Teorema do Valor Intermediário (TVI) para resolver o problema proposto. Essa troca desenvolve não só o raciocínio lógico, mas também a capacidade de comunicação.
- Criação de gráficos e modelagens matemáticas: Utilizando ferramentas como o GeoGebra ou até mesmo planilhas eletrônicas, os alunos visualizam os dados e

relações de forma dinâmica, o que torna o conteúdo mais palpável e interessante.

- Autoavaliação e avaliação entre colegas: Essa prática convida os alunos a refletirem sobre o próprio processo de aprendizagem e também a reconhecerem o esforço e as ideias dos colegas. É uma forma bonita de promover a empatia e a escuta ativa dentro da sala de aula.

Essas formas de avaliação, além de eficazes, também ajudam a construir um ambiente de aprendizado mais humano, colaborativo e significativo.

### ***Discussão Pedagógica***

Do ponto de vista pedagógico, essa atividade trouxe uma contribuição valiosa: ela ajudou os alunos a enxergarem a matemática não apenas como um conjunto de regras ou fórmulas, mas como uma linguagem poderosa para entender o mundo ao nosso redor [6]. E isso, convenhamos, muda tudo!

Ao trabalhar com uma situação-problema real e utilizar uma metodologia ativa — como a Sequência Fedath [11] —, os alunos não só aprendem de forma mais significativa [16], como também percebem a utilidade da matemática na prática, fora dos livros e da lousa. É nesse momento que a teoria deixa de ser algo distante e começa a fazer sentido.

Essa proposta também está em sintonia com os princípios da Educação Matemática Crítica [3], que valoriza o aluno como protagonista do seu próprio aprendizado. Em vez de apenas receber informações prontas, ele é convidado a pensar, questionar e construir conhecimento a partir de suas próprias vivências. E isso, além de empoderador, torna o processo muito mais rico e instigante.

Por fim, esperamos que essa experiência tenha sido não só educativa, mas também inspiradora. Que tenha despertado a curiosidade e o interesse pela matemática — mostrando que ela vai muito além da sala de aula, e pode, sim, nos ajudar a compreender fenômenos do cotidiano de forma crítica, criativa e consciente.

## **VII. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Este artigo detalhou uma proposta de ensino que conecta um resultado clássico da Análise Matemática, o Teorema do Valor Intermediário (TVI), a uma questão investigativa de forte apelo contextual: a existência de pontos antípodas na Terra com temperaturas iguais. Ao situar o problema na realidade geográfica do Tocantins e integrá-lo a ferramentas digitais e à modelagem matemática, buscamos tornar o ensino da matemática mais significativo, engajador e interdisciplinar.

A utilização da Sequência Fedath como metodologia didática contribuiu para estruturar a aprendizagem de forma dinâmica, promovendo a investigação, o debate e a construção coletiva de conhecimento. As diferentes etapas da sequência garantiram o envolvimento dos alunos desde a problematização inicial até a elaboração das conclusões, passando por momentos de pesquisa, discussão e aplicação prática dos conceitos matemáticos.

Do ponto de vista educacional, essa proposta foi muito além de ensinar matemática. Ela criou uma ponte entre

saberes — conectando conteúdos de matemática, geografia, física e questões ambientais — e ajudou a desenvolver competências importantes indicadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [7], como o pensamento científico, crítico e criativo, além da argumentação e do uso consciente da tecnologia. Tudo isso de um jeito que faz sentido para os alunos, com base em situações reais.

Um dos grandes destaques dessa experiência foi mostrar como a interdisciplinaridade e a contextualização podem tornar o ensino da matemática mais significativo. Essa abordagem vai ao encontro dos princípios da Educação Matemática Crítica [3] e da Etnomatemática [2], que defendem justamente o uso da matemática como uma ferramenta para entender — e transformar — a realidade.

Como sugestão para próximos passos, acreditamos que vale a pena continuar explorando novas possibilidades didáticas. Por exemplo, usar teoremas mais avançados, como o de Bolzano ou o de Rolle, em situações que estejam ligadas ao dia a dia dos alunos, tanto em contextos locais quanto globais. Isso pode ser uma forma poderosa de mostrar que a matemática está, sim, presente no mundo ao nosso redor — mesmo onde a gente menos espera.

Para finalizar, queremos reforçar algo essencial: práticas pedagógicas que incentivam a curiosidade, o pensamento crítico e a reflexão, a partir de experiências autênticas, são fundamentais na formação de estudantes mais autônomos e conscientes. Quando o aluno percebe que a matemática pode ajudá-lo a entender o mundo — e até a mudá-lo —, o aprendizado ganha outro sentido. E é isso que torna tudo mais inspirador..

### VIII. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal do Tocantins (UFT) pelo apoio institucional e aos colegas do Departamento de Matemática pelas valiosas discussões. Agradecemos também às agências de fomento, CAPES e CNPq, pelo suporte fundamental à pesquisa e à educação no Brasil.

### REFERENCES

- [1] J. Dewey, *Experience and Education*. New York, NY: Touchstone, 1938.
- [2] U. D'Ambrosio, *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2005.
- [3] O. Skovsmose, *Educação Matemática Crítica: A questão da democracia*. Campinas, SP: Papirus Editora, 2001.
- [4] M. V. Almeida and K. A. P. Silva, "A curiosidade como ponto de partida: investigações matemáticas na sala de aula," *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, vol. 6, no. 2, pp. 45–60, 2013.
- [5] P. Freire, *Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa*. São Paulo, SP: Paz e Terra, 1996.
- [6] R. C. Bassanezi, *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo, SP: Editora Contexto, 2002.
- [7] Brasil, "Base nacional comum curricular (bncc)," <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>, 2018, acesso em: 16 de junho de 2025.
- [8] J. Stewart, *Cálculo, Volume 1*. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2013.
- [9] J. O. Ayoade, *Introdução à climatologia para os trópicos*. Rio de Janeiro, RJ: Bertrand Brasil, 2010.
- [10] M. C. Borba and M. G. Penteado, *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2001.
- [11] D. L. Souza and E. C. Bezerra, *Sequência Fedath: Metodologia ativa para o ensino de Matemática*. Curitiba, PR: Editora CRV, 2020.
- [12] J. M. Silva and A. R. Souza, *Cartografia e geografia escolar: Fundamentos e práticas*. São Paulo, SP: Editora Contexto, 2017.
- [13] P. A. Tipler and G. Mosca, *Física para Cientistas e Engenheiros: Volume 1 – Mecânica, Oscilações e Termodinâmica*. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2009.
- [14] C. F. B. Loureiro, "Educação ambiental transformadora," in *Identidades da educação ambiental brasileira*, P. P. Layrargues, Ed. Brasília, DF: Ministério do Meio Ambiente, 2004.
- [15] C. B. Boyer and U. C. Merzbach, *História da Matemática*. São Paulo, SP: Blucher, 2012.
- [16] D. P. Ausubel, *Aquisição e retenção de conhecimentos: Uma perspectiva cognitiva*. Porto Alegre, RS: Artmed, 2003.



# Nem sempre o menor caminho é uma linha reta

## *The shortest path is not always a straight line*

Lisandra Maria Malaquias de Sousa<sup>1</sup>, Frank Alves Lustosa<sup>1</sup>, Hellena Christina Fernandes Apolinário<sup>1</sup>  
e Warley Gramacho da Silva<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal do Tocantins, PROFMAT, Tocantins, Brasil

Data de recebimento do manuscrito: 10/07/2025

Data de aceitação do manuscrito: 25/12/2025

Data de publicação: 28/12/2025

**Resumo**—A Geometria Euclidiana é a geometria mais conhecida e de grande utilização nas aulas de matemática, mas até que ponto ela é aplicável no cotidiano? Ao se locomover pela cidade, não é possível usar o menor caminho proposto pela geometria euclidiana, passando por edifícios, por exemplo. A Geometria do Táxi, uma geometria não muito comentada, é a que melhor descreve os possíveis percursos no cotidiano. A geometria do táxi, ou Geometria de Manhattan, utiliza apenas segmentos horizontais ou verticais, assemelhando-se a uma malha quadriculada, como o plano cartesiano. Este artigo propõe atividades simples que buscam instigar o estudante do Ensino Médio a investigar o uso da geometria no seu cotidiano, conjecturar seus resultados e verificar qual geometria é mais adequada.

**Palavras-chave**—Geometria Euclidiana, Geometria do Táxi, GeoGebra

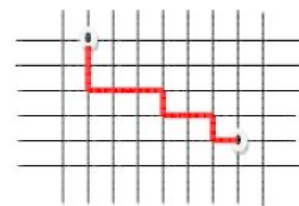
**Abstract**—Euclidean geometry is the best-known geometry and is widely used in math classes, but to what extent is it applicable in everyday life? When moving around the city, it's not possible to use the shortest path proposed by euclidean geometry, passing by buildings, for example. The Taxicab Geometry, a geometry not often discussed, is the one that best describes possible routes in everyday life. The taxicab geometry, or Manhattan Geometry, uses only horizontal or vertical segments, resembling a grid, like the Cartesian plane. This article proposes simple activities designed to encourage high school students to investigate the use of geometry in their daily lives, conjecture their results and verify which geometry is most appropriate.

**Keywords**—Euclidean Geometry, Taxicab Geometry, GeoGebra

## I. INTRODUÇÃO

A Geometria euclidiana está presente na vida escolar do estudante desde o Ensino Fundamental, sendo que o primeiro contato com ela é, geralmente, pelo plano cartesiano. Assim como ocorre com alguns conceitos e ideias matemáticas, ao serem introduzidos ao plano cartesiano, os estudantes se perguntam ‘onde usarei isso na minha vida?’. E a resposta não é muito simples, mas pode ser melhor construída com a Geometria do Táxi, uma geometria não euclidiana em que os segmentos são linhas ou verticais ou horizontais, simulando uma viagem de táxi em uma cidade onde as ruas são dispostas como na malha quadriculada [1]. A Figura 1 mostra um possível trajeto dessa viagem na malha urbana.

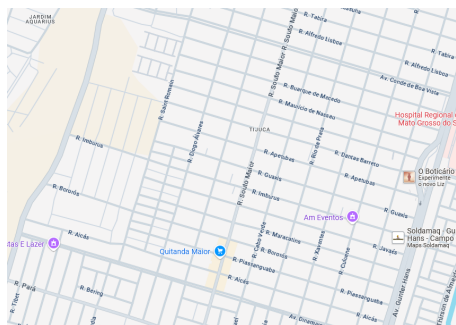
Um ponto principal para a escolha da geometria do táxi é que nem sempre o cálculo da distância euclidiana é suficiente para a aplicação na geometria urbana, pois o trajeto não pode



**Figura 1:** Trajeto na malha urbana

ser realizado na prática [1]. As situações apresentadas nas atividades propostas evidenciam e comparam a possibilidade de uso de cada geometria, mostrando que o uso da geometria euclidiana para tráfego no dia a dia é raro e específico para alguns veículos.

A aplicação de geometrias não euclidianas em sala de aula ainda é limitada por questões como, por exemplo, lacunas na formação de professores [2]. A dificuldade de aplicar tais conceitos também pode ser justificada pela complexidade das atividades propostas, há casos em que o professor que ministra a disciplina de matemática não é formado em Licenciatura em Matemática. Pensando nessas possíveis dificuldades, este trabalho apresenta atividades



**Figura 2:** Vista aérea do bairro Tijuca, Campo Grande, MS

simples que podem ser aplicadas aos estudantes de qualquer série do Ensino Médio e até mesmo do Ensino Fundamental, considerando que os estudantes já estejam familiarizados com os conceitos iniciais de geometria euclidiana, tornando possível relacioná-los à geometria do táxi.

As aulas de matemática podem ser monótonas quando o estudante não percebe a aplicação do cálculo realizado em sua realidade. Esse problema não ocorre com tanta frequência na geometria do táxi, que tem sua métrica mais semelhante à disposição das vias de trânsito de uma cidade do que a geometria euclidiana. Algumas cidades tem suas vias ainda mais próximas à disposição da malha do plano cartesiano do que outras, como, por exemplo, o bairro Tijuca em Campo Grande - MS, como mostra a Figura 2, sendo possível fazer uma relação direta. No caso da cidade apresentada neste trabalho, Palmas - TO, a disposição das vias de trânsito não ocorre como a malha quadriculada, mas se assemelha o suficiente para aplicar as atividades propostas e obter o resultado esperado por parte dos estudantes.

Suponha que se deseje calcular o gasto mensal com combustível no deslocamento entre a residência e o local de trabalho. Para esse cálculo, é necessário saber a distância percorrida. Ao se locomover pela cidade, não é possível atravessar prédios e edifícios. Então, como calcular a distância entre dois pontos no mapa de uma cidade? A menor distância entre dois pontos é uma linha reta? Nem sempre. Pela Figura 1 é fácil perceber que basta somar as distâncias horizontais e verticais que ligam os pontos.

## II. TEORIA PRELIMINAR

Esta seção apresenta algumas definições importantes para a aplicação das atividades propostas, como distância entre dois pontos na geometria euclidiana e na geometria do táxi. As demonstrações das propriedades apresentadas nessa seção podem ser encontradas em [1] e [3].

### a. Geometria Euclidiana

Considere os pontos  $A = (x_a, y_a)$  e  $B = (x_b, y_b)$ . A distância euclidiana entre eles é dada por:

$$d_e(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}.$$

A partir dessa definição, a função  $d_e$  satisfaz as seguintes propriedades:

- i)  $d_e(A, A) = 0$ ;
- ii) Se  $A \neq B$  então  $d_e(A, B) > 0$ ;

$$\text{iii) } d_e(A, B) = d_e(B, A);$$

$$\text{iv) } d_e(A, B) \leq d_e(A, C) + d_e(C, B).$$

### b. Geometria do Táxi

Considere os pontos  $A = (x_a, y_a)$  e  $B = (x_b, y_b)$ . A distância do táxi entre eles é dada por:

$$d_t(A, B) := |x_a - x_b| + |y_a - y_b|.$$

A partir dessa definição, a função  $d_t$  satisfaz as seguintes propriedades:

$$\text{i) } d_t(A, A) = 0;$$

$$\text{ii) Se } A \neq B \text{ então } d_t(A, B) > 0;$$

$$\text{iii) } d_t(A, B) = d_t(B, A);$$

$$\text{iv) } d_t(A, B) \leq d_t(A, C) + d_t(C, B)$$

As propriedades *i*, *ii* e *iii* são demonstradas diretamente pela definição. Para mostrar que a propriedade *iv* é válida, utiliza-se a definição de módulo:  $|x + y| \leq |x| + |y|$  para  $x, y \in \mathbb{R}$ . Daí segue que  $|x_a - x_b| \leq |x_a - x_c| + |x_c - x_b|$  e  $|y_a - y_b| \leq |y_a - y_c| + |y_c - y_b|$ . E, por consequência,

$$|x_a - x_b| + |y_a - y_b| \leq |x_a - x_c| + |x_c - x_b| + |y_a - y_c| + |y_c - y_b|$$

$$\therefore d_t(A, B) \leq d_t(A, C) + d_t(C, B).$$

### c. Relação entre as geometrias

A geometria euclidiana e a geometria do táxi podem ser relacionadas por

$$d_t(A, B) \geq d_e(A, B).$$

Essa relação é de fácil demonstração. Para os pontos  $A = (x_a, y_a)$  e  $B = (x_b, y_b)$ , temos  $2 \cdot |x_a - x_b| \cdot |y_a - y_b| \geq 0$ . Somando  $(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2$  a ambos os membros da desigualdade, temos:

$$(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + 2 \cdot |x_a - x_b| \cdot |y_a - y_b| \geq (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2$$

$$\Rightarrow (|x_a - x_b| + |y_a - y_b|)^2 \geq (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2$$

Assim,

$$\sqrt{(|x_a - x_b| + |y_a - y_b|)^2} \geq \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

$$\Rightarrow |x_a - x_b| + |y_a - y_b| \geq \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

$$\therefore d_t(A, B) \geq d_e(A, B).$$

Existem duas condições para que a igualdade ocorra, ou seja, para que a distância do táxi entre dois pontos seja igual a distância euclidiana entre eles. A primeira é  $A = B$ , sendo imediato que  $d_t(A, B) = 0 = d_e(A, B)$ .

Para  $A = (x_a, y_a)$  e  $B = (x_b, y_b)$  pontos distintos,

$$d_t(A, B) = d_e(A, B)$$

$$\Rightarrow |x_a - x_b| + |y_a - y_b| = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

$$\Rightarrow (|x_a - x_b| + |y_a - y_b|)^2 = \left( \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \right)^2$$

$$\Rightarrow |x_a - x_b|^2 + 2 \cdot |x_a - x_b| \cdot |y_a - y_b| + |y_a - y_b|^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot |x_a - x_b| \cdot |y_a - y_b| = 0.$$

Observe que, se  $|x_a - x_b| = 0$  então  $x_a = x_b$  e, de modo análogo,  $|y_a - y_b| = 0$  implica  $y_a = y_b$ . Isso significa que o segmento  $\overline{AB}$  é paralelo ao eixo das abscissas  $Ox$  ou ao eixo das ordenadas  $Oy$ . Assim, a segunda condição para que a distância do táxi e a distância euclidiana entre dois pontos  $A$  e  $B$  seja igual é que tais pontos estejam em uma reta paralela ao eixo das abscissas ou das ordenadas.

**Exemplo 1:** Seja  $A = (1, 3)$  e  $B = (1, 3)$  então

$$d_e(A, B) = \sqrt{(1 - 1)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{0} = 0$$

$$d_t(A, B) := |1 - 1| + |3 - 3| = |0| + |0| = 0$$

$$\therefore d_e(A, B) = d_t(A, B)$$

**Exemplo 2:** Seja  $C = (-1, 3)$  e  $D = (1, 3)$  então

$$d_e(C, D) = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$d_t(C, D) := |-1 - 1| + |3 - 3| = |-2| + |0| = 2$$

$$\therefore d_e(C, D) = d_t(C, D)$$

**Exemplo 3:** Seja  $E = (-1, 3)$  e  $F = (1, -3)$  então

$$d_e(E, F) = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (-3 - 3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$d_t(E, F) := |-1 - 1| + |-3 - 3| = |-2| + |-6| = 8$$

$$\therefore d_e(E, F) \neq d_t(E, F)$$

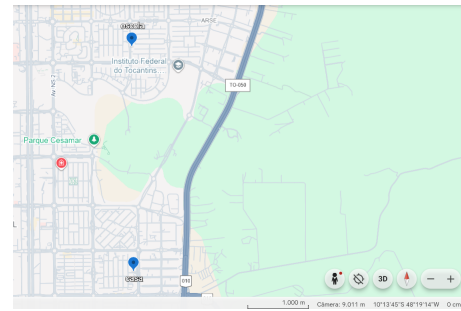
### III. ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS GERAIS

As geometrias não euclidianas não possuem habilidades e competências específicas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), mas podem ser apresentadas aos estudantes por meio da Competência Específica 5, permitindo a formulação de conjecturas e validando-as ou não com base em investigações matemáticas, fundamentais para a parte pedagógica.

Competência Específica 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. ([4] p. 532)

Além da competência específica, é importante citar as habilidades previstas na BNCC [4] que estão relacionadas às atividades propostas:

**EM13MAT501** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.



**Figura 3:** Vista aérea de parte da cidade de Palmas, TO.



**Figura 4:** Segmento entre casa e escola no GeoGebra

**EM13MAT505** Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.

### IV. ATIVIDADES

As atividades aqui apresentadas buscam envolver ambas as geometrias, tornando possível a comparação direta entre elas e buscando, como determina a competência 5, que o estudante formule conjecturas e valide-as, ou não, por meio de investigações matemáticas.

#### a. O caminho de casa até a escola

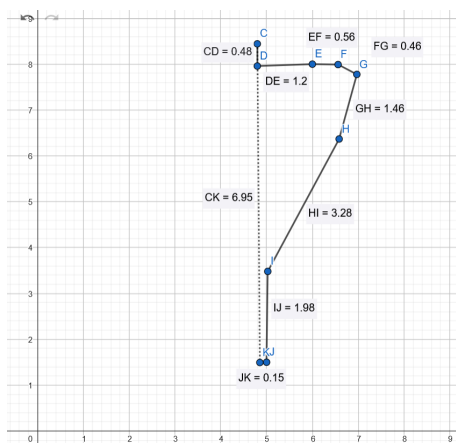
A primeira atividade busca que os alunos desenhem dois pontos no *GeoGebra* e tracem segmentos que representem o caminho entre sua casa e sua escola. Para isso, o aluno pode usar uma imagem retirada do *Google Maps*, ou outro aplicativo, como o *Google Earth*, em que seja possível visualizar os pontos. A Figura 3 apresenta um exemplo de imagem que pode ser utilizada, mostrando a vista de parte da cidade de Palmas - TO.

Colando essa imagem no *GeoGebra* e marcando os segmentos, temos a Figura 4:

Utilizando a ferramenta *Distância* temos as medidas entre os pontos, como destacada em Figura 5:

Aqui segue a pergunta: Qual é a menor distância entre os pontos C e K? A do segmento pontilhado,  $\overline{CK}$ , obviamente. Mas ela é aplicável no cotidiano? Vendo a Figura 3 novamente, percebe-se que não, não é aplicável para a locomoção na cidade, pois, para isso, teria que ser possível atravessar prédios, casas e também o parque. Seria ótimo se pudéssemos atravessar tudo, mas não é possível.

De acordo com a Figura 5, qual geometria descreve melhor o cálculo da distância do segmento pontilhado,  $\overline{CK}$ ? E qual geometria descreve melhor a soma dos segmentos em



**Figura 5:** Medidas dos segmentos entre casa e escola no GeoGebra



**Figura 6:** Distância entre os pontos A = (1, 7) e B = (12, 1)

linha contínua,  $\overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HI} + \overline{IJ} + \overline{JK}$  ?

**b. Calculando distâncias**

Aqui seguem algumas atividades para evidenciar a diferença entre o menor caminho na geometria euclidiana e na geometria do táxi.

*Questão 1.* Mateus está na praça central de sua cidade, localizada no ponto A = (1, 7), e quer visitar sua amiga Carla, que mora no ponto B = (12, 1). As ruas da cidade seguem o formato de quadras e a praça permite atravessar em linha reta pelo gramado. Mateus tem duas opções: atravessar pelo gramado ou andar pelas ruas.

- a) Qual a distância que Mateus percorre se atravessar a praça e andar pelo gramado?
- b) Qual distância ele percorre se andar pelas ruas?
- c) Qual é a opção mais curta? E qual é a mais realista no dia a dia?

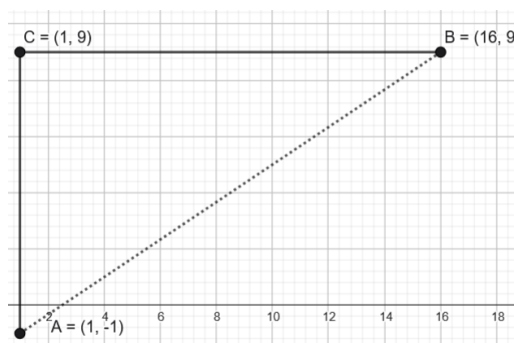
Utilizando o *software GeoGebra*, Mateus irá percorrer os caminhos indicados nos segmentos contínuos ou pontilhados, sendo o caminho contínuo o das ruas e o pontilhado o que ele atravessa a praça, como mostra a Figura 6.

a) Notando que o percurso é o segmento  $\overline{AB}$ , e ele é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC, podemos calcular sua medida pelo Teorema de Pitágoras. Para isso, precisamos dos valores dos segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$ .

$$\overline{AC} = |1 - 1| + |7 - 1| = |6| = 6$$

$$\overline{CB} = |1 - 12| + |1 - 1| = |-11| = 11$$

Vale ressaltar que os módulos são de extrema importância, pois estamos trabalhando com distâncias.



**Figura 7:** Caminho 1 entre os pontos A = (1, -1) e B = (16, 9)

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$$

$$\overline{AB}^2 = 6^2 + 11^2 = 36 + 121 \implies \overline{AB} = \sqrt{157}$$

e, sendo  $\overline{AB} \geq 0$  temos que  $\overline{AB} \approx 12,53$

b) Andando pelas ruas, Mateus irá percorrer a distância  $\overline{AC} + \overline{CB}$  que pode ser calculada simplesmente pela soma das distâncias vertical e horizontal.

$$\overline{AC} + \overline{CB} = 6 + 11 = 17$$

Aqui, o estudante pode perceber que a definição de distância entre dois pontos na geometria do táxi está sendo aplicada:

$$\overline{AB} = |1 - 12| + |7 - 1| = |-11| + |6| = 11 + 6 = 17$$

c) A opção mais curta para Mateus é atravessar a praça, pois  $12,53 < 17$ . No dia a dia não é tão simples andar pelas diagonais, pois ao invés da praça podemos encontrar edifícios e construções que impedem esse trajeto.

*Questão 2.* Na aula de matemática, os estudantes recebem um mapa de uma cidade quadriculada, onde só é possível andar para cima e para os lados. No jogo, o personagem deve ir do ponto A = (1, -1) ao ponto B = (16, 9).

- a) Qual é a distância percorrida pelo personagem?
- b) Se o personagem pudesse voar em linha reta, qual seria a distância percorrida por ele?
- c) Qual geometria descreve a cidade?

Uma das características da Geometria do Táxi é que há diversas opções para traçar o menor caminho entre dois pontos. Nas imagens abaixo, temos essa comparação nas Figura 7 e Figura 8, onde a distância euclidiana é o segmento pontilhado entre A e B, e a distância do táxi é o segmento contínuo passando pelos pontos C, D e E.

a) A distância pode ser calculada pela geometria do táxi. Utilizando a Figura 7, temos:

$$\overline{AB} = |1 - 16| + |-1 - 9| = |-15| + |-10| = 15 + 10 = 25$$

Utilizando a Figura 8:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EB}$$

$$\overline{AB} = (|1 - 1| + |-1 - 5|) + (|1 - 6| + |5 - 5|) + (|6 - 6| + |5 - 9|) + (|6 - 16| + |9 - 9|)$$

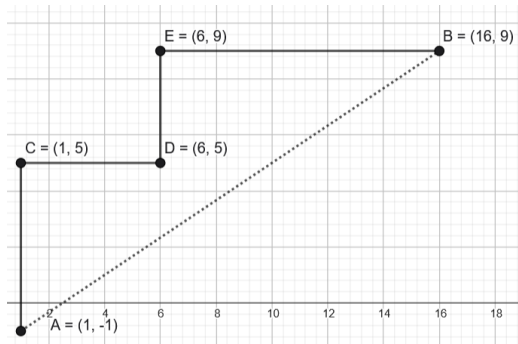


Figura 8: Caminho 2 entre os pontos A = (1, -1) e B = (16, 9)

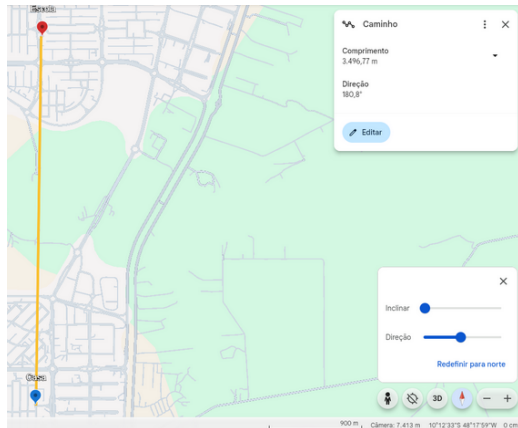


Figura 9: Caminho entre escola e casa pelo Google Earth

$$\overline{AB} = |-6| + |-5| + |-4| + |-10| = 6 + 5 + 4 + 10 = 25$$

b) Se o personagem pudesse voar, ele percorreria o segmento  $\overline{AB}$ , a hipotenusa do triângulo retângulo ABC na Figura 7.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = (|1-1| + |-1-9|)^2 + (|1-16| + |9-9|)^2$$

$$\overline{AB}^2 = 10^2 + 15^2 \implies \overline{AB} = \sqrt{325} \approx 18,03$$

c) A geometria do táxi é a geometria que melhor descreve a cidade, pois simula ruas em grades onde não se pode andar na diagonal.

### c. Relação entre as duas geometrias

Essa atividade tem como objetivo fazer uma comparação entre o uso das duas geometrias no cotidiano do aluno, e tem como base o município de Palmas-TO e o Colégio Estadual Dom Alano Marie Du Noday.

**Questão 1.** Utilizando o aplicativo *Google Earth*, calcule a distância entre a sua casa e a sua escola.

Aqui utilizaremos o Colégio Estadual Dom Alano Marie Du Noday em Palmas-TO como referência. A Figura 3 já representa os pontos da escola e casa, bastando calcular a distância entre eles. Utilizando a ferramenta *Adicionar caminho ou polígono* clique nos pontos marcados para criar um caminho. A Figura 9 mostra que o comprimento / distância encontrada foi de 3.496,77 metros.

**Questão 2.** Utilizando o aplicativo *Google Maps*, calcule a distância entre a sua casa e a sua escola.

Encontre sua casa copiando as informações das coordenadas do *Google Earth* para o *Google Maps* e selecione a

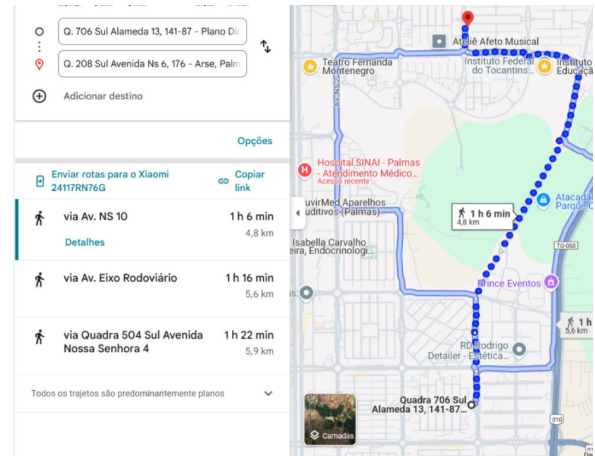


Figura 10: Caminho entre escola e casa pelo Google Maps

opção *Rotas*. A Figura 10 mostra que o trajeto sugerido pelo *Google Maps* tem 4,8 km de distância.

Sugerimos que o professor peça para os estudantes observarem os trajetos sugeridos pelo aplicativo. Essa diferença entre distâncias é justificada pelo quê? Por que as distâncias entre os aplicativos são diferentes? Essas perguntas irão guiar as investigações do uso das geometrias euclidiana e do táxi. É importante também investigar como os alunos entenderam essas atividades. Uma lista com algumas perguntas que podem guiar o professor por essa investigação:

- Qual tipo de geometria você utiliza mais no dia a dia?
- Qual tipo de geometria você utiliza mais na sala de aula/ aulas de matemática?
- Por que você acha que essa diferença entre os cálculos das distâncias nas GE e Geometria do Táxi ocorre?
- A distância na geometria do táxi sempre será maior do que na geometria euclidiana? Quando ela será igual?
- Cite algum veículo que não se move como a geometria euclidiana e geometria do táxi estão propondo.
- Quais outras geometrias você acha que existem?
- O que é necessário para ‘criar’ uma geometria?
- Você acha que as atividades propostas foram boas? Explique.
- Existem alguma cidade que as vias de trânsito se parecem mais com uma malha quadriculada? Pode citar algum exemplo?
- Se fosse possível utilizar sempre a geometria euclidiana para deslocamentos na sua cidade, você acha que seria mais fácil ou mais difícil o trânsito? Explique.

## V. CONCLUSÕES

Apesar de serem simples, as atividades apresentadas são importantes para que os estudantes possam expandir seu conhecimento sobre a matemática. A inclusão da geometria do táxi nas aulas de matemática não toma muito tempo e proporciona maior interação entre o conteúdo e o contexto

do estudante, deixando também de relacionar a matemática a algo muito teórico e de difícil aplicação, ou algo muito relacionado a calculadoras.

Os softwares *Google Earth* e *Google Maps* foram escolhidos pela facilidade de uso e gratuidade. O *Geogebra* é uma ferramenta que tem influência muito positiva na aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos. A visualização gráfica dos conceitos permite ao estudante elaborar conjecturas sobre os conceitos mostrados nos livros.

## REFERÊNCIAS

- [1] E. M. BARBARESCO and M. F. Z. MORGADO, “Geometria do taxi e suas aplicações,” *XXV Semana da Matemática IBILCE/UNESP*, pp. 1–28, 2013.
- [2] E. C. R. T. da SILVA, P. M. B. BELLEMAIN, and T. F. GALVÃO, “Para aonde vai esse táxi? uma revisão da literatura sobre a geometria do táxi no brasil,” *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, vol. 16, pp. 1–21, 2021.
- [3] E. F. KRAUSE, *Taxicab Geometry*. Dover Publications, 1986.
- [4] B. M. da Educação., “Base nacional comum curricular,” *MEC, Brasília*, 2018.

---

# Uma Proposta de Atividade para o Conceito de Integral no Ensino Médio via Método da Exaustão com Auxílio do Geogebra

*A Teaching Activity Proposal for the Concept of Integral in High School Using the Method of Exhaustion with the Aid of GeoGebra*

---

Jodã Gomes Brito<sup>1</sup>, Warley Gramacho da Silva<sup>1</sup>, Elis Gardel da Costa Mesquita<sup>1</sup> e Rogério Azevedo Rocha<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal do Tocantins, Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Tocantins, Brasil

Data de recebimento do manuscrito: 10/07/2025

Data de aceitação do manuscrito: 28/12/2025

Data de publicação: 31/12/2025

---

**Resumo**—Há, no meio acadêmico, um debate acerca da possibilidade de retomada do ensino de conceitos introdutórios de Cálculo Diferencial e Integral ainda na Educação Básica, especificamente no Ensino Médio. A ausência desse conteúdo nessa etapa do ensino suscita duas problemáticas principais: a exclusão de conceitos basilares para o desenvolvimento de diversas aplicações no mundo moderno e a perda da oportunidade de atenuar as elevadas taxas de evasão em cursos de ensino superior que incluem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em seus currículos. Diante desse cenário, este artigo objetiva apresentar uma breve contextualização histórica do desenvolvimento do Cálculo Integral, iniciando nos primeiros registros dos debates relacionados à noção de infinitesimal e culminando nos conceitos associados à integral de Riemann. Em seguida, são propostas duas atividades de exploração dos conceitos da integral de Riemann com o uso do software GeoGebra. A construção dos comandos é detalhada de modo a possibilitar sua reprodução e adaptação por professores. Acredita-se que a aplicação das atividades propostas contribua para uma aprendizagem mais fluida de conceitos considerados complexos, uma vez que alia recursos gráficos à abordagem de situações próximas ao cotidiano dos estudantes.

**Palavras-chave**— Cálculo Diferencial Integral; Soma de Riemann; Método da Exaustão; Cálculo de Área; Geogebra

**Abstract**—There is an ongoing debate in the academic community regarding the possibility of reintroducing introductory concepts of Differential and Integral Calculus in Basic Education, specifically at the high school level. The absence of this content at this stage of education raises two main issues: the exclusion of foundational concepts essential to the development of various applications in the modern world and the missed opportunity to mitigate the high dropout rates in higher education programs that include Differential and Integral Calculus in their curricula. In this context, this article aims to present a brief historical overview of the development of Integral Calculus, beginning with the earliest recorded debates related to the notion of infinitesimals and culminating in concepts associated with the Riemann integral. Subsequently, two exploratory activities addressing concepts related to the Riemann integral are proposed using the GeoGebra software. The construction of the commands is described in detail to enable their reproduction and adaptation by teachers. It is argued that the implementation of the proposed activities contributes to a more fluid learning of concepts considered complex, as it combines graphical resources with the exploration of situations close to students' everyday experiences.

**Keywords**— Differential and Integral Calculus; Riemann Sum; Method of Exhaustion; Area Calculation; GeoGebra

---

Médio, haja vista que esse assunto já fez parte da grade curricular desta etapa do ensino básico brasileiro até o ano de 1960.

Para [1] não é correto descartar o ensino de Cálculo, uma vez que se trata de um componente de significativa relevância no contexto da matemática moderna e responsável por propor um conjunto de ideias que o aluno não aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Ideias estas que tiveram e continuam tendo

## I. INTRODUÇÃO

**T**em-se discutido no meio acadêmico, com certa frequência, a possibilidade de retorno ao ensino de conceitos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral ainda no Ensino

Dados de contato: Jodã Gomes Brito, joda.gomes@mail.uft.edu.br

grande importância em diversos ramos da ciência no mundo moderno. Além disso, o Ensino Médio é a etapa educacional que prepara o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. Portanto, configura-se como um erro a não inclusão desse assunto nessa etapa do ensino.

Outra questão que surge na discussão sobre o tema é se a legislação atual permite a inclusão do ensino de Cálculo no Ensino Médio e como esse conteúdo pode ser ensinado. Em estudo realizado por [2] conclui-se que não somente é permitido como é possível trabalhá-lo junto com os conteúdos já previstos de forma contextualizada e interdisciplinar. Obviamente não é o momento de apego a formalismos e rigor, uma vez que os estudantes do Ensino Médio ainda não possuem maturidade para tanto. Porém, é possível desenvolver discussões interessantes no ensino de funções polinomiais, cálculo de áreas, assim como na cinemática, durante as aulas de física.

Outro ganho que se consegue, conforme discutido por [2], seria a diminuição das altas taxas de reprovação nas disciplinas de Cálculo, em cursos superiores que possuem o Cálculo Diferencial e Integral nos seus programas de ensino. O aluno, já ambientado com as ideias gerais trabalhadas no Ensino Médio, estaria melhor preparado para o tratamento mais rigoroso do assunto no Ensino Superior.

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho é apresentar um conjunto de duas atividades para o ensino das ideias relativas ao Cálculo Integral, precisamente o método da exaustão, utilizado pelos gregos para a resolução de problemas de cálculo de áreas e volumes de regiões curvas, sendo responsável por introduzir conceitos basilares para as técnicas de integração modernas. Este trabalho foi elaborado pensando na utilização do software GeoGebra durante as aulas.

É esperado, com a aplicação da proposta apresentada nesse trabalho, uma contribuição no aguçamento do espírito investigativo dos estudantes a respeito do cálculo de áreas de figuras *não convencionais* tendo em vista a abordagem interdisciplinar e contextualizada. Além disso, um caminhar na direção da compreensão da relevância do conhecimento matemático para o entendimento da vida cotidiana.

Antes da apresentação das atividades, serão apresentados alguns marcos históricos relativos ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, propiciando, assim, ao professor um repertório histórico sobre o tema. Em seguida, será feita uma breve apresentação do software que será utilizado na execução das atividades. Após o detalhamento das atividades, o trabalho se encerra com as considerações finais.

A próxima seção trará alguns marcos históricos ocorridos durante o desenvolvimento do Cálculo Integral. Abordará algumas das principais figuras que contribuíram para esse processo. Entende-se que o professor munido desses fatos históricos conseguirá incluí-los no momento da aplicação das atividades propostas, tornando assim a aula mais cativante para os estudantes.

## II. EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO CÁLCULO

Considera-se que a invenção do cálculo ocorreu no final do século XVII, de forma independente, pelos matemáticos Gottfried Wilhelm Leibniz e Sir Isaac Newton. Conforme

[3], com essa invenção, a matemática criativa transcendeu para um plano superior, estendendo-se, a partir daí, para além da matemática considerada elementar. No entanto, cabe destacar que as ideias genitoras do que viria a ser o cálculo remontam de muito antes de Isaac Newton e Leibniz, surgiram ainda na Grécia antiga. O primeiro registro conhecido sobre o cálculo de uma superfície curva é do Papiro Egípcio de Moscou, datado de aproximadamente 1890 a.c. Nele é pedido a área da superfície de um cesto e a questão é respondida com um cálculo semelhante à uma fórmula de integração [4].

### *a. Paradoxos de Zenão e o método de Exaustão de Eudoxo*

O cálculo trabalha essencialmente com a ideia do infinitesimal. Sobre esse tema, há evidência de que na Grécia antiga surgiram escolas de raciocínio matemático que abraçavam uma das seguintes premissas: de que uma grandeza poderia ser subdividida de forma indefinida ou de que seria formada por um número grande de partes atômicas indivisíveis. Para essas duas premissas, o filósofo Zenão de Eleia (c. 450 a.C) destacou dificuldades lógicas, criando alguns paradoxos que tiveram forte influência na matemática do período [3].

Os primeiros problemas da história do cálculo estão relacionados ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Por exemplo, sobre o problema de encontrar um quadrado de área equivalente a um círculo dado (quadratura do círculo), consta que uma das contribuições mais antigas é creditada à Antífon, o Sofista (c. 430, a.C), um contemporâneo de Sócrates. A abordagem de Antífono, continha o germe do famoso método de exaustão grego. Ele argumentou que por sucessivas duplicações dos lados de um polígono regular inscrito em um círculo seria possível eliminar a diferença entre a área do círculo e a área do polígono. E, como é possível, dado um polígono, construir um quadrado com a mesma área, o problema está resolvido [3]. O desenvolvimento dessa ideia utilizando o software GeoGebra constitui a segunda atividade proposta neste artigo.

### *b. O método de equilíbrio de Arquimedes e avanços posteriores*

O renomado matemático grego Arquimedes (287–212 a.C.) desenvolveu o chamado método de equilíbrio. Segundo [3], esse método consistia em determinar áreas ou volumes de figuras geométricas por meio da decomposição da região em um grande número de fatias paralelas extremamente finas, as quais eram concebidas como suspensas em uma das extremidades de uma alavanca. O equilíbrio era então estabelecido em relação a uma figura de área ou volume conhecidos, cujo centroide fosse previamente determinado. Observa-se, assim, que esse procedimento antecipa a ideia fundamental que viria a constituir a base da Integral de Riemann.

O método de equilíbrio de Arquimedes, usava ao mesmo tempo conceitos da física e o método de exaustão. A ideia do fatiamento de uma superfície constitui o cerne do que viria a

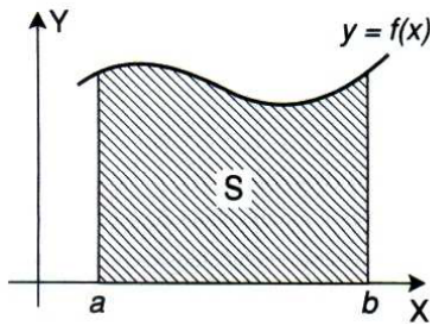


Figura 1: Área abaixo do gráfico de  $f(x)$

ser a Integral de Riemann.

Como explica [3], das realizações de Arquimedes até os tempos modernos, a teoria sobre integração quase não foi explorada. Apenas por volta de 1450 os trabalhos do grande matemático grego chegaram à Europa Ocidental. A partir desse ponto, alguns matemáticos e engenheiros passaram a utilizar métodos semelhantes aos de Arquimedes.

### c. Newton X Leibniz

Pelos anos de 1675, conforme destaca [3], já se tinha feito progressos no cálculo integral e diferencial. O *teorema fundamental do cálculo*, apareceu enunciado e demonstrado em *Lectiones*, obra do matemático britânico, precursor de Newton, Isaac Barrow. Havia ocorrido também progressos em resoluções de problemas com integrações, o processo de diferenciação tinha aflorado com muitas tangentes de curvas sendo descobertas. Além disso, a ideia de limite já fora concebida. Mas então, o que ainda faltava?

Segundo [3], a matemática carecia de um simbolismo geral e de regras analíticas formais sistematizadas, além de fundamentos rigorosos. As contribuições independentes de Newton e Leibniz atenderam a essa primeira necessidade, motivo pelo qual a invenção do cálculo lhes é atribuída.

Após o surgimento do cálculo houve ainda um longo percurso de aperfeiçoamento que contou com a participação de diversos matemáticos. Conforme pontua [5], isso ocorreu por ter sido verificado ao longo dos anos finais do século XVIII, muitos absurdos e contradições ao se assumir certas premissas como verdadeiras. Por isso imperou a necessidade de dar uma fundamentação lógica rigorosa ao cálculo.

### d. Bernhard Riemann

A definição de integral que se tem contato atualmente nos cursos superiores é devida ao matemático alemão Bernhard Riemann (1826 - 1866). O significado geométrica se assemelha à do método de Arquimedes. No contexto da integral de Riemann, esta pode ser interpretada como a área situada sob o gráfico de uma função não negativa em um intervalo dado. Tal área é obtida por meio da partição do intervalo em subintervalos cada vez menores, construindo-se retângulos associados a esses subintervalos e, ao final, somando-se as áreas correspondentes.

Explicaremos em mais detalhes tomando como referência [6]. O objetivo é encontrar a área  $S$  de uma região plana delimitado pelo gráfico de uma função contínua não negativa, o eixo dos  $x$  e as retas  $x = a$  e  $x = b$  (Figura 1).

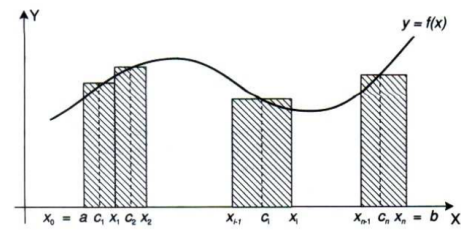


Figura 2: Formação dos retângulos

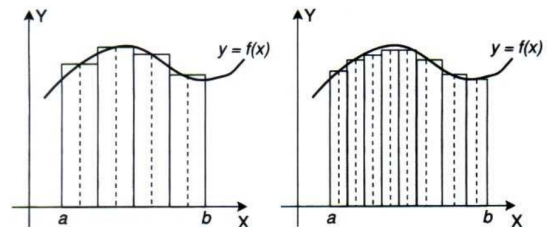


Figura 3: Soma de Riemann

Afim de obter a área desejada, particiona-se o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  intervalos, escolhendo os pontos:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$ . Onde  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  é o comprimento do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Escolhe-se um ponto qualquer  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Por fim, para cada um desses intervalos constrói-se um retângulo de base  $\Delta x_i$  e altura  $f(c_i)$ . O procedimento pode ser visualizado na Figura 2.

Na Figura 3, temos os retângulos para  $n = 4$  e  $n = 8$ .

A soma das áreas dos  $n$  retângulos é dada por  $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ . Esta soma é chamada de *Soma de Riemann* da função  $f(x)$ . Podemos observar que a medida em que  $\Delta x_i$  diminui, os retângulos se tornam cada vez menores e a área se aproxima intuitivamente da área  $S$  procurada. A integral definida no intervalo  $[a, b]$  é denotada pelo limite da Soma de Riemann quando  $\Delta x_i$  tende a 0. Isto é:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

## III. APRESENTAÇÃO DO RECURSO COMPUTACIONAL USADO

Conforme [7], o “GeoGebra é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma”. Pode ser usado de forma online no site <https://www.geogebra.org> ou também pode ser feito o *download*.

Conforme destacado por [8], o GeoGebra é uma ferramenta poderosa que oferece importantes vantagens quando utilizada durante as aulas de Matemática. Entre essas vantagens, destacam-se: a possibilidade de visualizar objetos e conceitos matemáticos, tornando-os mais tangíveis e compreensíveis; a interação direta dos alunos com os objetos trabalhados, permitindo a exploração e experimentação de diferentes cenários; e a construção de modelos que representam situações do mundo real, possibilitando a investigação de situações e o teste de hipóteses. A ferramenta também permite o compartilhamento de projetos, o que facilita a colaboração entre alunos e professores.

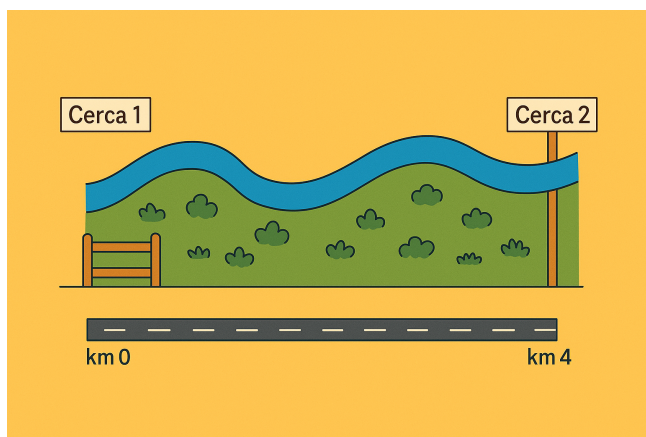


Figura 4: Ilustração da situação

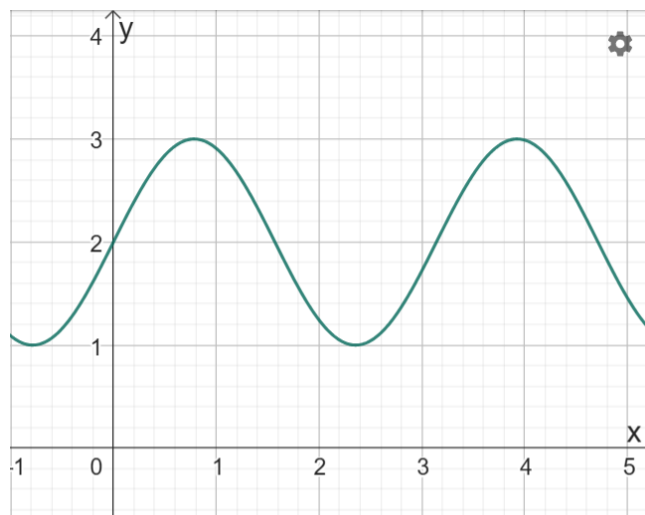


Figura 5: Gráfico da função

#### IV. ATIVIDADES PROPOSTAS

##### a. Atividade 01. Área de uma pequena vegetação de pastagem para animais

Carlos está realizando uma viagem de carro por uma avenida totalmente retilínea, ele sai inicialmente do km 0 onde há a cerca 01 e chega no km 04, onde há a cerca 02. Tomando o sentido do deslocamento de Carlos, à esquerda há um córrego que segue o trajeto da estrada, no entanto tem um formato curvilíneo que ao ser modelado matematicamente percebeu-se, se considerarmos o eixo x sendo a avenida 01 e o eixo y a cerca 01, ser definido pela função  $f(x) = \text{sen}(2x) + 2$ . Carlos é uma pessoa curiosa e se indagou de que maneira ele poderia obter a área da região delimitada, na vertical, pelas cercas e na horizontal pela avenida e pelo córrego. Essa área está cercada para ser utilizada como pastagem para animais.

A Figura 4 apresenta a ilustração da situação descrita. O desenho foi feito com o auxílio do ChatGPT, modelo de inteligência artificial desenvolvido pela empresa norte americana OpenAI e que permite o desenvolvimento de conversas humanizadas. O processo de criação da ilustração foi feito em três etapas: primeiro se criou um esboço desenhado a própria mão; após, pediu-se que o ChatGPT desenvolvesse algo similar; por fim, foi solicitado alguns ajustes pontuais.

Na Figura 5 está o trecho do gráfico da função  $f(x) = \text{sen}(2x) + 2$  que exploraremos.

O gráfico irá aparecer após, na versão online, selecionar as opções “Álgebra”, “gráfica” e na “entrada” digitar a função. Observemos o que foi descrito na Figura 6.

O próximo passo é definir os comandos para iniciar a aproximação da área da região desejada pela Soma de Riemann, cujo processo foi explicado na Sessão II. Aqui cabe um adendo. Utilizaremos a Soma de Riemann em duas formas:

- **Soma de Riemann Inferior:** neste caso o software particiona o intervalo  $[0,4]$  em  $n$  subintervalos  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$  de mesmo tamanho. Em cada um desses intervalos toma-se o retângulo de base  $x_i - x_{i-1}$  e altura  $f(c_i)$ , com  $c_i$  sendo o ponto no intervalo  $I_i$  em que a função assume valor mínimo. O resultado deste processo pode ser visualizado, por exemplo, na figura 8a.

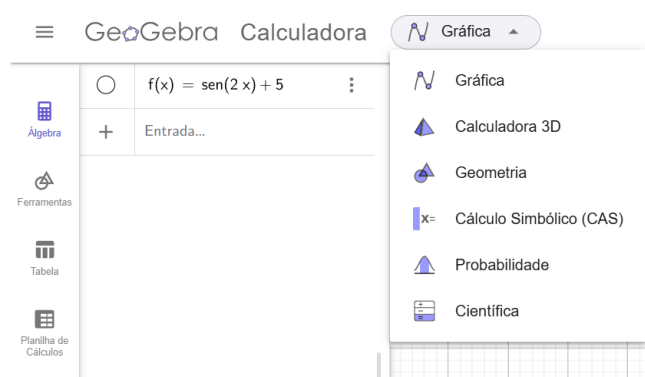


Figura 6: Definição da função no Geogebra

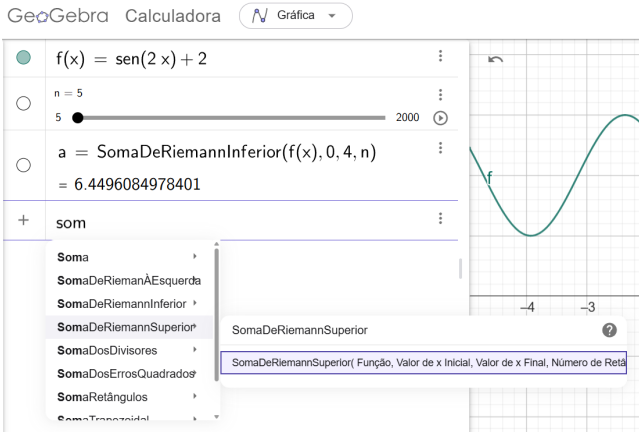
- **Soma de Riemann Superior:** neste caso o software particiona o intervalo  $[0,4]$  em  $n$  subintervalos  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$  de mesmo tamanho. Em cada um desses intervalos toma-se o retângulo de base  $x_i - x_{i-1}$  e altura  $f(c_i)$ , com  $c_i$  sendo o ponto no intervalo  $I_i$  em que a função assume valor máximo. O resultado deste processo pode ser visualizado, por exemplo, na figura 8b.

Para a determinação dos comandos, fazemos em ordem as seguintes etapas:

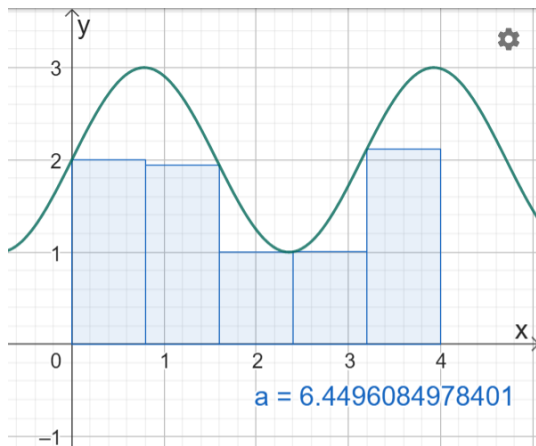
- **Definir e configurar o controle deslizante;** basta digitar a letra (em nosso caso “n”), igual e enter. Após isso clicar nos três pontos que fica do lado do controle deslizante definido, ir na janela “controle deslizante”, definir valor mínimo 5 e máximo 2000, incremento 1. Desse modo teremos uma quantidade de retângulos variando de 5 a 2000.
- **Configurar o comando da Soma de Riemann;** digite “rieman”, ponha o mouse sobre “somaderiemaniminferior (ou somaderiemansuperior)”, clique sobre a opção desejada, em função escreva  $f(x)$ , em “valor inicial” escreva 0, em valor final escreva 4, em “Número de retângulos” escreva  $n$ .

O processo descrito pode ser visualizado na figura 7.

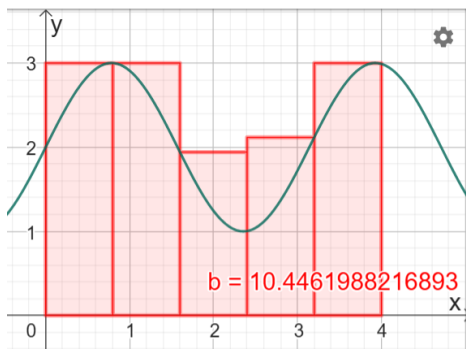
É intuitivo a conclusão de que sendo  $A_1$  a área da região



**Figura 7:** Determinação dos comandos para análise da área delimitada pela função



(a) Aproximação por falta



(b) Aproximação por excesso

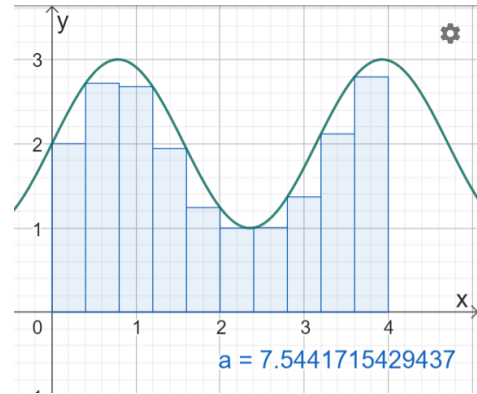
**Figura 8:** Aproximação da área por 5 retângulos

buscada tem-se que  $S_i \leq A_1 \leq S_s$ . Onde  $S_i$  é a Soma de Riemann Inferior e  $S_s$  a Soma de Riemann Superior.

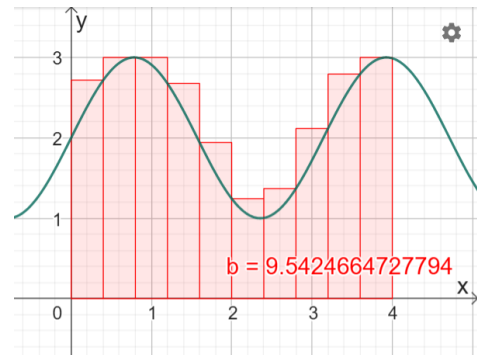
Aproximando 5 casas decimais, com 5 retângulos (Figura 8), a Soma de Riemann por falta gera uma área de  $6,4496 \text{ km}^2$  enquanto que por excesso gera  $10,4461 \text{ km}^2$ . Trata-se de uma variação significativa de  $3,9965 \text{ km}^2$ .

Movendo o controle deslizante para  $n = 10$ , ou seja, particionando a área em 10 retângulos obtemos uma aproximação por falta de  $7,5441 \text{ km}^2$  e por excesso de  $9,5424 \text{ km}^2$ . Aqui já percebemos uma diminuição da diferença para  $1,9983 \text{ km}^2$ . A Figura 9c expõe melhor essa comparação.

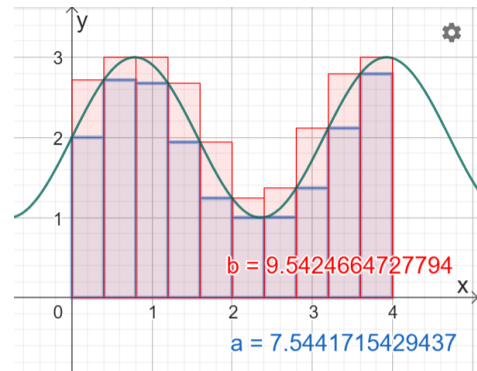
Movendo o controle deslizante para  $n = 25$ , como exposto na Figura 10, conseguimos uma aproximação por falta de



(a) Aproximação por falta.



(b) Aproximação por excesso



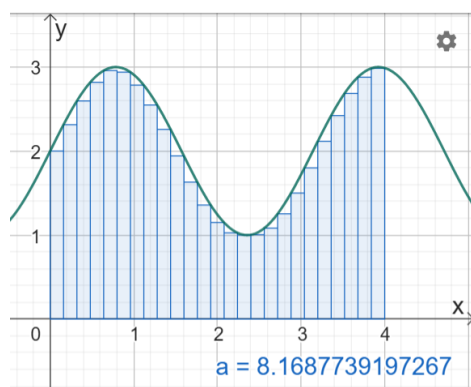
(c) Aproximação por falta e por excesso.

**Figura 9:** Aproximação da área por 10 retângulos

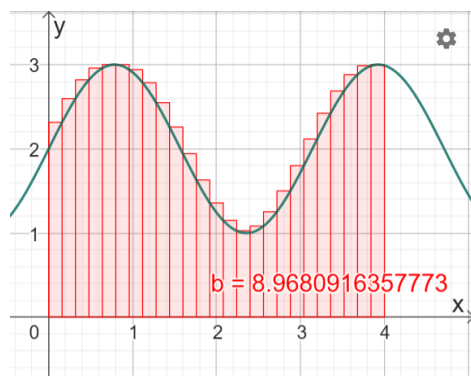
$8,1687 \text{ km}^2$ , enquanto que por excesso de  $8,9680 \text{ km}^2$ . A diferença continua diminuindo, agora para  $0,7993 \text{ km}^2$ .

Por fim, movendo o controle deslizante para  $n = 2000$ , máximo valor que definimos. Os retângulos se tornam tão próximos um do outro que graficamente, com o mesmo zoom usado nas imagens anteriores, não é possível distingui-los. A Figura 11 mostra o resultado obtido. Cabe destacar a diminuição expressiva da diferença entre a área aproximada por falta ( $8,5677 \text{ km}^2$ ) e a área aproximada por excesso ( $8,5777 \text{ km}^2$ ), apenas  $0,0093 \text{ km}^2$ .

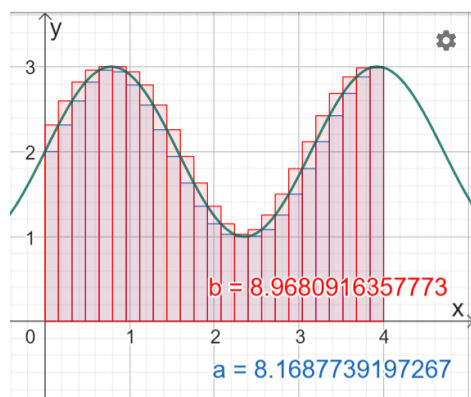
Fica evidente, portanto, que adoção do método gera uma aproximação da área tão mais precisa quanto maior a quantidade de subintervalos definidos. Ao conduzir as partições para o infinito, isto é, fazer a quantidade de subintervalos  $I_i$  infinitos a diferença será nula e  $S_i = S_s$ . Ao considerar o limite em que o número de subintervalos tende ao infinito, define-se, em essência, a integral de Riemann, a qual é estudada de maneira mais aprofundada em determinados cursos do ensino superior.



(a) Aproximação por falta

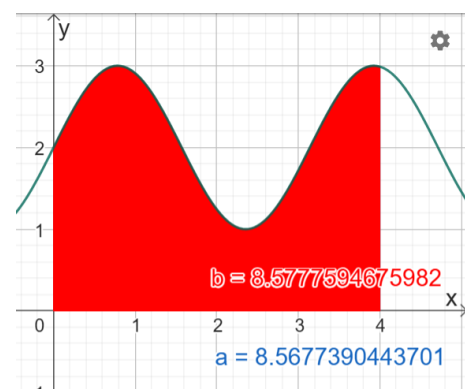


(b) Aproximação por excesso



(c) Aproximação por falta e por excesso

**Figura 10:** Aproximação da área por 25 retângulos



**Figura 11:** Aproximação por falta e excesso (2000 retângulos)

**b. Atividade 02. Área de uma superfície de formato circular**

Em uma certa propriedade há um poço artesiano de raio  $r = 10cm$ . Deseja-se obter a área da superfície circular desse

poço.

Com o conhecimento matemático atual facilmente é possível obter a área do círculo usando a famosa fórmula  $A_c = \pi r^2$ . Para o caso do poço artesiano, usando 5 casas decimais para  $\pi$ , chegamos em  $A_c = 3,14159 \cdot 10^2 = 314,159 cm^2$ .

Esta atividade tem por objetivo obter um resultado análogo por meio da aproximação da circunferência dada por polígonos regulares nela inscritos. Conforme destaca [3], este foi precisamente o método usado por Arquimedes que resultou na fórmula tão amplamente conhecida. Arquimedes conclui que a área de um círculo é equivalente a área de um triângulo retângulo cuja base é igual ao comprimento da circunferência e a altura é igual a seu raio, ou seja,  $A_c = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$ .

A Figura 12 apresenta a configuração dos comandos necessários para o estudo do problema a ser investigado. Explicaremos em ordem como definir cada um deles. Enfatizando que estamos usando a versão *online* do programa. A versão instalada não possui mudanças significativas.

- **Definição do círculo:** em “ferramenta”, na parte de círculos escolha a opção “Círculo: centro & raio”, clique no ponto (0,0) e defina o raio igual a 10.
- **Área do círculo:** digite na barra de entrada “área” e entre parênteses escreva “c”, ou a legenda criada pelo programa para o círculo definido anteriormente.
- **Controle deslizante:** fazer como no exercício anterior, coloque o menor n igual 3 para a formação de um triângulo inscrito na circunferência.
- **Sequência de pontos:** para definir a sequência de pontos que irão ser vértices dos polígonos inscritos escreva na barra de entrada exatamente o comando “Sequência” mostrado na Figura 12, tomando o devido cuidado para não cometer erros. Este comando define  $n$  pontos equidistantes, com  $n$  variando de 1 a 2000, todos inscritos em uma circunferência de raio 10 e centro (0,0).
- **Construção dos polígonos:** para a construção dos polígonos inscritos basta digitar “polígono”, selecionar a opção “Lista de pontos” e entre parênteses escrever o rótulo da lista de pontos definido anteriormente, em nosso caso “11”
- **Texto em tela:** o texto em tela é um recurso adicional que o professor pode usar para tornar a investigação mais interessante. Basta ir em “ferramentas”, “texto”. Ao escolher o local na tela em que o texto será exposto, na parte superior da caixa que se abrir, escreva a legenda desejada e em “avançado” escolha o rótulo do valor que deseja que apareça em tela.

Para  $n = 3$  o resultado pode ser visualizado na Figura 13. Notemos que há uma diferença significativa entre o valor da área calculado pelo programa e a área do triângulo.

Para  $n = 6$  o polígono inscrito é um hexágono. A diferença entre as áreas já diminuiu (Figura 14).

Por meio da Figura 15 visualiza-se o caso em que o polígono é um Decágono ( $n = 12$ ). Fica evidente que, à

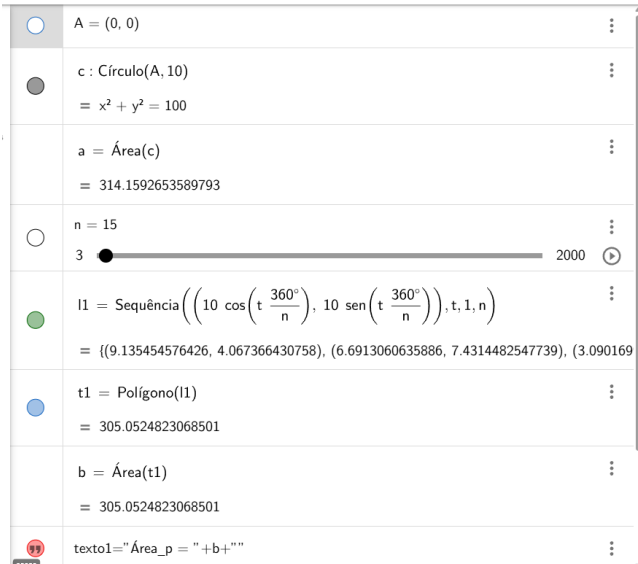


Figura 12: Determinação dos comandos para análise da área do círculo

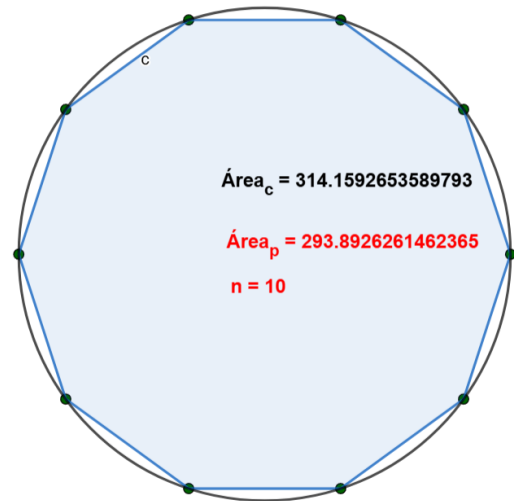


Figura 15: Aproximação para  $n = 10$  (Decágono)

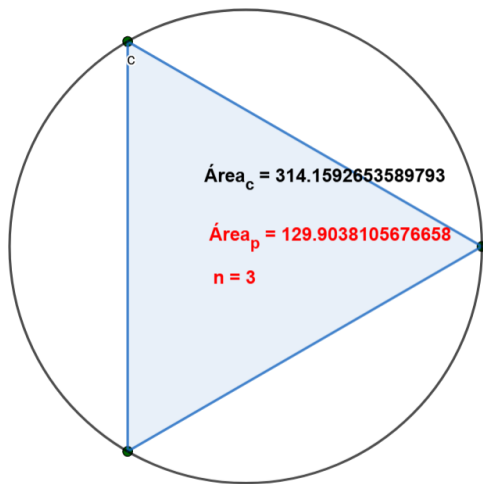


Figura 13: Aproximação para  $n = 3$  (triângulo)

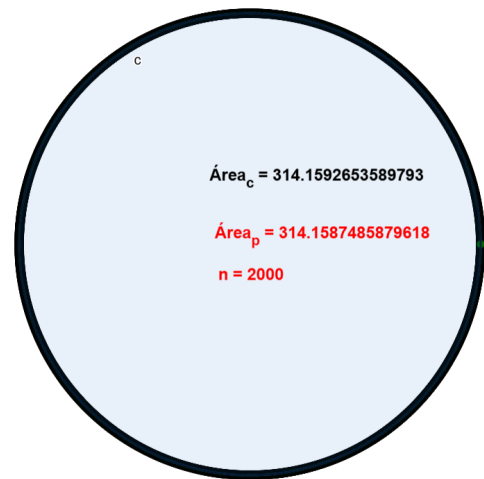


Figura 16: Aproximação para  $n = 2000$

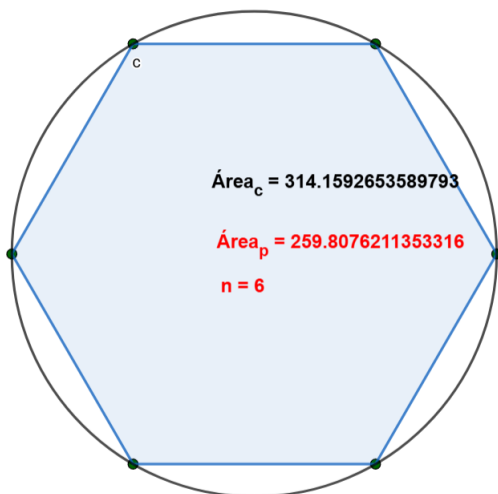


Figura 14: Aproximação para  $n = 6$  (hexágono)

medida que aumenta o número de lados dos polígonos, as respectivas áreas se aproximam da área da região circular na qual estão inscritos. Espera-se, nesse momento, que o

aluno já seja capaz de compreender esse comportamento de aproximação.

Por fim, na Figura 16 tem-se o resultado para  $n = 2000$ . Os pontos se aproximam de tal modo que não é possível visualizar o polígono. Os valores das áreas indicam uma diferença de aproximadamente 0,000516. No infinito essa diferença será nula.

### c. O que esperar destas atividades ?

Após a conclusão destas atividades, espera-se que os estudantes tenham condições de refletir sobre a resolução de problemas similares ligados ao cotidiano, a exemplo de áreas de piscinas, áreas de fachadas de ginásios, áreas de praças, entre outras. Ou seja, espera-se uma expansão da compreensão do mundo que os cerca.

Acredita-se ainda que a abordagem de se trabalhar com o infinito irá tornar a introdução mais rigorosa do tema, quando no ensino superior, mais agradável e, portanto, com maior chance de sucesso, visto que a taxa de reprovação nas disciplinas de cálculo continua sendo um desafio para boa parte dos cursos de exatas. Essa seria uma contribuição relevante deste trabalho.

Cabe destacar que a contextualização histórica feita neste

artigo pode ser livremente abordada pelo professor no momento que julgar mais oportuno, durante a aplicação das atividades. Apenas acredita-se que a inclusão de fatos históricos acrescenta positivamente o momento de ensino, uma vez que o aluno poderá perceber como a construção do conhecimento matemático ocorre ao longo do tempo. Isto é, de maneira não linear e com a contribuição de diversas mentes.

## V. CONCLUSÃO

O software GeoGebra tem se mostrado uma excelente ferramenta de apoio aos professores de Matemática. A possibilidade de realizar manipulações e analisar a evolução de certo processo matemático é ideal para levar o estudante a conjecturar verdades matemáticas consagradas, como no caso trabalhado neste artigo, da aproximação de regiões não convencionais por figuras conhecidas.

Acredita-se que o desenvolvimento deste trabalho tem relevância à medida que apresenta a possibilidade de discussão de fatos históricos que auxiliam na compreensão de como ocorre a construção do conhecimento, em especial do conhecimento matemático em nossa sociedade e, conseqüentemente, de como se dá o próprio processo de compreensão daquilo que nos cerca, isto é, o caráter acumulativo do conhecimento científico.

O trabalho também se mostra relevante por apresentar, de forma leve, um tema reconhecidamente desafiador para estudantes do ensino superior. Com isso, acredita-se que haja uma melhoria nas chances de êxito quando do contato mais formal com o assunto, contribuindo para a diminuição das altas taxas de evasão nos cursos que contemplam, em suas grades curriculares, disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Aos professores, fica a sugestão de explorar o método de exaustão a partir do cálculo de regiões que se aproximam da realidade de seus estudantes, tornando, com isso, a aprendizagem mais próxima da realidade deles.

## REFERÊNCIAS

- [1] G. Ávila, "O ensino do cálculo no segundo grau," *Revista do Professor de Matemática*, vol. 18, pp. 1–9, 1991, acessado em 08 de maio de 2025. [Online]. Available: <https://rpm.org.br/cdrpm/18/1.htm>
- [2] J. S. de Melo Rocha, "O ensino de cálculo no ensino médio," Ph.D. dissertation, Universidade Federal de São João Del-Rei, 2018, acessado em 08 de maio de 2025. [Online]. Available: <https://profmatsbm.org.br/dissertacoes/>
- [3] H. Eves, *Introdução à história da matemática*. Editora da UNICAMP, 2008.
- [4] C. B. Boyer and U. C. Merzbach, *História da matemática*. Editora Blucher, 2019.
- [5] A. Melchior, "História do cálculo diferencial e integral," *Maiêutica. Ensino de Física e Matemática*, vol. 1, no. 1, 2013.
- [6] D. M. FLEMMING and M. B. GONÇALVES, "Cálculo a: Funções, limite, derivação, integração. vol. 1," 2006.
- [7] "o que é o geogebra?". [Online]. Available: <https://www.geogebra.org/>.
- [8] L. M. Marques, M. V. L. Oliveira, and W. G. da Silva, "O ensino de funções quadráticas através de recursos computacionais e modelagem matemática," *Academic Journal on Computing, Engineering and Applied Mathematics (AJCEAM)*, vol. 5, no. 2, pp. 1–14, mar 2024. [Online]. Available: <https://doi.org/10.20873/ufu.2675-3588.2024.v5n2.p1-14>

---

# Exploring the JPEG Algorithm: Impacts of Modifications in the Quantization and Transform Stages

---

Luís F. Krause de Castro<sup>1</sup> and Tanilson D. dos Santos<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Federal University of Tocantins, Computer Science Department, Tocantins, Brazil*

Reception date of the manuscript: 17/11/2025

Acceptance date of the manuscript: 14/02/2026

Publication date: 14/02/2026

---

**Abstract**— The JPEG algorithm is one of the most widely used methods for image compression, achieving substantial file size reduction by removing perceptually less significant information. Among its stages, quantization and frequency-domain transformation play a crucial role in determining the balance between visual quality and compression efficiency. This study explores structural modifications in both stages of the JPEG process: first, by testing alternative quantization matrices with varying levels of aggressiveness, and second, by replacing the standard DCT (Discrete Cosine Transform) with other mathematical transforms, such as Fourier, Laplace, and Wavelet. The results highlight how adjustments in quantization and transform selection can significantly influence the trade-off between efficiency and reconstructed image quality.

**Keywords**— JPEG algorithm, Transform, Image compression, Quantization, Frequency analysis.

---

## I. INTRODUCTION

Image compression plays a fundamental role in modern computing, enabling the efficient storage and transmission of visual information while minimizing perceptual degradation. With the exponential increase in multimedia data volume, driven by high-resolution imaging systems and global content sharing, compression techniques are indispensable for reducing bandwidth and storage requirements in both online and offline environments [1, 2].

Among the various compression techniques, the JPEG (Joint Photographic Experts Group) standard remains one of the most widely adopted lossy compression methods worldwide. Officially standardized as ISO/IEC 10918-1 in 1994 [3], JPEG relies on transforming the image from the spatial to the frequency domain using the DCT (Discrete Cosine Transform) and subsequently quantizing the coefficients based on perceptual properties of the human visual system [4, 5]. The quantization step, which discards high-frequency information less perceptible to human vision, is primarily responsible for the achieved compression ratio while maintaining acceptable visual quality [6, 7].

However, despite its proven efficiency and simplicity, JPEG applies a fixed quantization table and a single transform type (DCT) to all images, regardless of their

specific spatial-frequency content. This limitation raises critical questions: how would the algorithm behave under structural modifications in its core stages? What are the perceptual and statistical impacts of adjusting quantization aggressiveness or replacing the DCT with alternative transforms such as the Fourier, Laplacian, or Wavelet? Prior research has explored some of these directions — evaluating alternative quantization strategies [8] and transform-based variations such as the DWT (Discrete Wavelet Transform) used in JPEG2000 [9]. Yet, there remains a lack of systematic comparative studies quantifying the impact of such modifications on image quality and compression ratio under controlled experimental conditions.

This work aims to fill this gap by investigating how modifications in the quantization and transform stages influence the balance between compression efficiency and reconstructed image quality in the JPEG pipeline. Specifically, three quantization matrices — standard, moderate, and aggressive — were evaluated alongside four different transforms: DCT, DFT (Discrete Fourier Transform), Laplacian, and DWT.

Despite the emergence of advanced compression standards and neural codecs, JPEG remains the most widely adopted image format worldwide due to its simplicity, hardware support, and backward compatibility [2]. Investigating how subtle modifications in its core stages—transform and quantization—impact compression efficiency and perceptual quality remains highly relevant, particularly for embedded or bandwidth-limited applications where modern codecs are computationally prohibitive.



Contact data: Luís F. Krause de Castro, lfelipe.krause@gmail.com

## II. RELATED WORK

Several studies have explored alternative transforms and quantization strategies within the JPEG framework. Watson [10] proposed perceptual weighting of DCT coefficients based on the sensitivity characteristics of the human visual system, leading to visually optimized quantization matrices. More recently, Liu et al. [11] investigated adaptive quantization guided by machine-learning-based saliency models, demonstrating the potential of perceptual adaptivity in traditional compression schemes.

Other works have examined alternative transforms to the DCT. Parmar [12] showed that wavelet-based approaches can achieve higher compression ratios and superior performance at low bitrates, albeit with increased computational cost. The JPEG2000 standard later formalized the use of the Discrete Wavelet Transform, enabling both lossy and lossless compression within the same framework [9]. Despite these advances, the DCT remains predominant in practice due to its simplicity, compatibility, and efficient hardware implementation.

Alternative quantization methods have also been extensively studied. Delp and Mitchell [8] demonstrated that customized quantization matrices can preserve perceptual quality even under higher compression levels. More recent works by Alakuijala et al. [13] and Ma et al. [14] employed perceptual and learning-based models to optimize quantization adaptively, showing that quantization is inherently tied to the characteristics of the human visual system [7, 6]. These studies emphasize that low-frequency components contribute most to perceived quality, supporting the selective coefficient suppression strategy used in JPEG. Recent neural and hybrid models revisit this principle, learning to reproduce similar perceptual trade-offs through data-driven optimization [14].

In summary, although modern codecs and neural compression models continue to evolve rapidly, the classical JPEG algorithm remains an essential baseline for both academic research and practical applications, owing to its transparency, interpretability, and computational efficiency.

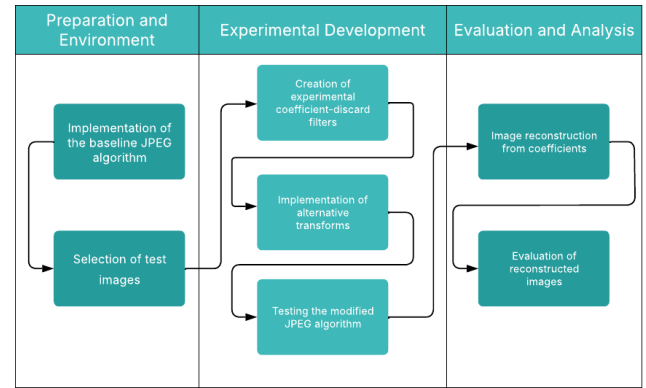
## III. METHODOLOGICAL PROCEDURES

The experiments were designed to isolate the influence of each variable — transform type and quantization aggressiveness — while keeping the remaining stages consistent with the standard JPEG implementation.

The general workflow of the research methodology — from algorithm implementation to experimental evaluation — is summarized in Fig.1, which outlines the main development and analysis stages.

### a. Implementation and Tools

All experiments were implemented in *Python*, leveraging open-source scientific and analytical libraries to ensure transparency and reproducibility. The development environment was designed to emulate the full JPEG compression pipeline while enabling flexible modifications in the quantization and transform stages. The following tools and resources were employed:



**Fig. 1:** Flowchart summarizing the main stages of the research process, including preparation, experimental development, and evaluation.

- **OpenCV (cv2):** for loading, displaying, and performing basic image manipulation, including color space conversion and block segmentation;
- **NumPy (numpy):** for matrix operations and numerical computation, including splitting and merging of  $8 \times 8$  image blocks;
- **SciPy (scipy.fftpack):** for computing the two-dimensional DCT and its inverse (IDCT);
- **NumPy FFT (numpy.fft):** for computing the two-dimensional DFT and its inverse (IDFT);
- **PyWavelets (pywt):** for implementing wavelet-based compression using the Haar basis [15];
- **scikit-image (skimage.metrics):** for computing objective image quality metrics such as PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio) and SSIM (Structural Similarity Index) [16, 7];
- **Collections (Counter, namedtuple) and Heapq:** for implementing Huffman coding, including frequency counting, tree construction, and code generation;
- **Matplotlib (matplotlib.pyplot) and Seaborn:** for visualizing images and generating statistical plots for result interpretation;
- **OS:** for file and directory handling and retrieving file sizes for compression ratio computation;
- **Pandas:** for organizing and tabulating experimental results, including metric aggregation and compression statistics.

The full source code and dataset used in the experiments are publicly available in a dedicated GitHub repository (<https://github.com/LuisFelipeKrause/JPEG-Algorithm-TCC>) to promote reproducibility and further research.

### b. Dataset and Experimental Setup

The experiments were conducted using a balanced dataset composed of 420 color and grayscale images of  $512 \times 512$  pixels, equally drawn from two widely recognized databases:

- **USC-SIPI Image Database** [17]: includes natural, aerial, and synthetic scenes with varied textural complexity and contrast levels;
- **ImageNet Sample Subset** [18]: provides a diverse range of natural and structured images, ensuring generalization across different spatial frequency distributions.

The compression process was then executed under two independent experimental conditions:

1. **Quantization Variation:** three quantization matrices were tested: the standard JPEG table, a *moderate* version (proposed by the author) with slightly increased coefficient suppression, and an *aggressive* version designed to enhance compression at the expense of detail loss.
2. **Transform Variation:** four frequency-domain transforms were compared: the standard DCT, the Discrete Fourier Transform (DFT), the discrete Laplacian operator, and the Discrete Wavelet Transform.

### c. Evaluation Metrics

To ensure a consistent and objective comparison across experiments, three primary quantitative metrics were used:

- **PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio):** measures the fidelity between the original and reconstructed images in decibels (dB). Higher PSNR values indicate smaller mean-squared error and better visual preservation. Typical thresholds classify images above 35 dB as high quality [16].
- **SSIM (Structural Similarity Index):** quantifies structural and luminance similarity between the original and compressed images, yielding values from 0 to 1, where values closer to 1 denote greater perceptual similarity [7].
- **Compression Ratio (CR):** measures storage efficiency, computed as the ratio between the uncompressed and compressed file sizes.

## IV. RESULTS AND DISCUSSION

To analyze the practical behavior of the JPEG algorithm, a series of experiments were designed to test how specific stages of the compression pipeline influence the balance between image quality and compression efficiency. Two complementary sets of experiments were carried out: one focused on modifying the quantization parameters, and another on replacing the mathematical transform used in the frequency-domain representation. Together, these analyses allow a deeper understanding of how each stage contributes to the final compression outcome and how structural adjustments can optimize performance for different image types.

### a. Impact of Quantization Matrices

Three quantization tables were used:

- **Standard:** the quantization table used in the conventional JPEG algorithm;

#### (a) Standard JPEG quantization mask

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

- **Moderate:** a quantization table proposed by the author with slightly higher discarding compared to the standard table;

#### (b) Moderate quantization mask

40	43	45	50	60	70	90	100
43	45	50	60	70	90	100	110
45	50	60	70	90	100	110	128
50	60	70	90	100	110	128	128
60	70	90	100	110	128	128	128
70	90	100	110	128	128	128	128
90	100	110	128	128	128	128	128
100	110	128	128	128	128	128	128

- **Aggressive:** a quantization table proposed by the author with significantly higher discarding.

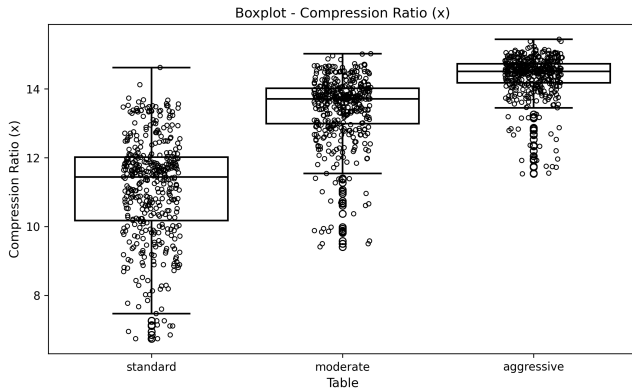
#### (c) Aggressive quantization mask

80	85	90	100	120	140	180	200
85	90	100	120	140	180	200	220
90	100	120	140	180	200	220	255
100	120	140	180	200	220	255	255
120	140	180	200	220	255	255	255
140	180	200	220	255	255	255	255
180	200	220	255	255	255	255	255
200	220	255	255	255	255	255	255

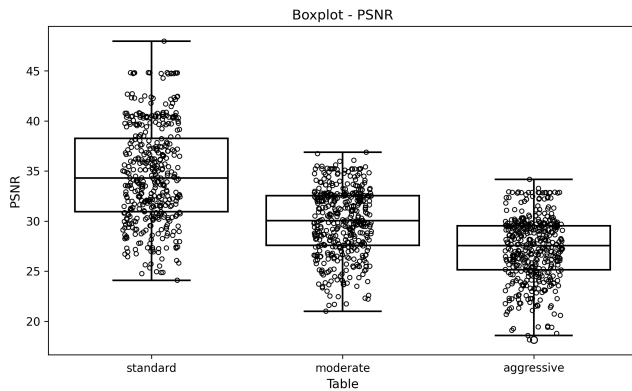
The standard table follows the JPEG specification [2], while the moderate and aggressive versions were designed by the author to incrementally increase coefficient suppression in the high-frequency region.

Fig.2 illustrates the compression ratio distributions for the three quantization settings. As expected, more aggressive quantization yielded higher compression ratios, with the aggressive table achieving an average ratio above 14 : 1, compared to approximately 11 : 1 for the standard configuration. The moderate matrix achieved intermediate results, maintaining lower variance, which indicates more predictable compression behavior across diverse image types.

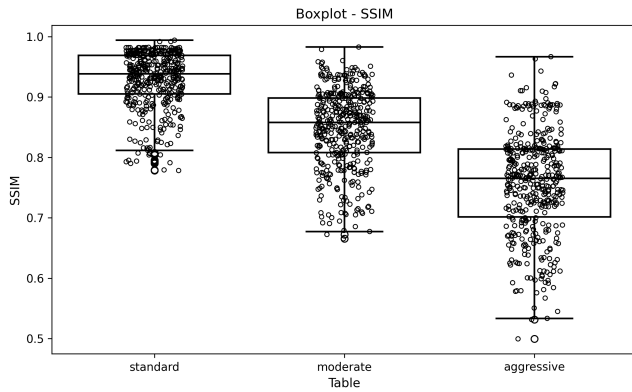
The relationship between compression and quality follows the expected inverse correlation. Fig.3 and Fig.4 show that the standard quantization matrix achieved the best perceptual balance, with median PSNR values around 34 dB and SSIM near 0.93—values typically considered visually lossless for photographic content [16]. The moderate quantization introduced only a small degradation (PSNR  $\approx$  30 dB; SSIM  $\approx$  0.88) while improving compression efficiency by



**Fig. 2:** Distribution of compression ratios for different quantization matrices.



**Fig. 3:** PSNR distribution across quantization matrices.

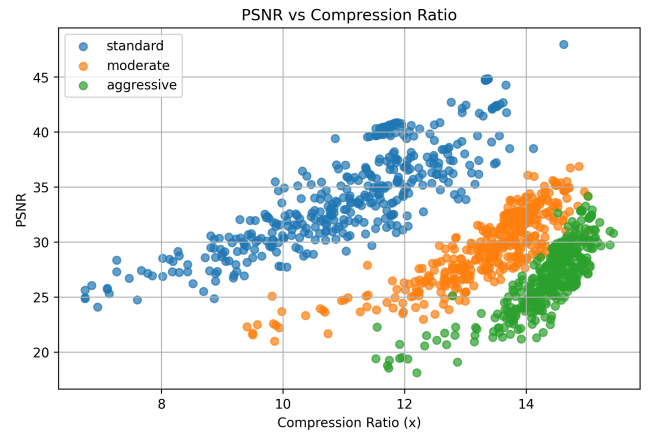


**Fig. 4:** SSIM distribution across quantization matrices.

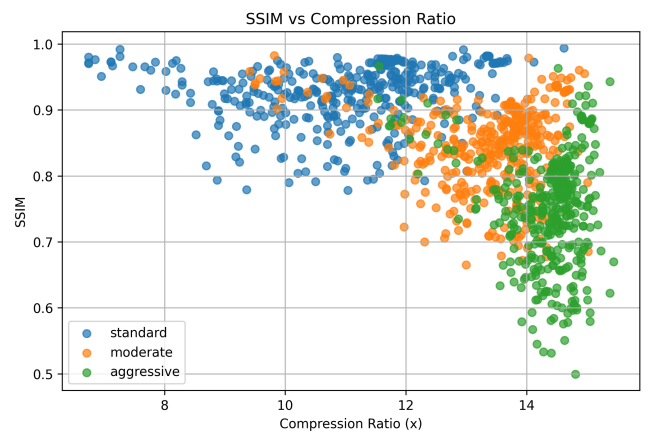
roughly 20%. In contrast, the aggressive matrix resulted in substantial degradation, especially around edges and high-frequency textures, dropping PSNR to  $\approx 27$  dB and SSIM below 0.8.

The scatter plots in Fig.5 and Fig.6 provide a clearer view of the trade-off between visual quality and compression ratio. The results reveal a strong negative correlation between PSNR/SSIM and compression ratio ( $r \approx -0.85$ ), consistent with established compression literature [7]. The standard quantization occupies the upper-left region, corresponding to higher quality at lower compression, while the aggressive setup shifts toward higher compression but at a significant perceptual cost.

From a perceptual perspective, visual inspection confirmed that the moderate quantization preserved overall



**Fig. 5:** Correlation between PSNR and compression ratio for quantization matrices.



**Fig. 6:** Correlation between SSIM and compression ratio for quantization matrices.

image structure and fine details in most scenarios. Edges remained stable, and color transitions exhibited limited blocking artifacts.

To illustrate the perceptual impact of quantization strength, Fig.7, Fig.8b, Fig.8a and Fig.8c shows a comparison between the original image and the reconstructions obtained using moderate, standard, and aggressive quantization tables. While the standard configuration preserves most structural details, the moderate quantization (Fig.8b) achieves a superior balance, effectively preserving overall image structure and fine details in most scenarios. In contrast, the aggressive table leads to noticeable loss of fine detail and pronounced blocking artifacts, particularly in regions with high spatial frequency.

The visual comparison clearly illustrates that increasing quantization aggressiveness reduces the preservation of fine spatial detail. The standard quantization table maintains edges and texture transitions with minimal distortion, whereas the aggressive table produces noticeable blocking artifacts and smoothing of high-frequency regions. This behavior aligns with the fact that quantization discards smaller DCT coefficients first, which correspond to fine detail and texture, causing visually perceptible degradation when the quantization intervals become too coarse.



Fig. 7: Original Image

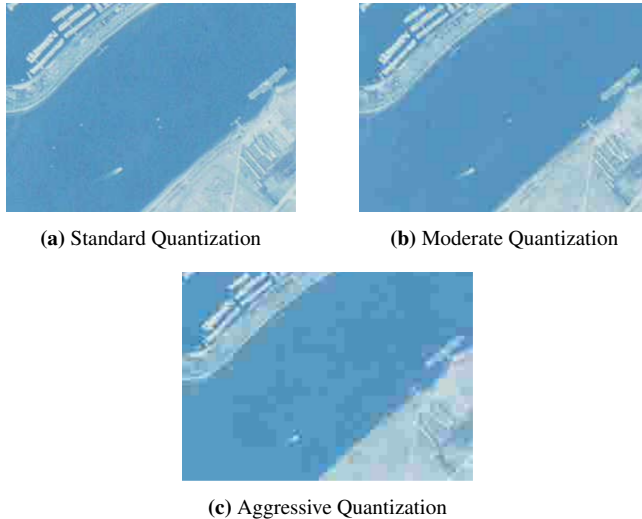


Fig. 8: Comparison of zoomed-in image regions using different quantization levels.

**b. Impact of Transform Substitution**

Four two-dimensional mathematical transforms were implemented and compared, each representing distinct mathematical and perceptual characteristics:

- **2D Discrete Cosine Transform (2D-DCT, Type-II):** employed with orthogonal normalization, identical to the transform used in the original JPEG standard, serving as the baseline for comparison;
- **2D Discrete Fourier Transform (2D-DFT):** computed using the Fast Fourier Transform (FFT) algorithm provided by NumPy, enabling efficient frequency-domain analysis with complex-valued coefficients;
- **Discrete Laplacian Operator (2D Laplace):** applied as a local differential operator on each  $8 \times 8$  block to capture rapid intensity variations, emphasizing edges and spatial discontinuities;
- **2D Discrete Wavelet Transform (2D-DWT):** implemented using the Haar wavelet basis via the PyWavelets library, providing a multiresolution representation through hierarchical decomposition of approximation and detail coefficients [15].

These transforms were selected to represent distinct mathematical domains and properties: frequency-based (DCT and DFT), spatial-differential (Laplacian), and multiscale

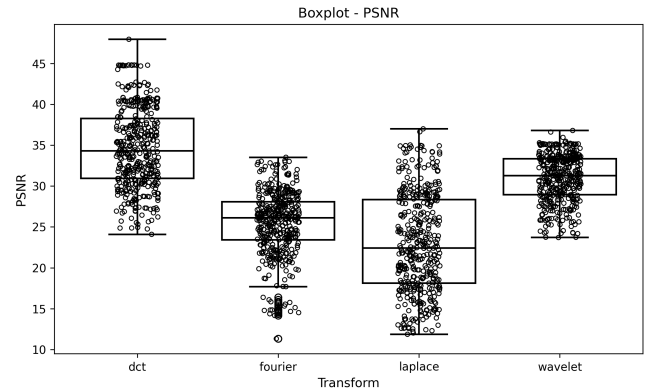


Fig. 9: PSNR distribution for different transform domains.

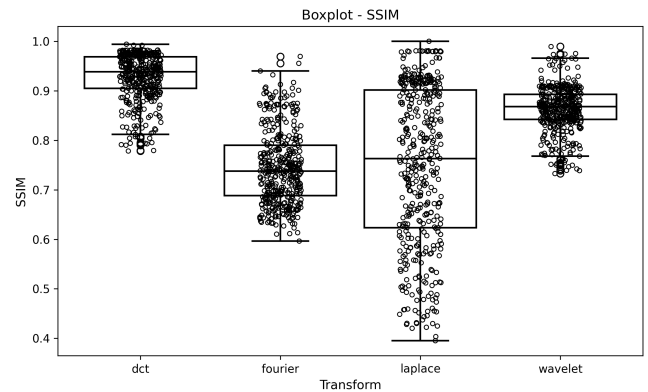


Fig. 10: SSIM distribution for different transform domains.

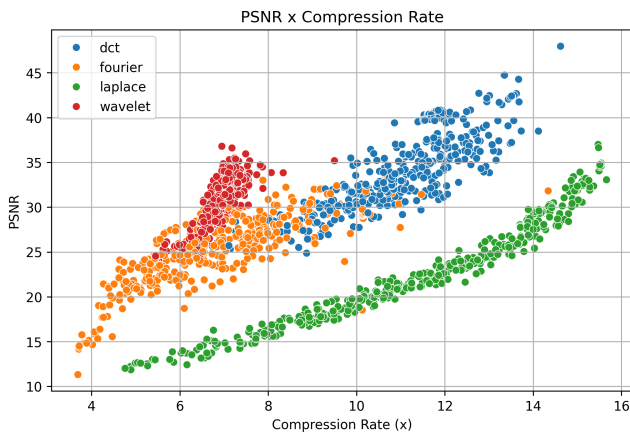
(Wavelet). Their inclusion enables a comparative analysis of how different frequency and spatial representations affect compression efficiency and reconstructed image quality.

To ensure a controlled evaluation, the quantization matrix was kept fixed (standard JPEG table) across all tests, allowing the analysis to focus exclusively on the impact of the transform domain on objective and perceptual quality metrics.

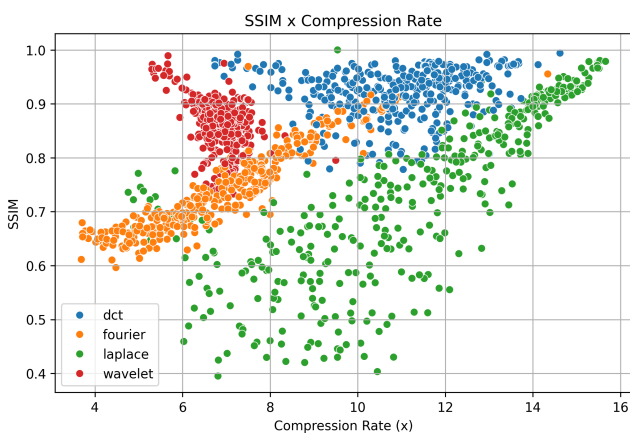
Fig.9 and Fig.10 summarize the statistical distributions of PSNR and SSIM across all images for each transform. The DCT and DWT outperformed the others, with the DWT exhibiting slightly higher perceptual scores and lower variance, suggesting a more stable reconstruction quality across texture types. The DFT suffered from energy dispersion across the frequency spectrum, while the Laplacian operator—being spatially local but not energy-compacting—produced the weakest compression and visible artifacts in smooth regions.

Fig.11 and Fig.12 reinforce these trends by showing the correlation between compression ratio and perceptual quality. The DWT maintained consistent PSNR and SSIM even as compression increased, reflecting its superior multi-resolution energy compaction. The DCT maintained a close second position, confirming its efficiency and computational advantage. Both the Laplacian and DFT, despite their theoretical relevance, demonstrated poor rate-distortion trade-offs, reaffirming that their energy distributions are less compatible with scalar quantization schemes [9].

In summary, the experiments confirm that while the DCT remains the most computationally efficient and robust choice for JPEG compression, wavelet-based transforms such as



**Fig. 11:** Relationship between PSNR and compression ratio across transforms.



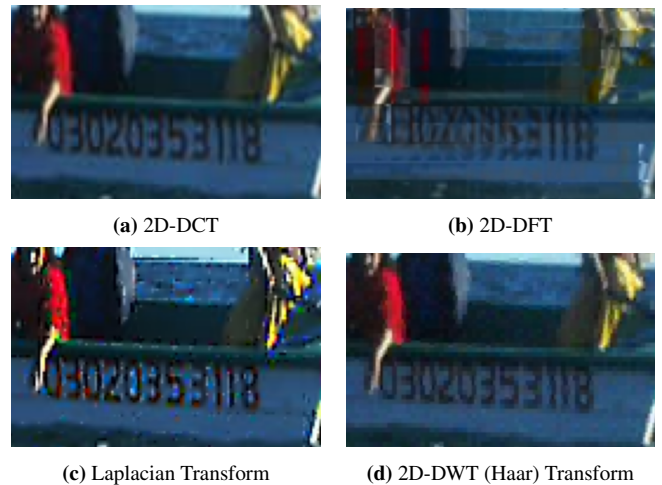
**Fig. 12:** Relationship between SSIM and compression ratio across transforms.



**Fig. 13:** Original Image

DWT can achieve better perceptual results at equivalent bitrates. This aligns with the motivation behind the development of the JPEG2000 standard [9], which replaced block-based DCT with DWT to eliminate blocking artifacts and improve scalability.

Fig. 14a, Fig. 14b, Fig. 14c and Fig. 14d compares the reconstructed images obtained after applying different transform domains in the JPEG compression pipeline, while keeping the same quantization table. The DCT reconstruction closely resembles the original image, confirming its strong energy compaction properties. The DFT reconstruction preserves global structure but introduces ringing artifacts due to spectral spreading. The Laplacian operator emphasizes edges excessively, creating over-sharpened regions with visual noise. The DWT (Haar) reconstruction, in contrast, provides smoother gradients and reduced blocking artifacts, benefiting from multiresolution spatial-frequency localization.



**Fig. 14:** Comparison of zoomed-in image regions obtained using different frequency and spatial domain transforms: DCT, DFT, Laplacian, and DWT (Haar).

The transform comparison highlights how each mathematical basis influences the distribution and reconstruction of image information. The DCT provides compact energy representation and yields reconstructions that closely resemble the original image, justifying its adoption in the JPEG standard. The DFT, by spreading energy globally, introduces ringing artifacts near edges. The Laplacian operator overemphasizes local intensity variations, resulting in over-sharpened and noisy regions. In contrast, the DWT preserves structural continuity and smooth gradients due to its multiresolution nature, reducing blocking artifacts and improving perceptual quality at similar compression rates.

### c. Discussion and Interpretation

The experimental findings reveal consistent patterns across both the quantization and transform analyses, emphasizing that small structural modifications in the JPEG pipeline can lead to measurable variations in compression efficiency and perceptual fidelity. The trade-off between these two dimensions—data reduction and visual preservation—remains at the core of lossy image compression, yet the results obtained here provide a more granular understanding of how each stage contributes to this balance.

From the quantization experiments, the data confirm that perceptual quality degradation follows a nonlinear curve with respect to quantization aggressiveness. The moderate quantization table demonstrated a near-optimal point on this curve, achieving approximately 20–25% better compression than the standard matrix with negligible perceptual loss. This suggests that the standard JPEG quantization matrix, originally hand-tuned in the early 1990s [2], may still be improved through statistically guided parameter adjustment. Similar findings have been reported in perceptual compression studies that adapt quantization weights based on human visual sensitivity models [7], as well as in modern machine learning-based codecs [14].

Regarding the transform stage, the results indicate that the DWT provides the most effective energy compaction among the tested alternatives, producing higher PSNR and SSIM scores. This superiority is linked to the DWT's ability to represent spatially localized frequency components

and maintain sharp edge continuity [15, 9]. Notably, the DCT produces a considerably smoother visual output in textured areas, which may be preferable in specific aesthetic contexts, even though it is slightly less efficient in energy compaction than the DWT. Despite this smoothness and the DCT's computational practicality for hardware, the DWT remains qualitatively superior in preserving complex structural details. By contrast, the Laplacian and DFT-based schemes showed weaker performance due to overemphasis of high-frequency components and lack of spatial localization, respectively [19].

A key observation emerging from both experimental fronts is the strong correlation between perceptual metrics (SSIM) and human visual tolerance to high-frequency suppression. Consequently, moderate quantization and wavelet-based transforms succeed because they selectively preserve low-frequency content while distributing quantization error across perceptually less relevant frequencies.

Methodologically, these results demonstrate that perceptual improvements can be achieved without altering the bitstream structure, ensuring backward compatibility and facilitating the integration of adaptive quantization or hybrid DCT–DWT into existing JPEG encoders. Consequently, these findings reinforce the continuing relevance of the classic transform–quantization framework, even in the era of deep learning-based compression. By systematically quantifying these modifications, this study provides empirical evidence for the development of perceptually optimized JPEG variants tailored for edge devices and low-latency applications

## V. CONCLUDING REMARKS

This work presented a systematic experimental evaluation of the influence of frequency-domain transforms and quantization strategies on the performance of the JPEG compression pipeline. By maintaining the original JPEG encoding structure and independently varying the transform and quantization components, it was possible to isolate their respective contributions to perceptual quality and compression efficiency.

The results demonstrated that the **Discrete Cosine Transform** remains a robust and computationally efficient choice for image compression, offering an optimal balance between energy compaction and simplicity of implementation. However, the **Discrete Wavelet Transform**—particularly when used with the Haar basis—showed superior perceptual performance (higher PSNR and SSIM) at comparable compression rates. This confirms the theoretical advantage of wavelet representations in localizing both spatial and frequency information [15, 9].

In terms of quantization, the results suggest that **moderately aggressive quantization tables** can provide substantial reductions in bit rate (up to 25%) while maintaining high perceptual fidelity. This finding indicates that the standard JPEG quantization matrix, originally designed through empirical tuning [2], can be improved via data-driven optimization or perceptual weighting models [7]. The analysis also reinforces that excessive quantization, although improving compression ratio, quickly deteriorates structural similarity and perceived image quality.

Overall, the experiments highlight the enduring relevance of transform-based compression models and underscore that meaningful improvements to the JPEG standard are still achievable without altering its bitstream structure or entropy coding stage. Such backward-compatible modifications are of great practical importance, particularly for embedded systems, low-bandwidth communications, and real-time applications, where deep learning–based codecs may be computationally prohibitive.

Future work includes exploring perceptually guided quantization based on saliency or attention maps, as well as hybrid transform approaches that combine DCT and DWT domains for improved rate–distortion trade-offs. Machine-learning-based optimization of quantization tables also represents a promising direction for enhancing compression adaptivity.

## REFERENCES

- [1] D. R.-J. G.-J. Rydning, J. Reinsel, and J. Gantz, "The digitization of the world from edge to core," *Framingham: International Data Corporation*, vol. 16, pp. 1–28, 2018.
- [2] G. K. Wallace, "The jpeg still picture compression standard," *Communications of the ACM*, vol. 34, no. 4, pp. 30–44, 1991.
- [3] "Information technology – digital compression and coding of continuous-tone still images – requirements and guidelines," International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, Tech. Rep. ISO/IEC 10918-1:1994, 1994.
- [4] W. B. Pennebaker and J. L. Mitchell, *JPEG: Still image data compression standard*. Springer Science & Business Media, 1992.
- [5] N. Ahmed, T. Natarajan, and K. R. Rao, "Discrete cosine transform," *IEEE transactions on Computers*, vol. 100, no. 1, 2006.
- [6] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, *Processamento Digital de Imagens*, 3rd ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- [7] Z. Wang, A. C. Bovik, H. R. Sheikh, and E. P. Simoncelli, "Image quality assessment: From error visibility to structural similarity," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 13, no. 4, pp. 600–612, 2004.
- [8] E. Delp and O. Mitchell, "Image compression using block truncation coding," *IEEE transactions on Communications*, vol. 27, no. 9, pp. 1335–1342, 1979.
- [9] D. S. Taubman, M. W. Marcellin, and M. Rabbani, "Jpeg2000: Image compression fundamentals, standards and practice," *Journal of Electronic Imaging*, vol. 11, no. 2, pp. 286–287, 2002.
- [10] A. B. Watson, "Dct quantization matrices visually optimized for individual images," in *Human vision, visual processing, and digital display IV*, vol. 1913. SPIE, 1993, pp. 202–216.
- [11] J. Chiu, "Modeling image quantization tradeoffs for optimal compression," *arXiv preprint arXiv:2112.07207*, 2021.
- [12] H. M. Parmar, "Comparison of dct and wavelet based image compression techniques," *International journal of engineering development and research*, vol. 2, no. 1, pp. 664–669, 2014.
- [13] J. Alakuijala, R. Obryk, O. Stoliarchuk, Z. Szabadka, L. Vandevonne, and J. Wassenberg, "Guetzli: Perceptually guided jpeg encoder," *arXiv preprint arXiv:1703.04421*, 2017.
- [14] S. Ma, X. Zhang, C. Jia, Z. Zhao, S. Wang, and S. Wang, "Image and video compression with neural networks: A review," *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, vol. 30, no. 6, pp. 1683–1698, 2019.
- [15] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992.
- [16] A. Hore and D. Ziou, "Image quality metrics: Psnr vs. ssim," *2010 20th International Conference on Pattern Recognition*, pp. 2366–2369, 2010.

- [17] USC Signal and Image Processing Institute - Department of Electrical and Computer Engineering, "The usc-sipi image database," 2025, available at: <https://sipi.usc.edu/database/database.php>. Accessed on: September 5, 2025.
- [18] Schwartz, Pullen, "Imagenet sample images," 2025, available at: <https://github.com/EliSchwartz/imagenet-sample-images>. Accessed on: September 5, 2025.
- [19] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals & systems*. Pearson Educación, 1997.

---

# Study on the Implementation of a PID Controller in a Sanitation System

## *Estudo da Implantação de um Controlador PID em um Sistema de Saneamento*

---

Gabriel Gonçalves Pereira<sup>1</sup>, Stefani Caroline Leal de Freitas<sup>1</sup>, Lucas de Freitas Romão<sup>2</sup> e Adélcio Maximiano Sobrinho<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal do Tocantins, Palmas, Tocantins, Brasil

<sup>2</sup> Corsan, Bento Gonçalves, Rio Grande do Sul, Brasil

Data de recebimento do manuscrito: 10/11/2025

Data de aceitação do manuscrito: 19/03/2026

Data de publicação: 25/03/2026

---

**Resumo**— Diversas tecnologias têm sido desenvolvidas, implementadas e aprimoradas para melhorar a eficiência operacional e otimizar processos em diferentes setores da economia. Uma das áreas impactadas por esse avanço é a do saneamento, que conta com equipamentos que variam desde os mais robustos, como motores, bombas e geradores, até dispositivos mais sensíveis, como dosadoras de produtos químicos e sensores para o gerenciamento de processos. Nesse contexto, este trabalho tem como objetivo principal apresentar a aplicação da tecnologia de controle e monitoramento PID (Proporcional Integral Derivativo), analisando, sob uma perspectiva técnico-econômica, os efeitos da implantação de um controlador PID em uma unidade operacional de saneamento localizada em uma região com características semelhantes às das regiões Centro-Oeste e Norte. Sob o ponto de vista técnico são consideradas características como a vazão da rede de tratamento, a manutenção dos equipamentos e os ajustes necessários para seu pleno funcionamento. Sob o ponto de vista econômico são feitos estudos comparativos da redução de custos em energia consumida (kWh) na operação, antes e após a implantação do sistema controlador. Por meio destas análises serão destacados e discutidos os impactos da implantação do sistema PID, bem como potenciais pontos de melhoria para eficiência da operação.

**Palavras-chave**—Eficiência operacional, Saneamento básico, Controlador PID, Perspectiva técnico-econômica, Manutenção, Otimização de processos

**Abstract**— Several technologies have been developed, implemented, and improved to enhance operational efficiency and optimize processes in different sectors of the economy. One of the areas impacted by this advancement is sanitation, which employs equipment ranging from robust devices such as motors, pumps, and generators to more sensitive instruments such as chemical dosing systems and sensors used for process management. In this context, the main objective of this study is to present the application of PID (Proportional-Integral-Derivative) control and monitoring technology, analyzing, from a technical and economic perspective, the effects of implementing a PID controller in an operational sanitation unit located in a region with characteristics similar to those of Brazil's Midwest and Northern regions. From a technical standpoint, parameters such as flow rate in the treatment network, equipment maintenance, and the adjustments required for proper operation are considered. From an economic standpoint, comparative studies were conducted to evaluate the reduction in operational energy consumption (kWh) before and after the implementation of the control system. Through these analyses, the impacts of the PID system implementation are highlighted and discussed, along with potential improvement points aimed at increasing operational efficiency.

**Keywords**— Operational Efficiency, Basic Sanitation, PID Controller, Technical-Economic Perspective, Maintenance, Process Optimization

---

## I. INTRODUÇÃO

Atualmente, o Brasil ainda se encontra distante das metas do novo marco legal do saneamento (Lei nº

14.026/2020), que prevê 99% de água tratada e 90% de coleta e tratamento de esgoto até 2033. A lei reforça a universalização por meio de barreiras de acesso a recursos federais, incentivo à privatização e licitação de concessões, além de maior autonomia financeira via tarifas [1, 2]. Nesse contexto, o setor enfrenta desafios crescentes de eficiência operacional e energética.

Historicamente, o Estado arcou com cerca de 85% dos

Dados de contato: Gabriel Pereira, goncalves.gabriel1@uft.edu.br

custos do saneamento entre 1950 e 1970, mas os incentivos tarifários diminuíram ao longo do tempo [3]. Hoje, o setor depende cada vez mais de sistemas de bombeamento (em vez de gravidade), elevando o consumo de energia elétrica e a necessidade de maior eficiência energética [4, 5].

Diante disso, com o avanço da globalização, a adoção dos conceitos da Indústria 4.0 tem sido cada vez mais introduzida no ambiente industrial, incluindo o setor de saneamento básico. Essa revolução tecnológica visa aprimorar os processos industriais por meio de ferramentas como inteligência artificial, Internet das Coisas (IoT), automação de processos e monitoramento contínuo. Tais tecnologias contribuem para a otimização dos processos de coleta, tratamento e destino final do esgoto, além de promoverem maior eficiência e qualidade no serviço prestado à população. A integração desses sistemas automatizados possibilita que as equipes responsáveis pelo planejamento operacional e pela manutenção se concentrem em atividades estratégicas, priorizando manutenções preventivas e, conseqüentemente, reduzindo o índice de falhas, os custos com novos equipamentos e as horas-homem despendidas em atividades emergenciais [6].

Com a Indústria 4.0, tecnologias como IoT, automação e monitoramento contínuo têm otimizado processos de coleta, tratamento e destino de esgoto, permitindo maior foco em manutenções preventivas e redução de falhas e custos [6]. Nesse contexto, o controlador PID surge como solução promissora para estabilidade e eficiência energética no saneamento básico [7].

Baseado nisso, o presente trabalho tem como objetivo geral apresentar a aplicação da tecnologia de controle e monitoramento PID. Como objetivo específico, este trabalho visa analisar sob uma perspectiva técnico-econômica, os efeitos da implantação de um controlador PID em uma unidade operacional de saneamento de esgoto, especificamente em uma Estação Elevatória de Esgoto (EEE), em um local com características de clima e topografia semelhantes aos das regiões centro-oeste e norte, como os estados do Mato Grosso e Tocantins.

No decorrer da pesquisa, foi adotada uma metodologia composta por quatro etapas interligadas. Inicialmente, é realizada uma descrição detalhada do sistema de saneamento estudado, considerando aspectos como o tamanho da infraestrutura, os equipamentos empregados (por exemplo, bombas, elementos de sucção e do recalque, sistemas de tratamento e armazenamento) e as variáveis monitoradas, dentre as quais se destacam vazão, nível de líquidos e consumo energético da unidade. Em seguida, foi feita uma revisão bibliográfica dos controladores PID, para que dessa forma seja possível apresentar as especificações técnicas do controlador PID escolhido, no qual possibilita uma resposta adequada às variações operacionais do sistema, garantindo, assim, a estabilidade e eficiência no controle.

Por fim, é estabelecido um conjunto de critérios de avaliação técnico-econômica, os quais considerarão o desempenho operacional, a redução do consumo energético e a diminuição dos desperdícios, além da análise da economia em kWh decorrente da adoção do controlador PID.

Para a condução desta metodologia, são empregadas

ferramentas de monitoramento digital, estudo de dados oriundos de informações como a vazão do tratamento de esgoto, proporcionando uma abordagem robusta e integrada para otimizar o sistema de saneamento e justificar a escolha do controlador PID como alternativa viável e eficaz.

Dessa maneira, este trabalho está estruturado em seis capítulos, que relacionam os objetivos definidos inicialmente com os resultados alcançados. A Seção I – Introdução apresenta o tema abordado neste estudo, além de estabelecer os objetivos e os resultados esperados. Também são expostas as principais características da pesquisa, permitindo uma compreensão clara do escopo proposto.

Na Seção II – Controladores PID, é apresentado o funcionamento dos controladores PID, suas aplicações em sistemas industriais e no setor de saneamento, bem como os benefícios e limitações dessa tecnologia.

Em seguida, a Seção III – Metodologia detalha as características técnicas do sistema analisado e os critérios adotados para a avaliação do objeto de estudo deste trabalho.

Com a base teórica estruturada, a Seção IV – Análise Técnico-Econômica tem como objetivo expor a avaliação do desempenho do sistema antes e depois da implementação do controlador PID. No aspecto técnico são analisados indicadores como consumo energético, estabilidade do sistema, tempo de resposta e necessidades de manutenção. No aspecto econômico, são discutidos os custos de implantação, a economia gerada, o impacto na vida útil dos equipamentos e nos custos com manutenção.

Diante dessas análises, a Seção V – Resultados e Discussões apresenta os benefícios diretos e indiretos observados após a implementação do controlador PID, além das limitações encontradas ao longo do estudo.

Por fim, na Seção VI – Conclusão, são sintetizadas as principais informações sobre a viabilidade técnica e econômica da implantação do controlador PID. Além disso, são elaboradas recomendações para empresas do setor de saneamento e sugestões para pesquisas futuras.

## II. CONTROLADORES PID

O controlador PID gera um sinal de controle linear a partir do desvio entre o valor definido no sensor (*set-point*) e a variável de processo, reunindo três modos de ação: proporcional, integral e derivativo. Sua forma matemática ideal é dada por

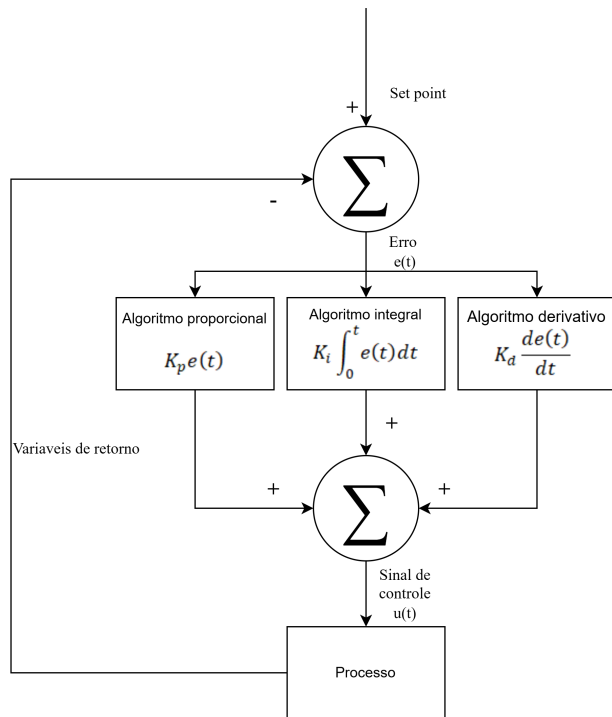
$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (1)$$

$$\hat{P}_I(w_i \vee h_i^k) = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j \hat{P}(w_i \vee h_i^j)$$

Na Eq. (1),  $e(t)$  é o erro, ou seja, *set-point* menos variável do processo,  $K_p$  é o ganho proporcional,  $T_i$  é o tempo de integração (com  $K_i = \frac{K_p}{T_i}$ ), e  $T_d$  é o tempo derivativo (com  $K_d = K_p \times T_d$ ).

O diagrama de blocos correspondente a essa lógica de controle ilustrado na Figura 1.

O algoritmo proporcional está diretamente relacionado às mudanças instantâneas do erro – quanto maior  $K_p$ , é maior a

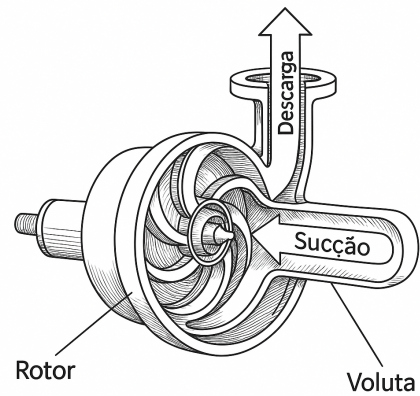


**Figura 1:** Diagrama de bloco do processo de controle usando PID [8].

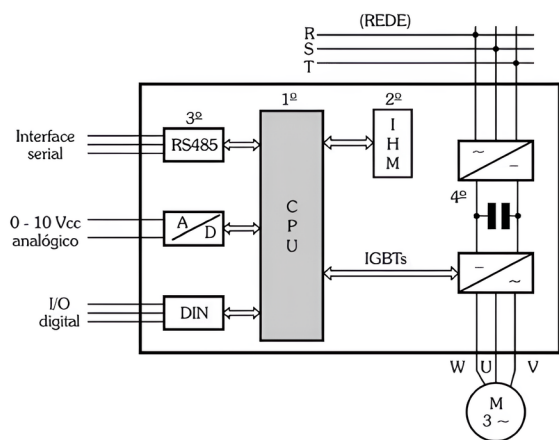
resposta, mas um ganho excessivo pode desestabilizar o sistema. O algoritmo integral corrige desvios persistentes ao acumular o erro ao longo do tempo, reduzindo o *offset* em regime permanente. Já o algoritmo derivativo antecipa variações rápidas da variável de processo, melhorando o tempo de resposta e a estabilidade do sistema [8]. Por sua simplicidade estrutural e eficácia, controladores PID são amplamente usados em manufatura, automação industrial, controle de prensas hidráulicas, linhas de montagem, robótica industrial (onde regulam velocidades e torques) e no acionamento de inversores de frequência para controle de velocidade de motores [7, 8]. Dessa forma, em EEE o PID envolve a orquestração de três elementos principais – o conjunto motobomba, os inversores de frequência (*drives*) e o Controlador Lógico Programável (CLP) com seus sensores – todos sob uma lógica de malha fechada que visa manter o sistema estável, eficiente e robusto a perturbações [9].

O conjunto motobomba (motor + bomba centrífuga radial) eleva o esgoto superando a altura manométrica e perdas de carga. A curva  $H \times Q$  própria de cada bomba exige análise hidráulica para seleção adequada [4, 9].

Cada modelo de bomba possui uma curva característica  $H \times Q$  própria, de modo que é imprescindível analisar a instalação hidráulica local para escolher a bomba ideal [4]. As bombas classificam-se em volumétricas (deslocamento positivo) e turbobombas (bombas de fluxo). O foco aqui são as turbobombas, que têm rotor com pás impulsionadas por eixo motriz – destacam-se as turbobombas centrífugas radiais, com fluxo perpendicular ao eixo de rotação, como demonstrado na Figura 2, que são o tipo predominante no saneamento, sendo comercializados por marcas como KSB e IMBIL [8].



**Figura 2:** Bomba Radial [9].



**Figura 3:** Blocos componentes do inversor de frequência [11].

Para acionar o conjunto motobomba, emprega-se o inversor de frequência (*drive*), que permite variar frequência, torque e velocidade de acordo com a necessidade, aumentando a vida útil do equipamento, reduzindo perdas de pressão e oferecendo proteção elétrica quando bem dimensionado [10]. Estruturalmente, o inversor compõe-se de unidade central de processamento (CPU), que armazena parâmetros e comanda os pulsos de disparo aos Transistores Bipolares de Porta Isolada (IGBT's) do módulo de saída, responsáveis por inverter a tensão do barramento CC em CA. A Interface Homem-Máquina (IHM) exibe tensões, correntes e frequências e permite configurações locais ou remotas [11]. Além disso, o *drive* aceita comando via sinal analógico (tensão VCC) para ajuste de velocidade e sentido de rotação, ou via entradas digitais parametrizadas em *software* de cada fabricante (por exemplo, WEG CFW ou ABB) [11].

Na etapa de potência, o inversor retifica o sinal CA da rede em CC, filtra-o no “barramento CC” e, por modulação PWM - *Pulse Width Modulation* ou Modulação por Largura de Pulso -, reconverte em CA quase senoidal, resultando numa fonte CA de frequência variável, conforme Figura 3 [11].

O controle digital desse acionamento é feito por CLP, elemento-chave na automação PID. O CLP recebe sinais de sensores, botoeiras e chaves fim-de-curso em suas entradas, processa a lógica de controle na CPU e aciona atuadores -

equipamentos como motores elétricos - pelas saídas, reiniciando continuamente esse ciclo de varredura [12]. A comunicação do CLP com o sistema de Supervisão e Aquisição de Dados (SCADA) permite ao operador, no Centro de Controle Operacional (CCO), monitorar níveis, vazões, estados das bombas e emitir comandos remotos – processo também chamado de telemetria [9].

A rede de automação transporta estes dados por linhas telefônicas, rádio, cabos elétricos ou fibra óptica, empregando protocolos como Modbus ou Ethernet/IP. A topologia da rede pode ser barramento (todos em paralelo), anel (em série circular) ou estrela (nós com *links* dedicados), definindo a confiabilidade e robustez do sistema [9].

Embora o PID seja versátil e de fácil implementação, ele apresenta limitações: a ação derivativa pode amplificar ruídos de medição tornando o controle instável – especialmente em sistemas com inversores de frequência, cuja comutação gera harmônicos que afetam sensores ultrassônicos e podem corromper os sinais recebidos pelo CLP [8, 9].

#### **a. Trabalhos relacionados e lacuna da pesquisa**

Observa-se que a maioria dos estudos brasileiros e internacionais utiliza dados de estações reais ou simulações, porém poucos avaliam o impacto do PID em regiões com alta sazonalidade pluviométrica (Centro-Oeste/Norte), onde a infiltração pluvial altera drasticamente a vazão e o ponto de operação das bombas. O presente trabalho preenche essa lacuna ao analisar, com dados adaptados de unidade real, o efeito do PID em condições climáticas semelhantes às de Tocantins e Mato Grosso. A Tabela 1 apresenta uma comparação selecionada de trabalhos relevantes, destacando o tipo de controle, economia energética reportada, contexto de aplicação e principais limitações.

### **III. METODOLOGIA**

O Sistema de Esgoto Sanitário (SES) brasileiro adota, majoritariamente, o modelo separador absoluto, no qual águas residuais de residências e indústrias são conduzidas juntamente com as águas de infiltração nas tubulações, enquanto as águas pluviais são captadas por um sistema de drenagem independente, evitando comprometimento do tratamento de esgoto e danos às estruturas da rede de coleta [13, 14]. Esse SES é composto por diversas unidades interrelacionadas, que são a: rede coletora, interceptor, emissário, sifão invertido, corpo de água receptor, estação elevatória e estação de tratamento, cada qual dimensionada conforme as características locais, podendo variar mesmo dentro de uma mesma cidade [13].

A Estação Elevatória de Esgoto (EEE) eleva o esgoto do poço de sucção ao recalque, conforme ABNT NBR 12208:2020 [15]. Integra estruturas elétrica (painéis, sensores, motobombas), hidráulica (poço, tubulações, válvulas) e civil (gradeamento, caixa de areia, triturador) [13, 16].

A EEE analisada é uma estação hipotética, com características semelhantes às de uma estação classificada como de porte médio (capacidade entre 50 e 500 L/s), com poço de sucção a seco, localizada em uma região com clima

e topografia semelhantes às das regiões Centro-Oeste e Norte, como os estados de Mato Grosso e Tocantins. Seus principais equipamentos elétricos estão listados na Tabela 2.

As variáveis de interesse, acompanhadas por telemetria, correspondem ao status das bombas e do gerador, além do nível do poço, possibilitando ao CLP a execução do controle PID com base nos sinais dos *drives* e do sensor de nível. Esses equipamentos enquadram-se mais adequadamente como dispositivos responsáveis pela automação, conforme a Tabela 3.

Para fins de controle, é necessário compreender que o nível do poço de sucção deve se manter dentro de limites mínimo e máximo durante a operação dos equipamentos sob atuação do controlador PID. O nível mínimo é estipulado com base na maior altura manométrica em que a bomba pode operar sem a entrada de ar; por isso, é fundamental conhecer a altura da tubulação de sucção. Já o nível máximo é definido pela altura máxima de esgoto que o poço de sucção suporta, sem que ocorra extravasamento.

Outro fator importante para que o controlador PID opere em sua plena capacidade no sistema em que for integrado é a adequação da infraestrutura de rede para sua implantação. Dessa forma, a rede de comunicação de dados e seus respectivos equipamentos, como telas, modems ou rádios, devem estar devidamente instalados no sistema. Por esse motivo, os custos relacionados a essa infraestrutura não serão considerados

O processo de implementação do controlador no sistema inicia-se pela verificação das condições elétricas e mecânicas da EEE, garantindo que o painel do inversor suporte a carga do conjunto motobomba e que a instalação elétrica atenda aos requisitos de potência.

O controlador PID assume a função de regular a rotação do motor ao ajustar a frequência fornecida pelo inversor conforme as variações do nível no poço de sucção, informado pelo sensor, mantendo o esgoto entre limites máximos e mínimos estabelecidos (Valor de referência ou *set-point*). Por se tratar de um sistema em malha fechada, no qual a variável controlada (nível de esgoto no poço de sucção) retorna à entrada do controlador, que altera a variável manipulada (frequência do inversor) para manter a rotação da bomba dentro dos parâmetros definidos [9].

Sendo assim, com base em dados de unidades operacionais reais semelhantes à hipotética analisada – nas quais houve a implantação do controlador PID – é possível avaliar seu impacto sem a necessidade de simulação computacional.

Para avaliar o desempenho técnico-econômico da EEE antes e depois da implantação do PID, adota-se a seguinte metodologia: de um ponto de vista técnico, consideram-se consumo energético, vazão da EEE ou volume tratado, redução das variações no sistema e estabilidade em operação, tempo de resposta do sistema e influência das condições climáticas (chuvas); na vertente econômica, serão analisados o custo teórico de implantação (hipotético), impacto no horas-homem de manutenção, economia gerada em kWh do sistema de automação responsável pelo PID e eficiência energética (kWh/m<sup>3</sup>) em um intervalo amostral de 12 meses antes e depois. Dessa forma, será possível observar o impacto das variações climáticas na operação da EEE antes e após a adoção do controle PID.

Os dados utilizados foram obtidos de uma unidade

**TABELA 1:** COMPARAÇÃO DE ESTUDOS RECENTES SOBRE CONTROLE PID/VFD EM SISTEMAS DE BOMBEAMENTO DE SANEAMENTO E ABASTECIMENTO.

Autor / Ano	Tipo de Controle	Economia Energética Reportada	Contexto / Região	Principais Limitações / Observações
Soriano (2023) [3]	PID + otimização em reservatórios	Até 15–20% em reservatórios	Abastecimento Urbano Brasil (Campinas, SP)	Foco em reservatórios; não aborda estações elevatórias de esgoto com alta variação de vazão
Nascimento et al. (2024) [4]	Gestão energética geral (inclui VFD)	Redução média de 10–25%	Empresas brasileiras de saneamento	Análise ampla; não detalha controle PID específico nem impacto em infiltração pluvial
Alexandre (2024) [10]	VFD em diferentes configurações	15–40% dependendo da configuração	Estações elevatórias de água – Brasil (Londrina, PR)	Aplicado a água potável; não considera esgoto corrosivo nem sazonalidade pluviométrica elevada
Almeida et al. (2024) [6]	IoT + automação inteligente	Otimização operacional (não quantificada em %)	Elevatórias de esgoto – Senhor do Bonfim, BA	Ênfase em monitoramento IoT; não foca em controle PID clássico nem em análise kWh/m <sup>3</sup> detalhada
Chen (2024) [7]	PID clássico e avançado (revisão)	5–30% em aplicações industriais	Diversos setores	Revisão geral; poucas aplicações específicas ao saneamento em regiões tropicais úmidas

**TABELA 2:** PRINCIPAIS EQUIPAMENTOS ELÉTRICOS DA EEE.

Equipamentos	Descrição Técnica
Conjunto Motobomba	3 conjuntos
Motor Elétrico Assíncrono	Potência: 100 CV Frequência: 60 Hz Tensão: 220/380/440 V Tensão de operação: 380V Corrente nominal: 246/142/123 A Polos: 4 Categoria: N Rotação: 3600 rpm
Bomba	Vazão: 300 m <sup>3</sup> /h a 100 m <sup>3</sup> /h Rotação: 650rpm a 1250 rpm Altura: 7,2 m a 30 m Tipo: Autoescorvante radial
Inversor de frequência	Quantidade: 3 Tensão de alimentação: 380 V Potência: 100 CV Corrente nominal: 142 A Quantidade de entrada digitais: 6 Protocolos de comunicação: Modbus ou EtherNet/IP
CLP	Quantidade: 1 Tensão nominal de alimentação: 24Vcc Frequência de rede: 50/60Hz Número de entradas digital: 14 Número de módulos de expansão: 7
Sensor de Nível	Quantidade: 1 Tipo: Sonda Faixa de 0 a 10 m.c.a

operacional real de empresa privada, com autorização formal para uso acadêmico. Para preservar a confidencialidade contratual, todos os valores absolutos (consumo de energia, volume tratado, ordens de serviço e tempo de manutenção) sofreram modificações proporcionais lineares idênticas em todos os períodos pré e pós-instalação (mesmo fator multiplicativo aplicado a cada série temporal).

**TABELA 3:** EQUIPAMENTOS DESTINADOS A AUTOMAÇÃO DA EEE.

Equipamentos	Principais itens
Painel de automação	CLP, comunicação GPRS, relés de comando de status, e cartão analógico de expansão
Equipamentos de medição	Sonda de nível hidrostático 0 a 10mca e sinal analógico 4 a 20mA, indicador de processo
Cabeamento	Cabos de comunicação modbus, isolador óptico e protetor DPS

Essa transformação preserva integralmente as proporções, tendências, percentuais de variação e relações entre variáveis, não alterando as conclusões técnicas ou econômicas do estudo.

#### IV. ANÁLISE TÉCNICO-ECONÔMICA

A análise foca no impacto do PID no consumo energético e manutenção da EEE, atenuando gastos com energia e permitindo monitoramento preciso. Fatores externos como tarifa de esgoto não são considerados.

Foram analisados os dados adaptados de uma estação real, respeitando os máximos e mínimos, referentes ao período de pré-instalação – Mês 1 a Mês 12 – e ao período de pós-instalação – Mês 1 a Mês 12 –, ambos referentes a épocas com as mesmas características climáticas, para assim obter uma comparação do impacto da implantação, após os devidos ajustes de calibração do sistema, em períodos climáticos equivalentes. Essa análise será realizada em uma unidade hipotética com características semelhantes às de uma unidade real, possibilitando a observação do efeito do PID sob diferentes condições operacionais.

##### a. Análise de Eficiência

Com todos os parâmetros estabelecidos, para avaliar a viabilidade do investimento é necessário começar pela

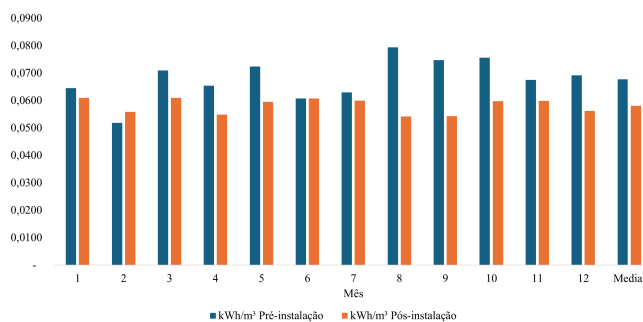


Figura 4: Eficiência (kWh/m<sup>3</sup>).

análise do consumo de energia (kWh) que uma EEE apresenta ao longo dos meses, juntamente com o volume de esgoto bombeado (m<sup>3</sup>). Em perspectiva mensal, é possível observar o consumo energético e o volume de esgoto no período amostrado nas Tabela 4 e Tabela 5.

TABELA 4: CONSUMO TOTAL POR MÊS (KWH).

Mês	Pré-instalação	Pós-instalação
1	45.362,23	48.961,05
2	44.138,59	46.400,47
3	60.239,55	50.590,79
4	60.459,97	50.353,36
5	65.089,82	54.072,48
6	52.433,18	53.390,51
7	47.635,44	50.183,69
8	55.103,97	43.947,60
9	57.029,04	45.933,25
10	57.088,78	49.070,06
11	55.412,97	52.066,39
12	<b>55.547,90</b>	47.412,03

TABELA 5: VOLUME DE ESGOTO TOTAL POR MÊS (M<sup>3</sup>).

Mês	Pré-instalação	Pós-instalação
1	703.546	802.752
2	850.799	830.199
3	849.543	830.319
4	925.158	918.679
5	898.735	908.139
6	862.819	879.095
7	757.087	836.502
8	694.381	810.195
9	763.400	845.918
10	754.857	821.591
11	821.454	869.863
12	<b>803.262</b>	843.154

A eficiência energética (kWh/m<sup>3</sup>) foi calculada relacionando consumo e volume bombeado (Fig. 4). A média caiu de 0,0677 kWh/m<sup>3</sup> (pré) para 0,0581 kWh/m<sup>3</sup> (pós), redução de 14,17%. Apesar de variações sazonais, o pós-instalação mostra maior estabilidade.

Ao realizar a análise da eficiência energética, é possível observar que o consumo médio da EEE, em kWh/m<sup>3</sup>, no período pré-instalação é, em sua maioria, mais alto do que no período pós-instalação. Além disso, ao se calcular a média do período pré-instalação, considerando-a como valor base, e do período pós-instalação, obtêm-se, respectivamente, os valores de 0,0677 kWh/m<sup>3</sup> e 0,0581

TABELA 6: VOLUME DE CHUVAS (MM).

Mês	Pré-instalação	Pós-instalação
1	293,60	117,80
2	134,20	358,80
3	38,80	322,20
4	360,80	271,20
5	123,80	225,40
6	41,20	19,00
7	-	-
8	-	-
9	23,80	-
10	24,00	1,00
11	64,40	216,40
12	78,60	155,20

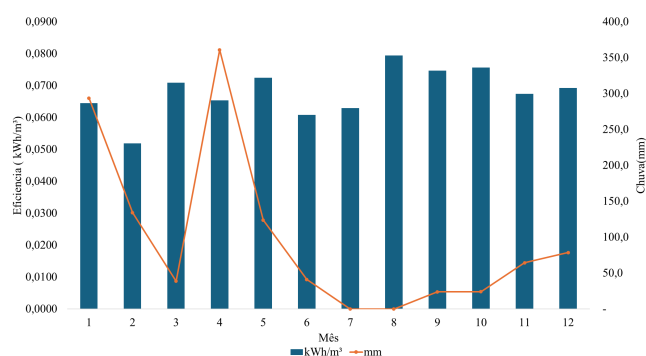


Figura 5: Eficiência (kWh/m<sup>3</sup>) x Chuva (mm) pré-instalação.

kWh/m<sup>3</sup>, o que indica uma redução de 14,17% entre os dois períodos.

Contudo, apesar dessa redução, é perceptível que ambos os períodos apresentam variações sazonais, com picos e vales que podem estar relacionados a fatores externos. Além disso, em alguns meses, a diferença entre os períodos pré-instalação e pós-instalação é mínima ou inexistente.

Dessa forma, apesar da importância da relação apresentada na Figura 4 para quantificar o desempenho da EEE, outros fatores externos podem influenciar esse resultado. Entre estes fatores estão as precipitações pluviométricas que incidem sobre a estação. Utilizando dados do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET) [17], foram obtidas informações para uma região com clima e topografia semelhantes às das regiões Centro-Oeste e Norte (por exemplo, estados como Mato Grosso e Tocantins), permitindo observar a precipitação em mm, como demonstrado na Tabela 6.

Com base nos dados de precipitação pluviométrica, foram geradas as Figuras 5 e 6, que permitem analisar a eficiência energética mensal em conjunto com os índices de chuva. As escalas do eixo y foram ajustadas o máximo possível para facilitar a comparação direta entre os períodos pré e pós-instalação, apesar das diferenças nos valores absolutos. Essa apresentação destaca visualmente a maior estabilidade do consumo específico (kWh/m<sup>3</sup>) observada após a implantação do controlador PID.

Embora o período pós-instalação tenha registrado 42% mais precipitação, o indicador kWh/m<sup>3</sup> médio caiu 14,17%. Isso demonstra que o controle PID amorteceu o impacto da infiltração pluvial, mantendo o sistema mais próximo do ponto ótimo de operação da bomba (curva  $H \times Q$ ).

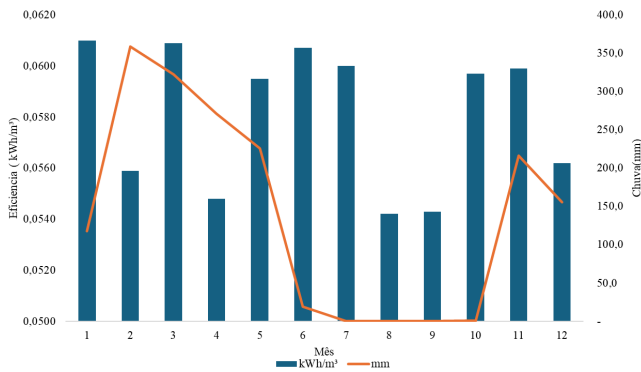


Figura 6: Eficiência (kWh/m<sup>3</sup>) x Chuva (mm) pós-instalação.

Essas figuras elucidam melhor o impacto que os períodos de precipitação têm no desempenho de uma elevatória de esgoto, visto que, nos períodos de maior incidência pluviométrica, os valores de kWh/m<sup>3</sup> tendem a ser maiores. Ao comparar os períodos, percebe-se que, na Figura 5, o sistema apresenta uma eficiência energética inferior, mesmo em meses com menor volume de chuvas, como o mês 8, enquanto, na Figura 6, essa situação se mostra mais estável.

Ademais, o kWh/m<sup>3</sup> máximo pós-instalação (0,0620 kWh/m<sup>3</sup>) é menor que o pré-instalação (0,0794 kWh/m<sup>3</sup>), sugerindo que o sistema contribui para reduzir o impacto das chuvas. Considerando que o total de chuvas no período anterior a instalação foi de 1.183,2 mm, enquanto no período posterior alcançou 1.687,0 mm (aproximadamente 42% a mais), o sistema parece amortecer esse efeito, promovendo uma operação mais eficiente e estável ao longo dos meses.

**b. Análise relacionadas a manutenção**

Além desse indicador, é necessário avaliar o impacto nas manutenções, especialmente nas corretivas, decorrentes da instalação do PID. Para tanto, considerou-se o custo de mão de obra técnica: adotou-se, como referência, o custo médio mensal de um técnico de manutenção eletromecânica – incluindo periculosidade, benefícios e encargos – que, segundo especialistas da área é de, em média, R\$ 8.300,00 por mês, obtendo para uma jornada de 220 horas o valor de R\$37,73 por hora trabalhada.

A partir desse valor da hora trabalhada e da coleta da quantidade média de ordens de serviço (OS) e do tempo despendido em atividades de manutenção preventiva e corretiva, é possível verificar, nas Tabelas 7 e 8, se a equipe de manutenção está gastando mais tempo em reparos corretivos ou em ações preventivas.

Semelhante ao indicador de eficiência, é necessário observar se as chuvas influenciaram o tempo gasto nas atividades de manutenção. Assim, as Figuras 7 e 8 demonstram o tempo médio que os funcionários de manutenção dedicaram às atividades corretivas e preventivas antes e depois da instalação do sistema de controle.

Por meio das imagens, é possível observar que os períodos de estiagem apresentam um menor índice de corretivas, em comparação com a maioria dos meses que exibem picos de precipitação.

A Figura 8 demonstra que a implantação do PID contribuiu para a redução de corretivas nos meses 1 ao 5;

TABELA 7: QUANTIDADE ESTIMADA DE ORDENS DE SERVIÇO POR TIPO DE ATIVIDADE.

Mês	Preventiva Pré-instalação	Corretiva Pré-instalação	Preventiva Pós-instalação	Corretiva Pós-instalação
1	13	19	18	0
2	12	52	5	2
3	12	10	20	0
4	21	10	4	0
5	1	1	10	13
6	9	0	12	0
7	5	0	12	0
8	10	0	0	15
9	12	0	20	0
10	3	0	0	6
11	12	1	16	54
12	18	0	12	6

TABELA 8: QUANTIDADE ESTIMADA DE MANUTENÇÃO POR TIPO DE ATIVIDADE.

Mês	Preventiva Pré-instalação	Corretiva Pré-instalação	Preventiva Pós-instalação	Corretiva Pós-instalação
1	11,48	67,00	17,67	0,00
2	7,25	171,52	6,25	16,00
3	6,17	28,57	12,70	0,00
4	17,80	37,32	2,83	0,00
5	1,00	2,00	10,28	60,62
6	3,33	0,00	29,33	0,00
7	18,00	0,00	12,87	0,00
8	7,70	0,00	0,00	84,77
9	8,87	0,00	14,30	0,00
10	5,00	0,00	0,00	14,85
11	13,15	6,00	13,65	176,95
12	0,00	0,00	9,08	3,60

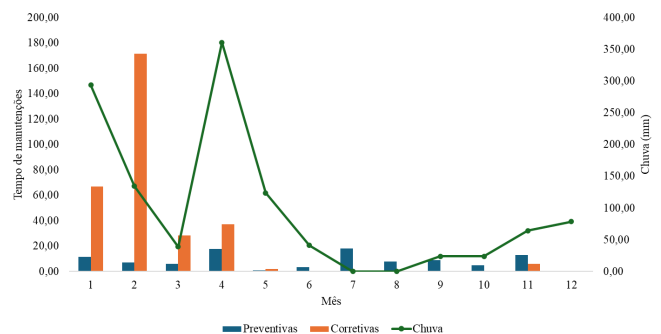
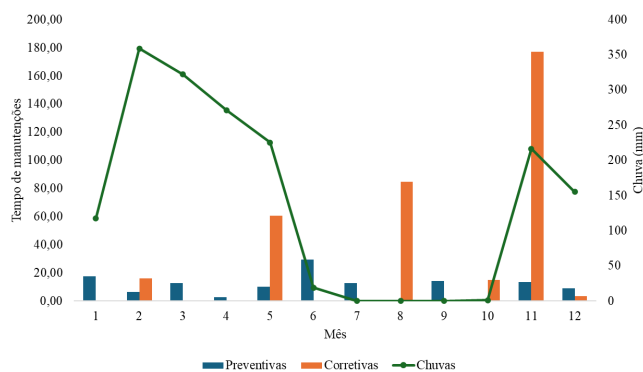


Figura 7: Tempo utilizado em manutenção x Chuva (mm) Pré-instalação.

contudo, possivelmente devido a outros fatores operacionais – tais como tensão inadequada, vibração excessiva e problemas de lubrificação – que também podem aumentar o número de intervenções corretivas [18], ocorreu um incremento nas atividades de reparo em meses com menor índice de chuvas.

Com base nas Tabelas 7 e 8, que mostram o quantitativo de OS e o tempo gasto, estima-se um aumento de 14,21% em Hora-Homem, resultando no acréscimo de R\$ 1.674,46 entre os períodos.

Dessa maneira, o aumento de ordens corretivas em



**Figura 8:** Tempo utilizado em manutenção x Chuva (mm) Pós-instalação.

**TABELA 9:** CUSTOS DOS EQUIPAMENTOS DESTINADOS A AUTOMAÇÃO DA EEE.

Equipamentos automação	Quantidade	Valor Total
Painel de automação com CLP Schneider, comunicação GPRS ABS CEL X, relés de comando de status, e cartão analógico de expansão	1	R\$ 37.750,94
Sonda de nível hidrostático 0 a 10mca e sinal analógico 4 a 20mA, indicador de processo MEGGA	1	R\$ 1.769,50
Cabos de comunicação modbus, isolador óptico e protetor DPS Clamper	1	R\$ 3.000,00
Serviço de mão de obra de instalação e configuração do sistema	1	R\$ 10.000,00
<b>Total</b>		<b>R\$ 52.520,44</b>

períodos posteriores à implantação pode decorrer de múltiplos fatores correlacionados que afetaram os indicadores, independentemente da presença do controlador. Assim evidenciando que o controlador não tem um impacto significativo na redução de corretivas e em tempo gasto de manutenção.

### c. Estimativa de custo para implantação

Ao compreender o impacto, especialmente sobre o consumo de energia, decorrente da utilização do PID, torna-se necessário calcular o custo estimado para que seja realizada essa melhoria. Para isso, consideram-se valores de mercado de marcas de referência em automação (por exemplo, Schneider, ABB e MEGGA), permitindo obter uma previsão do custo de implantação de um sistema de automação em uma EEE conforme o modelo deste estudo. A Tabela 9 apresenta a média de valores que tal implantação tenderia a custar.

Esses valores podem ser atenuados, caso a implantação do sistema de controle seja realizada por uma equipe própria. Contudo, para que isso seja possível, é preciso que a empresa tenha um técnico de automação ou técnicos com esse tipo de treinamento.

### d. Estipulação de retorno financeiro

Devido ao fato de este trabalho analisar uma unidade operacional hipotética, as estimativas de *payback* obtidas não refletem integralmente a realidade prática. Isso ocorre porque, ao se realizar uma análise de gestão energética no contexto das empresas brasileiras de saneamento, é necessário considerar variáveis adicionais, como a demanda contratada, a aquisição de energia no mercado livre, a utilização de sistemas próprios de geração solar, o uso de geradores a diesel em horários de ponta, entre outros fatores que influenciam diretamente a análise financeira.

Além disso, o acesso aos dados sobre o valor pago ou contratado por kWh envolve questões financeiras sensíveis, muitas vezes restritas ao setor administrativo das empresas. Por esse motivo, torna-se inviável incluir neste estudo um cálculo preciso de *payback* financeiro.

Diante dessa limitação, a economia em kWh se apresenta como um marcador técnico confiável e relevante. Independentemente da modalidade de contratação ou das fontes de energia utilizadas no processo, esse indicador permite mensurar de forma objetiva a eficiência energética da unidade, refletindo diretamente o desempenho do sistema após a implantação do controlador PID.

É importante destacar que os valores apresentados representam apenas estimativas, construídas com base nas condições atuais da economia interna e externa, e fundamentadas em dados específicos, com o objetivo de mensurar a economia potencial do investimento. Assim, variações como o IPCA (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo), as tarifas regionais de energia, possíveis isenções de ICMS e acordos estabelecidos em convenções coletivas de trabalho (CCT) não foram consideradas nas análises.

Ainda assim, a implantação do sistema de controle configura-se como uma melhoria significativa. Além do impacto financeiro, o controlador PID proporcionou uma redução de 14,17% nos gastos com energia e contribuiu para uma maior estabilidade no consumo específico (kWh/m<sup>3</sup>), mesmo em um período caracterizado por maior volume de chuvas. Por esse motivo, optou-se por não apresentar valores de *payback* ou ROI, pois tais indicadores seriam altamente sensíveis à modalidade contratual de energia (mercado cativo, livre, geração própria etc.) e às tarifas regionais vigentes, não agregando valor científico à análise.

## V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com base nos resultados apresentados na seção anterior, especialmente nas Figuras 4 e 6, observa-se que o controlador PID cumpriu seu objetivo de manter a Estação Elevatória de Esgoto (EEE) estável e operando de forma eficiente, mesmo diante de condições climáticas adversas. Em termos quantitativos, houve uma redução de 14,17% no consumo de energia nos 12 meses posteriores à implementação, atingindo uma média de 0,0581 kWh/m<sup>3</sup>, mesmo com um aumento de 42% na precipitação pluviométrica – fator externo que impacta diretamente o funcionamento dos conjuntos motobomba.

Além da redução direta no consumo energético, a implementação do controlador PID trouxe benefícios

indiretos relevantes, como maior previsibilidade dos processos, monitoramento mais preciso da unidade e melhor planejamento das atividades de manutenção.

Entretanto, a análise também revelou limitações que atenuam os ganhos observados. O controlador não apresentou impacto significativo na redução das manutenções corretivas e, em alguns casos, pode contribuir para a geração de harmônicos, afetando sensores e a estabilidade do sistema. Fatores externos de natureza econômica – como variações tarifárias e aumento de tributos, como o ICMS – também reduzem o impacto financeiro da economia energética direta.

O PID não reduziu significativamente manutenções corretivas, podendo gerar harmônicos que afetam sensores. Fatores externos (chuvas, tensão inadequada, vibrações, lubrificação, furtos) também influenciam. A ausência de redução significativa nas manutenções corretivas reforça a necessidade de complementar o PID com manutenção preditiva (monitoramento de vibração, temperatura e corrente), prática já recomendada na literatura [18].

A implantação e manutenção adequada do sistema de controle dependem de uma equipe técnica capacitada. Na ausência dessa equipe, há maior dependência de serviços terceirizados, o que impacta diretamente nos custos e no tempo de resposta.

Diante dessa análise, identificam-se ações complementares que podem potencializar os benefícios do PID. No âmbito econômico e contratual, recomenda-se a avaliação do grupo tarifário, revisão de contratos para minimizar multas por ultrapassagem de demanda e, quando viável, migração do mercado cativo para o mercado livre de energia. Tais medidas podem tornar a economia energética mais estável frente às variações externas.

No aspecto da confiabilidade operacional, sugere-se a ampliação das práticas de manutenção preditiva e preventiva, como o monitoramento de vibração, análise da condição de lubrificação, monitoramento de corrente e temperatura em motores, com a incorporação de sensores inteligentes. Também se recomenda a implantação de dispositivos e rotinas para prevenção de furtos em unidades com maior incidência, além da capacitação da equipe interna para realizar parametrizações e ajustes no sistema, reduzindo a dependência de terceiros.

Conclui-se, portanto, que o controlador PID atingiu seu propósito funcional ao promover maior estabilidade operacional e eficiência energética na EEE, mesmo sob condições adversas. Os benefícios diretos (redução de consumo e estabilização da operação) e indiretos (monitoramento aprimorado) são evidentes. No entanto, sua eficácia plena depende da adoção de medidas complementares de natureza contratual, de infraestrutura elétrica, de segurança e de manutenção. As melhorias propostas representam o próximo passo lógico para consolidar os ganhos e tornar a operação da EEE mais eficiente e economicamente sustentável.

## VI. CONCLUSÕES

Este trabalho aplicou uma metodologia eficaz para avaliar a viabilidade da implantação de um controlador PID em uma unidade operacional do sistema de saneamento. A

abordagem envolveu a análise de indicadores como consumo de energia (kWh), volume de esgoto tratado ( $m^3$ ), número de ordens de serviço e tempo destinado à manutenção, associados a variáveis climáticas, resultando em uma avaliação consistente da aplicação do controlador.

Os resultados obtidos indicam que a implantação do PID proporciona benefícios diretos e indiretos, como maior estabilidade operacional, redução de 14,17% do consumo energético em diferentes condições climáticas, aumento da eficiência dos equipamentos e possibilidade de monitoramento mais preciso da unidade. Contudo, é importante destacar que, por se tratar de uma unidade hipotética, as estimativas de *payback* financeiro não refletem integralmente a realidade prática. A obtenção de dados sobre o valor pago ou contratado por kWh envolve questões financeiras sensíveis, muitas vezes restritas ao setor administrativo das empresas. Além disso, fatores como demanda contratada, aquisição de energia no mercado livre, uso de fontes alternativas (geradores a diesel ou sistemas fotovoltaicos) e variações tarifárias regionais impactam diretamente a análise econômica. Por esse motivo, o indicador técnico de consumo específico ( $kWh/m^3$ ) foi adotado como métrica principal de desempenho, pois representa uma medida objetiva e confiável da eficiência energética, independentemente da modalidade de contratação ou das fontes de energia envolvidas.

É importante ressaltar que as análises apresentadas foram realizadas com base em estimativas para fins acadêmicos. Assim, considerando possíveis reajustes econômicos e variações geográficas, recomenda-se a atualização dos resultados com dados reais da unidade operacional em estudo.

Para trabalhos futuros, sugere-se a ampliação da pesquisa por meio da coleta de dados de um número maior de unidades, abrangendo sistemas de água e esgoto, a fim de garantir maior representatividade. Recomenda-se também considerar variáveis externas não diretamente relacionadas às características da unidade, como alterações tarifárias de energia, custos e quantidades de insumos utilizados em manutenções corretivas, além de legislações específicas de isenção fiscal aplicáveis. Outro ponto relevante é a análise comparativa entre diferentes tipos de infraestrutura de rede para a implantação do PID, visando identificar a alternativa mais eficiente e economicamente viável.

Por fim, o estudo desenvolvido apresenta potencial para contribuir com a identificação de melhorias em unidades operacionais de saneamento, promovendo maior eficiência. Essa análise pode auxiliar empresas do setor a obterem avaliações mais precisas sobre o impacto do controlador PID e a considerarem sua adoção no planejamento estratégico. As perspectivas futuras aqui elencadas podem apoiar a expansão do uso do PID em diferentes contextos, enriquecendo o conhecimento sobre automação no setor e fomentando avanços técnicos e econômicos na área.

## REFERÊNCIAS

- [1] I. P. Santos and O. F. Cauby Bernardes, "Saneamento bÁsico: Desafios na regulaÇÃO," *Nova Hileia | Revista Eletrônica de Direito Ambiental da Amazônia - ISSN 2525-4537*, vol. 17, no. 3, jan. 2025. [Online]. Available: <http://periodicos.uea.edu.br/index.php/novahileia/article/view/3872>

- [2] M. A. Costa, *Diálogos para uma Política Nacional de Desenvolvimento Urbano: temas transversais à PNDU*. Brasília: Ipea, 2024, vol. 3. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.38116/978-65-5635-069-1>
- [3] L. Soriano, “Contribuição ao estudo da eficiência energética na operação de reservatórios urbanos de abastecimento de água com o uso de otimização e automação,” Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brazil, 2023. [Online]. Available: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/11734>
- [4] V. d. S. Nascimento, S. C. L. d. Freitas, V. F. Moreira, J. C. d. Silva, S. M. R. Sanhueza, M. A. Mantovani, R. C. Barbazzelli, and P. V. D. Pereira, “Estudo de gestão energética no contexto das empresas brasileiras de saneamento,” *Caderno Pedagógico*, vol. 21, no. 12, p. e10578, 2024. [Online]. Available: <https://ojs.studiespublicacoes.com.br/ojs/index.php/cadped/article/view/10578>
- [5] Eletrobrás, “Eficiência energética em sistemas de bombeamento,” Eletrobrás, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Tech. Rep., 2005.
- [6] J. O. d. Almeida, A. C. d. Andrade, and J. C. L. Júnior, “Smart sewers: Esgoto inteligente utilizando redes IoT para a monitorização de elevatórias de esgoto para a otimização dos processos de esgotamento sanitário na cidade de senhor do bonfim-BA,” in *Anais do 21º SILUBESA – Simpósio Luso-Brasileiro de Engenharia Sanitária e Ambiental*, 2024. [Online]. Available: [https://abes-dn.org.br/analseletronicos/21silubesa\\_download/75\\_tema\\_ii.pdf](https://abes-dn.org.br/analseletronicos/21silubesa_download/75_tema_ii.pdf)
- [7] R. Chen, “A comprehensive analysis of PID control applications in automation systems: Current trends and future directions,” *Highlights in Science, Engineering and Technology*, vol. 97, pp. 126–132, 2024.
- [8] R. P. Borase, D. K. Maghade, S. Y. Sondkar *et al.*, “A review of PID control, tuning methods and applications,” *Int. J. Dynam. Control*, vol. 9, pp. 818–827, 2021.
- [9] P. H. Gomes *et al.*, *Sistemas de Bombeamento: Eficiência Energética*. João Pessoa: Editora Universitária – UFPB, 2009.
- [10] L. H. C. Alexandre, “Avaliação do consumo de energia elétrica em estações elevatórias para abastecimento de água com diferentes configurações de sistemas,” Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Londrina, 2024. [Online]. Available: <https://repositorio.uel.br/handle/123456789/15891>
- [11] C. M. Franchi, *Inversores de Frequência – Teoria e Aplicações*, 2nd ed. São Paulo: SRV Editora, 2009.
- [12] M. D. Zancan, *Controladores Programáveis*, 3rd ed. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria; Colégio Técnico Industrial de Santa Maria, 2011.
- [13] M. T. Tsutiya and P. A. Sobrinho, *Coleta e Transporte de Esgoto Sanitário*, 2nd ed. Rio de Janeiro: ABES, 2011.
- [14] BRK Ambiental, “Água da chuva não deve ser direcionada para a rede de esgoto,” 2025, acessado em: 2025-05-20. [Online]. Available: <https://brkambiental.com.br/maua/agua-da-chuva-nao-deve-ser-direcionada-para-a-rede-de-esgoto>
- [15] Associação Brasileira de Normas Técnicas, *NBR 12208: Projeto de estação de bombeamento ou de estação elevatória de esgoto – Requisitos*, ABNT, Rio de Janeiro, 2020.
- [16] BRK Ambiental, “Estação elevatória de esgoto,” 2025, acessado em: 2025-05-20. [Online]. Available: <https://blog.brkambiental.com.br/estacao-elevatoria-de-esgoto/>
- [17] Instituto Nacional de Meteorologia, “Dados históricos,” 2025, acessado em: 2026-08-04. [Online]. Available: <https://portal.inmet.gov.br/dadoshistoricos>
- [18] Acoplast Brasil, “Falhas em motores elétricos,” 2025, acessado em: 2025-08-27. [Online]. Available: <https://blog.acoplastbrasil.com.br/falhas-em-motores-eletricos>

---

# Challenges and Perspectives in Conductor Break Detection in Distribution Grids with Electric Vehicle Charging Infrastructure

---

João Pedro Ferraz Mourão Maya Barbosa<sup>1</sup>, Murilo de Ávila Dilli<sup>1</sup> and Jadiel Caparrós da Silva<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Federal University of Tocantins (UFT), Department of Electrical Engineering, Tocantins, Brasil*

Reception date of the manuscript: 17/11/2025

Acceptance date of the manuscript: 26/03/2026

Publication date: 28/03/2026

---

**Abstract**— The increasing adoption of electric vehicles (EVs) is transforming power distribution systems by introducing new operational complexities and protection challenges. Among these, the reliable detection of CB faults has become critical to ensure grid safety and stability. Unlike short-circuit faults, CB often generate low fault currents, rendering traditional overcurrent-based protection schemes inadequate. The integration of EVs further complicates detection due to their mobile nature, bidirectional power flows, and the widespread use of power electronic converters, all of which introduce significant voltage and current fluctuations. This paper presents a structured mapping-based review of conductor break fault detection in the context of EV-integrated distribution grids. We begin with an overview of fundamental concepts and proceed to analyze both conventional and advanced detection techniques, with a particular emphasis on recent developments leveraging signal processing and machine learning. The influence of EV loads on fault characteristics is critically examined, followed by a comparative analysis of detection approaches. Finally, we identify current technical challenges and outline future research directions, highlighting the need for adaptive, real-time protection strategies capable of addressing the complexities introduced by large-scale EV integration into distribution networks.

**Keywords**— Conductor Break Faults, Distribution Networks, Electric Vehicles, Fault Detection, Power System Protection, Smart Grids

---

## I. INTRODUCTION

The global transportation sector is undergoing a profound transformation driven by the widespread adoption of Electric Vehicles (EVs), motivated by climate goals, air quality concerns, and energy security. According to the International Energy Agency, over 2.1 million EVs were sold globally in 2019, forming a fleet of 7.2 million vehicles, representing approximately 2.6% of global car sales at the time [1, 2]. Projections estimate that this figure could exceed 230 million by 2030, reshaping both transportation and energy sectors [3, 4].

While this transition offers significant environmental benefits, it also introduces substantial challenges to power distribution networks [5, 6]. These challenges are twofold: ensuring the availability of reliable and widespread EV charging infrastructure, and securing the stable integration of such infrastructure within existing power systems [7]. In particular, fast-charging stations pose risks such as voltage imbalances [8], transformer overloading [9], increased network losses [10], and harmonic distortions [11], all of

which can compromise grid stability [12]. These effects are further exacerbated in urban areas with high EV penetration and limited grid capacity. In India, for example, EV adoption is in its early stages, but national and regional policies aim to accelerate uptake, targeting 30% EV sales across all vehicle types by 2030. Efforts are underway to expand public charging networks across major cities and corridors, recognizing that charging infrastructure and EV adoption must grow in tandem [7].

Although much research has focused on conventional protection challenges associated with EV integration [13], an underexplored yet critical issue is the detection of Conductor Break (CBs). Unlike short-circuit faults, CB typically do not generate significant fault currents [14], making them difficult to detect using traditional overcurrent-based protection schemes [15]. Nevertheless, they pose severe safety risks [16], including the presence of live conductors on the ground [16], potential fires, voltage imbalances, equipment damage, and, in extreme cases, cascading outages across interconnected systems [17].

The integration of EVs further complicates CB detection. Unlike conventional Distributed Generation (DG), EVs are mobile, frequently connecting and disconnecting from the grid, and operating in both charging (Grid-to-Vehicle, G2V) [18] and discharging (Vehicle-to-Grid, V2G) modes

[19, 20]. These characteristics result in rapidly changing network topologies [21], fluctuating power flows [22], and frequent waveform disturbances [23], particularly in residential areas with high EV density [24, 25]. Consequently, the subtle voltage and current anomalies typically associated with CB may be masked or misinterpreted as routine system variations. Moreover, traditional protection methods based on static overcurrent thresholds are ill-equipped to handle such dynamic and complex conditions [26, 27]. In Direct Current (DC) charging systems [28], the absence of natural current zero-crossings [29] and the widespread use of power electronic converters further complicate fault detection [30]. These factors underscore the pressing need for adaptive, real-time protection strategies capable of reliably detecting CB in modern, EV-integrated distribution grids.

Recent research has explored advanced approaches to enhance fault detection in such contexts, including the application of deep learning models. For example, Hosseini et al. [31] proposed a bi-directional long short-term memory (BWO-BiLSTM) neural network that processes voltage and current waveform features, achieving superior detection accuracy (98.5%) and rapid fault identification (within 5 ms), even under noisy conditions. Such methods demonstrate significant potential for overcoming the limitations of conventional protection schemes in increasingly complex distribution systems.

This paper presents a comprehensive bibliographic review of conductor break fault detection in the context of EV-integrated distribution grids. By analyzing the evolving load behaviors and protection requirements introduced by large-scale EV adoption, we assess how emerging detection strategies—from advanced signal processing to machine learning—can support safe and resilient grid operations.

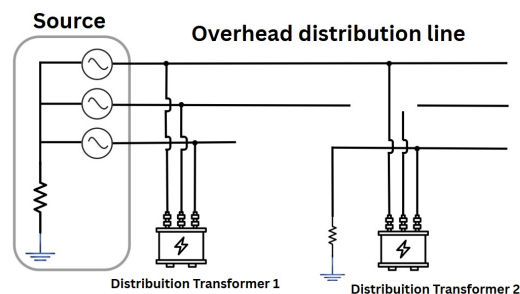
The remainder of this paper is organized as follows: Section II introduces the fundamental concepts underlying this study, including an overview of conductor break faults and the impact of EV charging infrastructure on fault characteristics. Section III presents a critical literature review of existing detection methods. Section IV discusses current technical challenges and future research directions, and Section V concludes with key findings and perspectives.

## II. FUNDAMENTALS

### a. Basic Concepts of Conductor Break Faults

Conductor break faults, also referred to as open conductor faults or broken conductor faults (CB), occur when one or more conductors in a distribution or transmission system physically separate due to mechanical failure, weather events, or external impacts [32, 33]. Unlike short-circuit faults, CB typically do not result in large fault currents, which makes them more difficult to detect using traditional overcurrent-based protection schemes [34].

As depicted in Fig. 1, conductor break faults can manifest in various configurations, such as single-phase or multi-phase discontinuities. These faults typically do not produce high current magnitudes, which complicates their detection using conventional overcurrent-based methods [35].



**Fig. 1:** Structure of an overhead distribution line with multiple transformers, illustrating potential locations where conductor break faults can occur due to physical disruptions or disconnections.

Adapted from [36].

These faults can lead to serious operational and safety consequences, including voltage imbalances, load disruptions, the potential energization of disconnected conductors, and increased risk of fire or electric shock hazards [37]. Accurate and timely detection is essential for preventing equipment damage and ensuring personnel and public safety [34, 38].

Recent research has focused on advanced signal processing techniques to enhance BCF detection. For example, a study by [39] proposes a method based on discrete wavelet transform (DWT) to identify broken conductor faults in interconnected transmission systems. The method exploits transient components of current signals to detect and classify fault conditions with high accuracy, even under challenging system dynamics [36, 39].

Similarly, a detection approach described by [40] combines experimental validation with algorithmic strategies to reliably detect both single and multiple conductor breaks in distribution systems. The proposed method demonstrates strong performance even in high-impedance fault conditions and under various loading scenarios, reinforcing the importance of adaptive and context-aware fault detection strategies [40, 41].

These challenges are further amplified when EVs are introduced into the distribution system, as discussed in the next section.

### b. Overview of Electric Vehicle Integration in Distribution Systems

The integration of EVs into distribution systems introduces a new set of operational complexities. As EV penetration increases, particularly in urban areas, their charging behavior causes sudden and unpredictable power demand, leading to voltage deviations, increased system losses, and transformer overloading [42]. In high-density EV regions, especially with the emergence of fast-charging stations, these issues can severely impact power quality and stability, demanding upgrades to distribution infrastructure [43]. Additionally, the bidirectional nature of EVs—through Vehicle-to-Grid (V2G) and Grid-to-Vehicle (G2V) modes—adds complexity by allowing EVs to behave both as loads and as energy sources [18, 19, 20]. This disrupts traditional load forecasting and protection schemes [42].

Recent studies also emphasize that uncoordinated EV

integration can lead to severe stress on distribution assets, creating new constraints for real-time grid operation and planning. The variability of EV load profiles, shaped by user behavior and market incentives, further complicates dynamic response mechanisms [44]. These challenges require smarter grid infrastructure and data-driven control strategies to mitigate negative impacts and enable secure, scalable integration [45, 46].

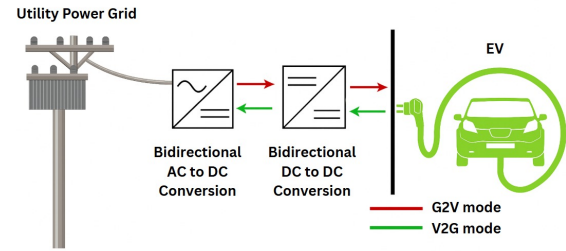
In the specific context of fault detection, these fluctuating load conditions and bidirectional energy flows can obscure the characteristic voltage and current patterns associated with conductor break faults. Subtle waveform anomalies that may indicate CB can be mistaken for normal transient behavior induced by EV operations, increasing the likelihood of false negatives or delayed detection. These detection challenges, introduced by EV integration, further justify the need for advanced, context-aware protection schemes capable of distinguishing true fault events from routine dynamic changes in the network.

### c. Impact of EV Charging Points on Fault Characteristics and Detection

The integration of EVs and their charging infrastructure into distribution grids introduces significant challenges for fault detection, particularly for CB faults. With the growing prevalence of fast-charging stations and the increasing number of EVs, power demand becomes unpredictable, leading to voltage instabilities that can obscure fault detection systems [47, 48, 49]. These voltage fluctuations and transient effects are often mistaken for normal grid disturbances, which makes distinguishing between genuine faults and regular grid dynamics more difficult. Studies have demonstrated that EV chargers, especially in high-density urban areas, can generate substantial power quality disturbances, exacerbating the difficulty of detecting CB in these networks [50].

Moreover, the bidirectional nature of EVs, where they can both draw power from and return power to the grid (Vehicle-to-Grid and Grid-to-Vehicle modes), adds another layer of complexity [51]. Fig. 2 illustrates a typical V2G/G2V interface, highlighting the bidirectional flow of power and control signals. These bidirectional flows not only introduce fluctuations in voltage and current but also complicate the task of distinguishing fault-induced signatures from normal EV charging or discharging behavior [52]. In particular, “spatiotemporal fusion models” like the one proposed by Zhang et al. [53] have shown promise in capturing these dynamics by combining both spatial and temporal information to improve detection accuracy.

As traditional fault detection methods rely heavily on steady-state voltage and current measurements, they are unable to capture the rapidly changing conditions caused by uncoordinated EV charging [50, 51]. This makes the application of machine learning models, such as “Generative Adversarial Networks (GANs)”, an ideal solution to generate synthetic fault signatures and improve classification accuracy, even when faced with incomplete or noisy datasets [56, 57].



**Fig. 2:** Schematic of a bidirectional EV charging system (V2G/G2V). Such systems introduce time-varying and location-dependent fluctuations in grid voltage and current, complicating conductor break fault detection. Adapted from [54, 55].

## III. LITERATURE REVIEW AND CRITICAL ANALYSIS

### a. Research Methodology and Systematic Mapping Study

This work is characterized as a systematic mapping study, rather than a systematic literature review. The objective is to provide a broad and structured overview of existing research on CB fault detection in distribution systems under increasing EV penetration, identifying trends, challenges, and research gaps.

Unlike systematic reviews, which aim at an in-depth synthesis of a narrowly defined topic, systematic mapping studies focus on categorizing and structuring the existing literature in a broader domain. Therefore, this study emphasizes the classification of methods, challenges, and technological approaches related to the research topic.

The study is guided by the following research question:

- **RQ1:** What are the primary technical challenges and emerging strategies for detecting conductor break faults in distribution systems considering high EV penetration?

Based on this research question, the key concepts were identified and translated into search keywords. The main elements extracted from the RQ include:

- Fault type: "conductor break", "open conductor fault", "broken conductor"
- System context: "distribution system", "distribution grid"
- Emerging factor: "electric vehicle", "EV charging", "V2G"

These terms were combined using Boolean operators to construct the search string:

("conductor break" OR "open conductor fault" OR "broken conductor") AND ("distribution system" OR "distribution grid") AND ("electric vehicle" OR "EV charging" OR "V2G")

The literature search was conducted across major scientific databases, including IEEE Xplore, ScienceDirect,

and Google Scholar, ensuring coverage of high-impact publications in power systems and smart grid research. Studies were screened based on title and abstract, excluding those not directly related to conductor break faults or EV-integrated distribution systems. The remaining articles were subjected to full-text assessment, and only studies with strong methodological and technical relevance were included in the final mapping analysis.

To ensure methodological transparency and reproducibility, the study followed a structured selection process composed of three stages:

1. **Identification:** Initial retrieval of studies based on the defined search string.
2. **Screening:** Removal of duplicates and filtering based on title and abstract relevance.
3. **Eligibility:** Full-text analysis to verify alignment with the research scope.

The inclusion criteria were defined as follows:

- Peer-reviewed journal articles and conference papers;
- Studies addressing fault detection in distribution systems;
- Works involving EV integration or its impact on grid behavior;
- Publications between 2019 and 2025.

The exclusion criteria included:

- Studies not related to conductor faults or distribution systems;
- Papers without full-text access;
- Duplicate publications.

The results of the mapping process are organized and discussed in the following subsections, focusing on the impact of EV integration and the evolution of fault detection methods.

### ***b. Effects of EV Charging on Fault Detection***

Building upon the fundamental concepts discussed earlier, the widespread integration of EVs into power distribution networks presents significant challenges for traditional fault detection mechanisms. As EV adoption accelerates, the charging behavior of these systems introduces considerable variability in both voltage and current profiles, often undermining the accuracy and responsiveness of existing protection schemes.

EV charging, particularly when uncoordinated, creates highly dynamic and non-linear load profiles, leading to voltage fluctuations, phase imbalances, and transformer overloading [42, 58, 59]. These effects are especially pronounced during peak residential charging periods, where simultaneous demand from multiple chargers exacerbates load imbalances. High-power charging stations, including fast-charging infrastructure, can introduce sudden, large current draws, increasing thermal and mechanical stress on

distribution equipment [43, 60]. The key impacts on voltage and current profiles are summarized in Table 1.

Another critical concern is the introduction of harmonics and supraharmonics into the grid by EV chargers, which rely on power electronic converters that inject waveform distortions. This has been shown to affect current and voltage integrity, degrading the performance of signal-based fault detection techniques such as traveling wave and wavelet transform methods [61, 62, 63]. These distortions, combined with rapid fluctuations in voltage and current, can mask the subtle waveform anomalies indicative of faults, particularly conductor break faults. The implications for signal distortion and protection adaptation are outlined in Table 2.

Moreover, the bidirectional energy flow enabled by Vehicle-to-Grid (V2G) technologies adds further complexity to fault detection [47]. EVs can act alternately as loads or sources, creating ambiguous signatures in current and voltage waveforms. In some cases, the power injection from EVs may partially offset the signs of a developing fault, delaying its identification or resulting in false negatives [47, 64]. The variability introduced by these charging and discharging cycles reduces the sensitivity of conventional protection schemes that rely on fixed thresholds or unidirectional assumptions.

Onboard EV components, such as inverters and power factor correction units, may also suppress or alter transient fault signals, further complicating detection tasks. Additionally, studies have highlighted how uncoordinated EV integration imposes new constraints on dynamic grid behavior, affecting protection scheme coordination and fault isolation [44, 45, 46].

To address these evolving challenges, researchers have proposed adaptive, data-driven protection systems capable of maintaining detection sensitivity under highly variable operating conditions. Machine learning approaches, such as those using Support Vector Machines (SVMs), have shown promise in dynamically classifying fault signatures under diverse EV load profiles [65]. Other strategies include the integration of coordinated charging management systems and the use of fault current-limiting devices to stabilize network behavior during disturbances [66, 67].

In summary, the increasing penetration of EVs is reshaping the voltage and current landscape of distribution networks. These changes demand a transition from traditional, static protection frameworks to intelligent and adaptive systems designed to operate under dynamic and uncertain conditions.

**TABLE 1:** EV CHARGING IMPACTS ON GRID PARAMETERS.

Method	Limitations
Voltage	Dips, imbalance, reduced detection accuracy
Current	Transformer stress, fault signature masking
Coordination	Relay miscoordination, timing issues

### ***c. Recent Studies and Advances***

Recent research has increasingly focused on adapting fault detection methods to the unique challenges posed by EV

**TABLE 2: WAVEFORM DISTORTION AND PROTECTION STRATEGY IMPACTS.**

Method	Limitations
Harmonics	Degrades signal-based fault detection
V2G Flow	Masks faults, delays detection
EV Components	Suppress transients, obscure signatures
Mitigation	Needs adaptive ML and coordination

integration into distribution systems. These include fluctuating load profiles due to EV charging behavior, harmonic and supraharmonic distortion introduced by power electronic interfaces, bidirectional energy flows in vehicle-to-grid (V2G) operations, and the masking or alteration of traditional fault signatures—conditions under which conventional detection systems may falter.

One of the most notable recent advances is the deep learning-based model proposed by Hosseini et al. [31], which employs a Bi-directional Long Short-Term Memory (BWO-BiLSTM) network. This model processes voltage and current waveform features in networks with high EV penetration and achieves a fault detection accuracy of 98.5%, with rapid detection times under 5 ms. Fig. 3 illustrates a wavelet-based hybrid LSTM-DNN model, similar in structure to the type used in these studies, showing how extracted features from voltage and current waveforms are processed through deep learning layers for fault classification [68].

Complementing this, Khalil et al. [69] introduced a hybrid method combining machine learning with signal processing to enhance the detection of high-impedance faults, which are often masked by EV-induced harmonics. Their approach leverages transient features in noisy environments for robust classification.

Support Vector Machines (SVMs) have also gained traction. A recent scheme [65] adapts SVM decision boundaries in real-time based on EV-related variability in load, significantly improving the identification of broken CB under uncertainty.

Beyond classical techniques, generative deep learning is emerging as a powerful tool. Fang et al. [56] proposed a Least Squares Generative Adversarial Network (LSGAN) to balance fault datasets from EV battery systems. By enhancing the diversity of fault data and optimizing classification through a Gray Wolf Optimizer-tuned random forest, their method significantly improved diagnostic performance under class imbalance.

In the realm of online EV behavior modeling, Kamoona et al. [70] introduced an unsupervised memory-based transformer (M-TR) for detecting EV charging events in real time using smart meter data. This method eliminates the need for prior charging profiles and adapts to novel EV behaviors—offering promise for continuous grid monitoring and anomaly detection.

Graph-based learning is also finding application in fault diagnostics. Nguyen et al. [71] developed a Spatial-Temporal Recurrent Graph Neural Network (STR-GNN) to analyze bus voltage patterns across distribution networks. Their approach captures both spatial correlations and temporal evolution of voltage anomalies, outperforming traditional CNN and RNN

models in identifying fault locations and types.

Focusing on the infrastructure side, Zhang et al. [53] presented a method for charging pile fault detection using a spatiotemporal fusion model that integrates frequency and amplitude features from three-phase current data. Their model demonstrates improved identification of faults in EV charging stations under dynamic load conditions.

From a hardware perspective, Gao and Lin [72] used Deep Belief Networks (DBNs) for fault diagnosis in DC charging points, showing superior feature extraction and classification of charging anomalies compared to shallow models.

Zhang et al. [73] also evaluated multiple machine learning models—SVMs, LSTM, and random forests—for the coordination of EV charging strategies to reduce grid stress and indirectly improve fault resilience.

Lastly, Izquierdo Gómez et al. [74] proposed a thermal model-based fault diagnosis system using artificial neural networks trained on simulated thermal data from power converter modules. This approach detects subtle internal anomalies in charging infrastructure, enhancing proactive maintenance and grid reliability.

Collectively, these studies represent a shift toward intelligent, adaptive, and data-driven fault detection systems designed for the emerging complexities of EV-integrated distribution networks. Nevertheless, most have been validated through simulation or limited-scale testing, underscoring the need for real-world validation in diverse operational environments.

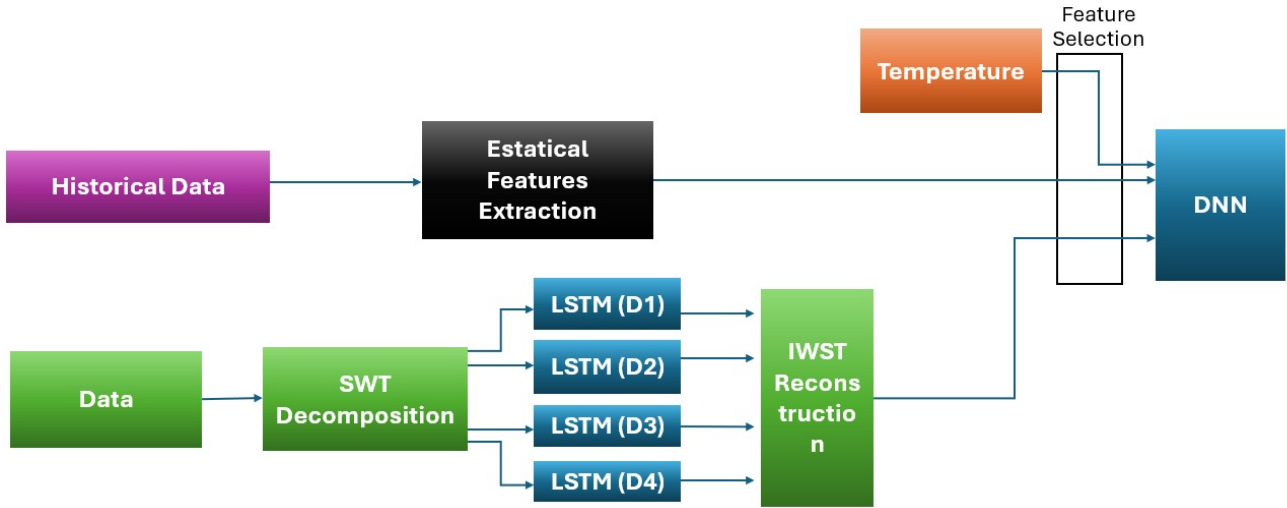
#### *d. Comparative Analysis of Detection Methods*

Tables 3, 4, 5, and 6 collectively provide a comparative assessment of the main CB fault detection methods reviewed in this study. Table 3 summarizes the underlying principles of each approach, while Table 4 outlines their key advantages. Table 5 highlights common limitations, including sensitivity to noise, topological dependence, and computational overhead. Finally, Table 6 evaluates how well each method adapts to EV-integrated distribution networks, which introduce additional complexity due to dynamic load behavior and harmonic distortions.

This comparative analysis reveals that modern machine learning-based techniques (e.g., BiLSTM, SVM, STR-GNN) demonstrate high adaptability and accuracy in EV-dense environments but often require extensive data, greater computational resources, and detailed network information. In contrast, conventional approaches, though simpler and easier to implement, tend to be less robust under the dynamic conditions introduced by EV integration.

## **IV. CHALLENGES AND FUTURE RESEARCH DIRECTIONS**

The integration of EVs into modern power systems, particularly in microgrids and distribution networks, introduces significant technical challenges for fault detection mechanisms. One major challenge stems from the dynamic and non-linear behavior of EV loads, which can cause irregular power flow, voltage fluctuations, and harmonics [75, 76]. These anomalies can obscure traditional fault indicators and result in increased false positives or



**Fig. 3:** Block diagram of a hybrid wavelet-based LSTM-DNN model for fault detection in power systems with high EV penetration. Feature extraction is performed using wavelet transforms, followed by temporal modeling and classification. Adapted from [68].

**TABLE 3:** DETECTION METHODS AND THEIR CORRESPONDING APPROACH.

Method	Approach
Impedance-Based Detection	Impedance estimation
Traveling Wave Analysis	High-frequency timing
DWT-Based Detection	Wavelet transform
Fixed Threshold Methods	Time-domain logic
BiLSTM Deep Learning	Deep neural networks
Support Vector Machines (SVM)	Supervised ML
LSGAN + Random Forest	GAN + ML hybrid
STR-GNN	Graph-based ML

**TABLE 4:** DETECTION METHODS AND THEIR KEY ADVANTAGES.

Method	Limitations
Impedance-Based	Simple, widely used
Traveling Wave	Accurate in long lines
DWT-Based	Captures dynamic transients
Fixed Threshold	Low cost, easy to implement
BiLSTM DL	High accuracy, topology-aware
SVM	Adapts to load variations
LSGAN + RF	Handles imbalance, improves detection
STR-GNN	Spatiotemporal voltage tracking

**TABLE 5:** DETECTION METHODS AND THEIR LIMITATIONS.

Method	Limitations
Impedance-Based	Sensitive to topology/load changes
Traveling Wave	Limited by branches and noise
DWT-Based	Needs high sampling; noise-sensitive
Fixed Threshold	Rigid; false positives under EVs
BiLSTM DL	Data-hungry; high computation
SVM	Needs tuning; noise-sensitive
LSGAN + RF	Complex; slow in real-time
STR-GNN	Needs full network topology

delayed responses in protection systems. The dynamic and intermittent nature of EV charging introduces additional variability in voltage and current levels. These fluctuations

**TABLE 6:** DETECTION METHODS AND THEIR ADAPTABILITY TO EV ENVIRONMENTS.

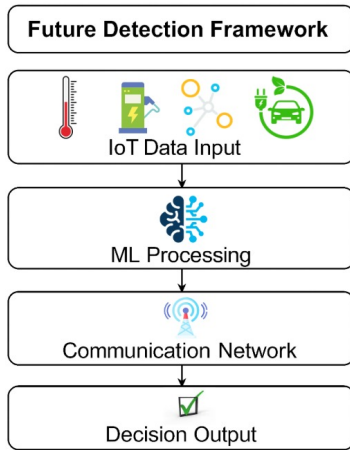
Method	EV Adaptability
Impedance-Based Detection	Low
Traveling Wave Analysis	Low–Moderate
DWT-Based Detection	Moderate
Fixed Threshold Methods	Low
BiLSTM Deep Learning	High
SVM	High
LSGAN + RF	High
STR-GNN	High

can obscure or mimic fault conditions, complicating accurate and timely fault identification [75, 77, 78]. Hosseini et al. [77] highlight that the fast-changing load profiles caused by EV chargers can degrade the performance of traditional protection schemes, especially when multiple charging stations are deployed in close proximity.

Moreover, the frequent switching operations and rapid variations in charging demand introduce stress conditions in microgrids, which complicate the design of dependable protection schemes [79, 80]. Dissimilar fault inceptions under such stressed conditions demand more adaptable and resilient detection systems. Traditional fault detection methods, designed for predictable grid behavior, struggle under these evolving conditions.

In addition to these technical hurdles, several open research gaps remain. As highlighted in [81], most current detection models do not adequately address the real-time anomaly detection requirements of EV charging stations within smart grids. Existing models often assume static or semi-static conditions, limiting their effectiveness in dynamic environments. Similarly, [82, 83] identifies a lack of robust communication infrastructure and the need for more advanced information and communication technologies (ICTs) to support accurate and timely detection in active distribution networks.

To address these issues, future research should prioritize the development of robust, real-time fault detection frameworks. The work in [81] presents a promising



**Fig. 4:** Conceptual architecture of an intelligent fault detection framework for EV-integrated distribution systems, incorporating IoT-based data acquisition, machine learning processing, and adaptive decision-making.

direction through the Grid Sentinel Framework, which applies anomaly detection methods specifically tailored for EV charging contexts. Additionally, deep learning-based techniques such as BiLSTM [77] are promising due to their ability to process time-sequenced data effectively, enabling near-instantaneous fault recognition. Machine learning models, particularly those utilizing ensemble learning techniques [84, 85], offer a viable solution for enhancing detection accuracy and interpretability, especially under uncertain and non-stationary fault conditions. Their ability to combine multiple classifiers can help mitigate errors introduced by sudden load changes and improve overall network stability.

Furthermore, there is a pressing need to improve data acquisition and communication reliability in fault detection systems. ICT integration, including high-speed optical networks and reliable sensors, as outlined in [82, 86], can significantly enhance the responsiveness and accuracy of detection algorithms. These improvements are crucial for developing dependable systems that can operate under high EV penetration scenarios.

In this context, a conceptual architecture for an intelligent, EV-aware fault detection framework is proposed, as illustrated in Fig. 4. The framework integrates IoT-enabled sensing, data-driven machine learning models, and adaptive decision-making layers to enable real-time and context-aware fault detection in modern distribution networks. This architecture highlights the importance of combining advanced analytics with resilient communication infrastructure to address the challenges imposed by high EV penetration.

Overall, while substantial progress has been made in understanding the implications of EV integration, more focused efforts are required to close the existing research gaps. Future work should aim to combine adaptive algorithms, real-time data analytics, and resilient communication infrastructures to develop comprehensive fault detection systems suitable for the complexities of EV-integrated power systems.

## V. CONCLUSION

The rapid proliferation of EVs and their integration into power distribution systems is fundamentally reshaping fault detection paradigms—particularly for CB faults, which often exhibit low current signatures and may remain undetected by conventional protection mechanisms. This bibliographic review has shown that while established methods—such as impedance-based estimation, traveling wave analysis, and signal decomposition techniques like the Discrete Wavelet Transform (DWT)—have historically provided reliable protection, they are increasingly challenged by EV-induced dynamics, including harmonic distortions, nonlinear loads, and bidirectional power flows.

Modern distribution networks, shaped by decentralized energy resources and dynamic EV charging behaviors, require fault detection frameworks that are not only accurate but also adaptive, context-aware, and capable of real-time operation. Emerging strategies—such as deep learning-based models (e.g., BiLSTM), generative adversarial networks (GANs), and graph-based learning—demonstrate significant potential in detecting complex transient signal anomalies under conditions of noise and variability. However, many of these methods remain confined to simulation environments and have yet to achieve large-scale deployment in operational settings.

To bridge the gap between theoretical advancements and real-world implementation, this work emphasizes the importance of intelligent, adaptive, and real-time fault detection frameworks tailored to EV-integrated environments.

By synthesizing advancements across power systems, machine learning, and smart grid technologies, this paper underscores the importance of a multidisciplinary approach to developing next-generation fault detection systems. Such systems are essential not only for ensuring grid stability and operational safety but also for enabling the sustainable growth of EV infrastructure in modern electric power distribution networks.

This review highlights a critical research imperative: the need for real-time, scalable, and resilient detection mechanisms that integrate intelligent computation with robust communication infrastructure. Specifically, future research should converge on three pillars: (1) data-driven adaptive algorithms, (2) interoperable communication systems for real-time data exchange, and (3) coordinated control architectures capable of distinguishing fault-induced anomalies from benign EV-related fluctuations.

In conclusion, this review identifies both technological promise and practical gaps in the pursuit of EV-aware fault detection. Realizing robust protection frameworks will require interdisciplinary innovation across signal processing, data science, power systems engineering, and regulatory policy. As EV adoption accelerates, the development of real-time, intelligent detection systems becomes not only a technical challenge but a strategic imperative for resilient and sustainable energy infrastructure.

## REFERENCES

- [1] F. Rossi, C. Diaz-Londono, Y. Li, C. Zou, and G. Grusso, "Smart electric vehicle charging algorithm to reduce the impact on power grids: a reinforcement learning based methodology," *IEEE Open Journal of Vehicular Technology*, 2025.
- [2] J. Bergner, N. Orth, and V. Quaschnig, "How much does the sun power your ev? simulation study on wallbox efficiency," *PV-Symposium Proceedings*, vol. 2, Nov. 2025. [Online]. Available: <https://www.tib-op.org/ojs/index.php/pv-symposium/article/view/2650>
- [3] A. Fathy *et al.*, "Analysis of multidimensional impacts of electric vehicles penetration," *Scientific Reports*, vol. 14, no. 1, pp. 1–16, 2024. [Online]. Available: <https://www.nature.com/articles/s41598-024-77662-6>
- [4] D. Vázquez-Cardona, S. D. Saldarriaga-Zuluaga, S. Bustamante-Mesa, J. M. López-Lezama, and N. Muñoz-Galeano, "Impacts of electric vehicle penetration on the frequency stability of curaçao's power network," *World Electric Vehicle Journal*, vol. 16, no. 5, p. 264, 2025.
- [5] S. Painuli, D. Khandelwal, S. Bhowmick, and R. Saha, "Effects of residential ev charging on power distribution networks and their mitigation by optimal allocation of wind-based dg resources," *Electric Power Systems Research*, vol. 241, p. 111395, 2025.
- [6] Y. Li and A. Jenn, "Impact of electric vehicle charging demand on power distribution grid congestion," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 121, no. 18, p. e2317599121, 2024.
- [7] T. Unterluggauer, J. Rich, P. B. Andersen, and S. Hashemi, "Electric vehicle charging infrastructure planning for integrated transportation and power distribution networks: A review," *ETransportation*, vol. 12, p. 100163, 2022.
- [8] A. Mohammed, O. Saif, M. Abo-Adma, A. Fahmy, and R. Elazab, "Strategies and sustainability in fast charging station deployment for electric vehicles," *Scientific reports*, vol. 14, no. 1, p. 283, 2024.
- [9] V. Sawant and P. Zambare, "Dc fast charging stations for electric vehicles: A review," *Energy Conversion and Economics*, vol. 5, no. 1, pp. 54–71, 2024.
- [10] J. Suvvala, C. Dhananjayulu, H. Kotb, A. Elrashidi *et al.*, "Integration of renewable energy sources using multiport converters for ultra-fast charging stations for electric vehicles: An overview," *Heliyon*, 2024.
- [11] M. D. Hraiz and J. A. M. García, "Harmonics emissions and power system grid resilience in electric vehicle charging," in *Power Quality - New Insights*, M. M. Azizan, Ed. London: IntechOpen, 2024, ch. 4. [Online]. Available: <https://doi.org/10.5772/intechopen.1004261>
- [12] N. N. Omar and M. A. Saleh, "Power to the people: Advancing resilient and sustainable decentralized energy distribution systems," in *Proceedings of London International Conferences*, no. 11, 2024, pp. 125–139.
- [13] J. I. D. Cisneros-Saldana, S. Samal, M. M. Begovic, and S. R. Samantaray, "On protection schemes for ac microgrids: challenges and opportunities," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 60, no. 3, pp. 4843–4854, 2024.
- [14] J. C. da Silva, G. N. Lopes, L. H. Trondoli, and J. C. M. Vieira, "Analysis of the negative sequence voltage to detect conductor break in distribution systems," in *2021 IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM)*. IEEE, 2021, pp. 01–05.
- [15] M. de Ávila Dilli, H. Manduca Araújo do Nascimento, and J. Caparrós da Silva, "Conductor break detection in distribution system through negative sequence voltage," *Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones*, vol. 42, no. 3, pp. 31–44, 2021.
- [16] M. D. Ávila Dilli, "Detecção do rompimento de condutores em sistemas elétricos de potência através da tensão de sequência negativa," Palmas, Brasil, 2021, acesso em: 26 mar. 2026. [Online]. Available: <https://repositorio.uft.edu.br/handle/11612/4035>
- [17] M. Yousuf, G. A. Hafeez, M. Hanif, K. Aslam, S. H. Ali, I. Khan, H. M. Farooq, and M. B. Rasheed, "Identification of broken conductor faults in interconnected transmission systems based on discrete wavelet transform," *PLoS One*, vol. 18, no. 12, p. e0287555, 2023. [Online]. Available: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC10786394/>
- [18] S. A. Finecomess, G. Gebresenbet, W. Y. Zada, Y. Mulugeta, and A. Addisie, "Optimization of vehicle-to-grid, grid-to-vehicle, and vehicle-to-everything systems using artificial bee colony optimization," *Energies*, vol. 18, no. 8, p. 2046, 2025.
- [19] D. Sarathkumar, J. Sajin, B. Parrthipan, T. Jayakumar, J. Sivadasan, and P. Maheswari, "Grid-to-vehicle (g2v) and vehicle-to-grid (v2g) in hybrid ac/dc microgrids," in *2025 IEEE International Students' Conference on Electrical, Electronics and Computer Science (SCEECS)*. IEEE, 2025, pp. 1–6.
- [20] N. Narendramudra, D. Harikumar, and T. Rajeev, "A power flow control unit for vehicle-to-grid (v2g) and grid-to-vehicle (g2v) modes of electric vehicles," in *2025 Fourth International Conference on Power, Control and Computing Technologies (ICPC2T)*. IEEE, 2025, pp. 1–6.
- [21] K. Kanchana, T. Murali Krishna, T. Yuvaraj, and T. Sudhakar Babu, "Enhancing smart microgrid resilience under natural disaster conditions: Virtual power plant allocation using the jellyfish search algorithm," *Sustainability (2071-1050)*, vol. 17, no. 3, 2025.
- [22] D. Vatsal, K. C. Sharma, and V. Sharma, "Fast frequency response scheduling considering electric vehicles and renewable generation," in *2024 IEEE 4th International Conference on Sustainable Energy and Future Electric Transportation (SEFET)*. IEEE, 2024, pp. 1–6.
- [23] S. S. Kamble and A. M. Mulla, "Effects of ev battery charger on power quality," in *Renewable Resources and Energy Management*. CRC Press, 2023, pp. 378–384.
- [24] H. Jiang, H. Xu, Q. Liu, L. Ma, and J. Song, "An urban planning perspective on enhancing electric vehicle (ev) adoption: Evidence from beijing," *Travel Behaviour and Society*, vol. 34, p. 100712, 2024.
- [25] S. Y. He, Y.-H. Kuo, and K. K. Sun, "The spatial planning of public electric vehicle charging infrastructure in a high-density city using a contextualised location-allocation model," *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, vol. 160, pp. 21–44, 2022.
- [26] T. Hawsawi, A. Barnawi, and M. Zohdy, "Advance estimation techniques for ev charging and lifespan prediction: A review," *International Journal of Scientific Engineering and Science*, vol. 9, pp. 187–199, 2025.
- [27] A. Alshammari, "Comprehensive analysis of foreign object detection techniques for safe electric vehicle charging," *Metallurgical and Materials Engineering*, vol. 31, no. 4, pp. 705–717, 2025.
- [28] J. Leijon, "Charging strategies and battery ageing for electric vehicles: A review," *Energy Strategy Reviews*, vol. 57, p. 101641, 2025.
- [29] N. Adina, "Comprehensive power management in dc microgrids utilizing flexible dc energy router," Ph.D. dissertation, The Ohio State University, 2025.
- [30] M. Amir, I. A. Saifi, M. Waseem, and M. Tariq, "A critical review of compensation converters for capacitive power transfer in wireless electric vehicle charging circuit topologies," *Green Energy and Intelligent Transportation*, vol. 4, no. 2, p. 100196, 2025.
- [31] S. A. Hosseini, B. Taheri, S. H. H. Sadeghi, and A. Nasiri, "A deep learning model for fault detection in distribution networks with high penetration of electric vehicle chargers," *e-Prime - Advances in Electrical Engineering, Electronics and Energy*, vol. 10, p. 100845, 2024. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2772671124004248>
- [32] M. Nait-Said and Y. Khediri, "A comprehensive review on open conductor fault detection methods in distribution networks," *Electric Power Systems Research*, vol. 199, p. 107379, 2021.
- [33] J. Park and K. Lee, "Comprehensive survey on broken conductor faults in overhead lines," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 35, no. 6, pp. 2674–2685, 2020.
- [34] M. Salman and M. Tariq, "An overview of protection strategies against broken conductor faults in modern grids," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 23 412–23 425, 2022.
- [35] L. Shi and Z. He, "Detection of low-current faults in distribution lines using advanced signal metrics," *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 14, no. 1, pp. 557–568, 2023.
- [36] A. G. Al-Baghdadi, M. K. Abd, and F. M. F. Flaih, "A new detection method for load side broken conductor fault based on negative to positive current sequence," *Electronics*, vol. 11, no. 6, 2022. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2079-9292/11/6/836>

- [37] S. Chaudhuri and A. Ghosh, "Safety and reliability risks associated with open conductor faults in distribution systems," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 126, p. 106540, 2021.
- [38] A. Al-Baghdadi, M. Abd, and F. Flaih, "An unbalance three phase currents detection technique for load side broken conductor fault in the iraqi distribution system," *Engineering and Technology Journal*, vol. 41, no. 2, pp. 418–434, 2023. [Online]. Available: [https://etj.uotechnology.edu.iq/article\\_176622.html](https://etj.uotechnology.edu.iq/article_176622.html)
- [39] R. Pal, R. C. Tripathi, K. Choudhary, and S. Shukla, "Identification of broken conductor faults in interconnected transmission systems based on discrete wavelet transform," *Sensors*, vol. 24, no. 1, p. 141, 2024.
- [40] M. A. Elghariani and S. Brahma, "Detection and experimental investigation of open conductor and high impedance faults in distribution systems," *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, vol. 135, p. 107591, 2022.
- [41] J. Wang and Y. Zhang, "An overview of fault detection techniques in modern distribution systems," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 136458–136471, 2021.
- [42] A. Ahmad, A. Shah, and N. Parveen, "Electric vehicle integration's impacts on power quality in distribution networks," *Journal of Electrical and Applied Systems*, 2023. [Online]. Available: <https://jeas.springeropen.com/articles/10.1186/s44147-023-00193-w>
- [43] A. Ahmad and A. Shah, "Analysis of multidimensional impacts of electric vehicles penetration in distribution networks," *Scientific Reports*, 2024. [Online]. Available: <https://www.nature.com/articles/s41598-024-77662-6>
- [44] Z. Jing, Z. Jiang, and X. Ma, "An adaptive control strategy for electric vehicle charging coordination to mitigate grid impacts," *Energy Reports*, 2023. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S2352152X23020698>
- [45] J. Yong, "Electric vehicle integration into distribution systems: Considerations and challenges," Ph.D. dissertation, HAL Archives Ouvertes, 2021. [Online]. Available: <https://theses.hal.science/tel-03338497v1>
- [46] J. Salpakari and P. Lund, "Flexibility from electric vehicles in future smart grids," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2021. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1364032121003488>
- [47] Z. Xu, Y. Li, and X. Zhang, "Impact of electric vehicle charging on power grid stability and fault detection," *ScienceDirect*, vol. 13, pp. 2024–2045, 2024. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2772671124004248>
- [48] B. Hungbo and A. Smith, "Impact of electric vehicles on low-voltage residential distribution networks: a probabilistic analysis," *IET Smart Grid*, vol. 6, no. 2, p. 110–118, 2023.
- [49] A. Farokhi Soofi and M. Rezaei, "Analyzing power quality implications of high level charging rates of electric vehicle within distribution networks," *arXiv preprint arXiv:2103.00956*, 2021. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/2103.00956>
- [50] N. Zhang, "The interaction of electromobility with the power grids," *CIGRE Electra*, 2022.
- [51] F. Zhou and H. Li, "Analysis of the effects of grid-connected charging/discharging stations on relay protection," *Energies*, vol. 15, no. 2, p. 528, 2022. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/1996-1073/15/2/528>
- [52] I. Mogos and S. Grillo, "Impact of ev charging stations in power grids in italy and its mitigation mechanisms," *arXiv preprint arXiv:2110.09788*, 2021. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/2110.09788>
- [53] L. Zhang, H. Wu, and Z. Wang, "Spatiotemporal feature fusion for fault detection in ev charging infrastructure," *Frontiers in Electronics*, vol. 4, p. 1490939, 2024. [Online]. Available: <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/felec.2024.1490939/full>
- [54] A. A. Ismail, N. T. Mbungu, A. Elnady, R. C. Bansal, A.-K. Hamid, and M. AlShabi, "Impact of electric vehicles on smart grid and future predictions: a survey," *International Journal of Modelling and Simulation*, vol. 43, no. 6, pp. 1041–1057, 2023.
- [55] R. Rana, T. Saggi, S. Sudha Letha, and F. Bakhsh, "V2g based bidirectional ev charger topologies and its control techniques: a review," *Discover Applied Sciences*, vol. 6, 11 2024.
- [56] Y. Fang, J. Tang, and S. Zhou, "A generative adversarial network-based method for ev battery fault diagnosis," *Electronics*, vol. 13, no. 16, p. 3131, 2024. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2079-9292/13/16/3131>
- [57] Y. Wang and Q. Chen, "Fault detection for power batteries using a generative adversarial network," *Applied Sciences*, vol. 13, no. 3, p. 1505, 2023. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2076-3417/13/3/1505>
- [58] K. N. Hasan, K. M. Muttaqi, P. Borboa, J. Scira, Z. Zhang, and M. Leishman, "Distribution network voltage analysis with data-driven electric vehicle load profiles," *Sustainable Energy, Grids and Networks*, vol. 36, p. 101216, 2023.
- [59] I. Mahmud, M. B. Medha, and M. Hasanuzzaman, "Global challenges of electric vehicle charging systems and its future prospects: A review," *Research in Transportation Business & Management*, vol. 49, p. 101011, 2023.
- [60] A. Srivastava, M. Manas, and R. K. Dubey, "Electric vehicle integration's impacts on power quality in distribution network and associated mitigation measures: a review," *Journal of Engineering and Applied Science*, vol. 70, no. 1, p. 32, 2023.
- [61] A. Dobrzycki, L. Kasprzyk, M. S. Çetin, and M. T. Gençoğlu, "Analysis of the influence of the charging process of an electrical vehicle on voltage distortions in the electrical installation," *Applied Sciences*, vol. 14, no. 17, p. 7691, 2024.
- [62] T. Slangen, "Preventing power quality issues caused by electric vehicle charging," *ElaadNL*, 2023. [Online]. Available: <https://elaad.nl/en/preventing-power-quality-issues-caused-by-electric-vehicle-charging/>
- [63] J. B. Bernal-Vargas, J. C. Castro-Galeano, E. E. Tibaduiza-Rincón, J. M. López-Lezama, and N. Muñoz-Galeano, "Prospective analysis of massive integration of electric vehicle chargers and their impact on power quality in distribution networks," *World Electric Vehicle Journal*, vol. 14, no. 12, p. 324, 2023.
- [64] C. D. Z. R. Sergio D. Saldarriaga-Zuluaga, Jesús M. López-Lezama and A. V. Jaramillo, "Effects of the incorporation of electric vehicles on protection systems in distribution networks," *World Electric Vehicle Journal*, vol. 13, no. 9, p. 163, 2022. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2032-6653/13/9/163>
- [65] R. T. Aiswarya R., Divya S. Nair and V. V., "A novel svm based adaptive scheme for accurate fault identification in microgrids," *Electric Power Systems Research*, vol. 212, p. 108456, 2023. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0378779623003280>
- [66] M. Tavooosi, B. Fani, M. Delshad, and I. Sadeghkhan, "A charger current-limiting scheme to improve protection coordination of electric vehicle-integrated distribution systems," *International Transactions on Electrical Energy Systems*, vol. 2024, no. 1, p. 5546037, 2024.
- [67] J. Liu, Y. Wang, and T. Li, "New approaches to fault detection in distribution grids with high ev penetration," *ScienceDirect*, vol. 12, no. 8, pp. 215–228, 2023. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S2352152X23020698>
- [68] J. Ospina, A. Newaz, and M. O. Faruque, "Forecasting of pv plant output using hybrid wavelet-based lstm-dnn structure model," *IET Renewable Power Generation*, vol. 13, no. 7, pp. 1087–1095, 2019.
- [69] M. Khalil, "High-impedance fault detection using machine learning-enhanced signal processing techniques," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 39, pp. 654–666, 2024.
- [70] A. Kamoona, J. Wen, and C. K. I. Williams, "Ev charging detection using an unsupervised memory-based transformer model," *arXiv preprint*, 2024. [Online]. Available: <https://arxiv.org/pdf/2408.11828>
- [71] T. Nguyen, H. Chen, and Y. Yoon, "Str-gnn: A spatial-temporal recurrent graph neural network for fault detection in distribution systems," *arXiv preprint*, 2022. [Online]. Available: <https://arxiv.org/pdf/2210.15177>
- [72] M. Gao and D. Lin, "Fault diagnosis in dc charging points using deep belief networks," *World Electric Vehicle Journal*, vol. 12, no. 1, p. 47, 2021. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2032-6653/12/1/47>

- [73] X. Zhang and R. Zhou, "Comparative analysis of machine learning models for coordinated ev charging," *Energies*, vol. 13, no. 20, p. 5429, 2024. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/1996-1073/13/20/5429>
- [74] J. Izquierdo Gómez, M. Blanco, and R. Ferrero, "Data-driven thermal fault diagnosis in ev chargers using neural networks," *arXiv preprint*, 2022. [Online]. Available: <https://arxiv.org/pdf/2207.05431>
- [75] I. Nutkani, H. Toole, N. Fernando, and L. P. C. Andrew, "Impact of ev charging on electrical distribution network and mitigating solutions – a review," *IET Smart Grid*, vol. 8, pp. 234–246, 2024. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1049/stg2.12156>
- [76] C. Panigrahi and R. Mohanty, "Integration challenges of evs into distribution systems: A review," *Sustainable Energy, Grids and Networks*, vol. 30, p. 100600, 2022.
- [77] R. Hosseini, H. Mokhtari, and M. Fotuhi-Firuzabad, "Deep learning-based protection scheme for ev-integrated distribution networks," *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 149, p. 109311, 2024. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2023.109311>
- [78] S. Sahoo and P. Rani, "Electric vehicle integration and its effects on power quality and protection in distribution systems," *IEEE Access*, vol. 11, pp. 8456–8470, 2023.
- [79] S. P. Tiwari, "A dependable protection scheme for electrical vehicle integrated microgrid considering stressed fault scenarios and dissimilar fault inceptions," *Iranian Journal of Electrical & Electronic Engineering*, vol. 20, no. 1, 2024.
- [80] K. Naik and M. Sharma, "Smart protection approaches for microgrids with electric vehicle penetration: A survey," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 180, p. 113265, 2023.
- [81] V. T. Kesavan, M. J. Hossen, R. Gopi, R. Balasubramanian, M. M. Rahman, and M. Kavitha, "Anomaly detection with grid sentinel framework for electric vehicle charging stations in a smart grid environment," *Scientific Reports*, vol. 15, p. 15774, 2025. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/s41598-025-00400-z>
- [82] K. H. Mohd Azmi, N. A. Mohamed Radzi, N. A. Azhar, F. S. Samidi, I. Thaqifah Zulkifli, and A. M. Zainal, "Active electric distribution network: Applications, challenges, and opportunities," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 134 655–134 689, 2022.
- [83] A. Singh and A. Kumar, "Cyber-physical challenges in ev-integrated smart grids: A review," *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*, vol. 10, no. 3, pp. 625–638, 2022.
- [84] S. F. Stefanon, L. O. Seman, G. Singh, and K.-C. Yow, "Enhanced insulator fault detection using optimized ensemble of deep learning models based on weighted boxes fusion," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 168, p. 110682, 2025. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142061525002339>
- [85] M. Rahman and M. Hossain, "An ensemble learning framework for fault detection in active distribution networks," *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 12, no. 2, pp. 1201–1211, 2021.
- [86] A. Bhosale and A. Chauhan, "The role of ict in smart grid protection and monitoring with high ev penetration," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 144, p. 108628, 2023.





# 2026

## Volume 7 Issue 1

Support