

Reprodução de Resultados da Literatura e Contribuições Pedagógicas: Problema de Coloração de Vértices segundo o Teorema de Brooks

Reproduction of Results from the Literature and Pedagogical Contributions: The Vertex Coloring Problem according to Brooks' Theorem

Matheus Silva Pontes¹, Lucas Monteiro de Carvalho¹, Daniel Martins da Silva¹ e Tanilson Dias dos Santos¹

¹ Universidade Federal do Tocantins, Ciência da Computação, Tocantins, Brasil

Data de recebimento do manuscrito: 03/12/2025

Data de aceitação do manuscrito: 19/01/2026

Data de publicação: 10/02/2026

Resumo—Este estudo reproduz uma prova final do Teorema de Brooks, um dos resultados fundamentais para a Coloração de Grafos, visando não apenas à consolidação do conhecimento teórico, mas também para a produção de um material didático de apoio para a comunidade acadêmica, traduzindo a complexidade da prova por meio de exemplos ilustrativos, figuras e explicações detalhadas. O teorema estabelece um limite superior para o número cromático $\chi(G)$ de qualquer grafo conexo com o seu grau máximo $\Delta(G)$, tal que o grafo analisado não seja um ciclo ímpar e nem um grafo completo. A metodologia utilizada foi a prova por contradição, assumindo um contraexemplo minimal, integrada com duas técnicas cruciais, juntamente com ilustrações para facilitar o ensino. A prova é iniciada com o Lema Estrutural de Lovász, o qual é aplicado para resolver o caso dos grafos Δ -regulares e não completos. E também, a utilização da justificativa de Cadeias de Kempe permite demonstrar que a falha estrutural da coloração só é possível em casos excepcionais onde o grafo é completo ou um ciclo ímpar. O resultado é a confirmação de $\chi(G) \leq \Delta(G)$ para todo grafo conexo, exceto os casos proibidos.

Palavras-chave—Teoria dos Grafos, Coloração de Grafos, Teorema de Brooks, Número Cromático

Abstract—This study reproduces a complete proof of Brooks' Theorem, one of the fundamental results in Graph Coloring. The aim is not only to consolidate theoretical knowledge but also to produce didactic support material for the academic community, translating the complexity of the proof through illustrative examples, figures, and detailed explanations. The theorem establishes an upper bound for the chromatic number $\chi(G)$ of any connected graph with its maximum degree $\Delta(G)$, such that the analyzed graph is neither an odd cycle nor a complete graph. The methodology employed is proof by contradiction, assuming a minimal counterexample, integrated with two crucial techniques, along with illustrations to facilitate teaching. The proof begins with Lovász's Structural Lemma, which is applied to resolve the case of Δ -regular and non-complete graphs. Furthermore, the use of Kempe Chains justification allows us to demonstrate that the structural failure of the coloring is only possible in exceptional cases where the graph is complete or an odd cycle. The result is the confirmation that $\chi(G) \leq \Delta(G)$ for every connected graph, except for the forbidden cases.

Keywords—Graph Theory, Graph Coloring, Brooks' Theorem, Chromatic Number

I. INTRODUÇÃO

A Teoria dos Grafos possui destaque e importância pela grande variedade de problemas. O interesse principal deste campo é resolver os problemas utilizando algoritmos eficientes, preocupando-se com a capacidade computacional. A busca por soluções eficientes move esta área para que

ainda seja investigada através de conhecimentos teóricos aprofundados sobre grafos [1].

A coloração de grafos se trata de um caso especial o qual atribuímos rótulos, que são as cores. Elas estão sujeitas a restrições e podem ser aplicadas em vértices e arestas, de forma que os vértices e as arestas adjacentes não possuam a mesma cor [2]. Inicialmente, esta ideia despertou no homem o desejo de buscar novas maneiras de expressar diferentes tipos de regiões. O registro de desenhos e escritas gráficas com a inserção de cores nos mapas originou a cartografia [3].

Em 1852, por meio da coloração dos mapas, se deu início à

história do problema das 4 cores. O matemático, advogado e botânico Francis Guthrie formulou uma conjectura afirmando que qualquer mapa pode ser colorido utilizando apenas 4 cores. Francis apresentou este problema para seu irmão mais novo, Frederick Guthrie, que mostrou para o seu professor De Morgan. O docente, entusiasmado, encaminhou este problema em suas cartas, despertando o interesse dos acadêmicos. Esta ideia propagou-se, impulsionando discussões e novos desenvolvimentos [4]. Em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken conseguiram apresentar a demonstração do Teorema das 4 Cores com o auxílio de computadores [3].

Os conceitos e problemas desenvolvidos na coloração de grafos, como o Teorema das 4 Cores e a coloração de vértices e arestas, foram fundamentais para a resolução de problemas reais e de jogos. Entre as aplicações de destaque estão a divisão de terras [3], a organização da grade de horários, a solução de um *sudoku* utilizando um algoritmo guloso de coloração de vértices e o transporte de produtos reagentes [2].

Acerca deste caso, este artigo visa reproduzir resultados da literatura e oferecer uma contribuição pedagógica da demonstração do Teorema de Brooks. O teorema estabelece um limite superior do número cromático $\chi(G)$ em função do grau máximo $\Delta(G)$ do grafo. Dessa forma, busca-se apresentar explicações mais claras e sustentadas com exemplos e figuras ilustrativas. Assim, este material servirá como um conteúdo pedagógico de apoio para a comunidade acadêmica.

Quanto à organização deste estudo, a seção II estabelece os conceitos básicos sobre grafos e coloração, essenciais para a compreensão do Teorema de Brooks acompanhados de exemplos detalhados. A seção III expõe as fontes pedagógicas e técnicas que apresentam propostas alinhadas à deste trabalho.

Em seguida, a seção IV descreve o Teorema de Brooks detalhadamente sobre os problemas lúdicos relacionados, suas aplicações e complexidades. A seção V inicia a exposição de sua prova com a apresentação de dois lemas, Lema Estrutural de Lovász e Cadeias de Kempe. Essas técnicas são fundamentais para o desenvolvimento do argumento.

Posteriormente, a seção VI destaca as considerações relevantes sobre o teorema, adversidades encontradas durante a escrita deste artigo, soluções para contornar os desafios e destaques deste estudo para o meio acadêmico. Por fim, a seção VII realiza uma síntese dos principais aspectos, acompanhada de sugestões de melhorias dos resultados obtidos, extensões de trabalhos futuros e temas relacionados não explorados em profundidade.

É de suma importância ressaltar que os grafos utilizados para as definições e provas neste material serão finitos e simples. Nessa perspectiva, a seção seguinte apresenta as noções básicas sobre grafos e coloração necessárias para a apresentação do problema.

II. PRELIMINARES

Nesta seção, os conceitos fundamentais sobre os grafos serão introduzidos e utilizados neste trabalho, os quais foram utilizados como base o livro pedagógico do Jayme [1]. A terminologia e as notações serão apresentadas posteriormente nos problemas.

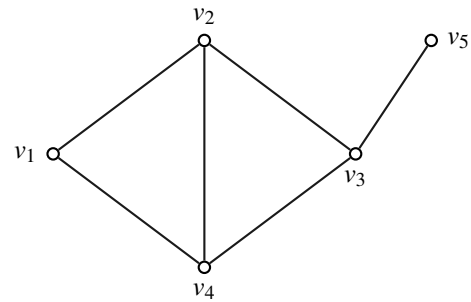


Figura 1: Representação do grafo G_1 .

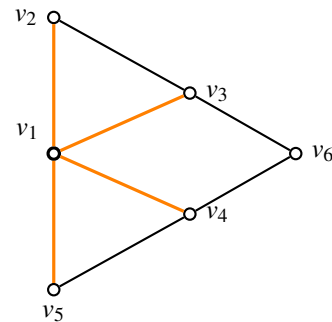


Figura 2: Ilustração da vizinhança $N(v_1)$ e do grau máximo $\Delta(G)$.

Um grafo $G = (V, E)$ consiste em um conjunto finito não vazio de V e um conjunto E de pares ordenados distintos de V . Os elementos de V são os *vértices* e os de E são as *arestas* de um grafo. Cada aresta $e \in E$ é denotada por um par de vértices (v, w) , onde v e w são os extremos da aresta e e são ditas adjacentes. É dito que a aresta e é incidente aos vértices v e w .

Um conjunto de vértices de um grafo é denotado por $V(G)$, e um conjunto de arestas de um grafo é denotado por $E(G)$. A Figura 1 ilustra um grafo $G_1 = (V, E)$, tal que $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E(G_1) = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_2), (v_4, v_1), (v_3, v_5), (v_2, v_3)\}$.

A *vizinhança* de um vértice $v \in V$, denotada por $N(v)$, é definida como o conjunto de vértices adjacentes a v . O grau de v , representado por $d(v)$, corresponde à cardinalidade $|N(v)|$. O *grau máximo* de G , denotado por $\Delta(G)$, é o maior valor de grau encontrado entre todos os vértices de V . Esses conceitos podem ser visualizados na Figura 2. Como exemplo, considere a análise do vértice v_1 . Sua vizinhança é dada por $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, de modo que seu grau é $d(v_1) = |N(v_1)| = 4$. Ao observar os demais vértices do grafo, obtemos, por exemplo, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 3$, entre outros. Como $d(v_1) = 4$ é o maior grau entre todos os vértices, concluímos que o grau máximo é $\Delta(G) = 4$.

Dizemos que um grafo G é *conexo* se existir um caminho entre quaisquer dois vértices, como exemplificado no grafo à esquerda da Figura 3. Em contrapartida, um vértice v é denominado *vértice de corte* quando a sua remoção torna G desconexo. Este caso é ilustrado na Figura 3 onde o grafo da direita mostra um vértice de corte v_3 .

Um *ciclo* C_n é um caminho v_1, \dots, v_k, v_{k+1} tal que $v_k = v_{k+1}$ e $k \geq 3$. Em um grafo não direcionado, todo ciclo deve possuir no mínimo 3 vértices. Se o caminho for denominado simples, o ciclo também é simples. Um ciclo simples é um ciclo onde o caminho inicia e termina no mesmo vértice [1]. Um ciclo par é aquele que possui número par de vértices e arestas, enquanto um ciclo ímpar possui número ímpar de arestas e vértices. A

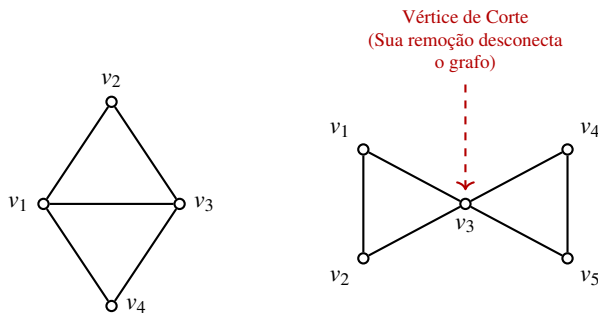


Figura 3: Esquerda: Exemplo de grafo conexo. Direita: O grafo G_3 com vértice de corte v_3 .

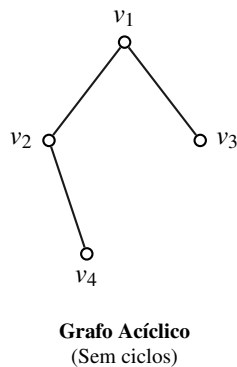
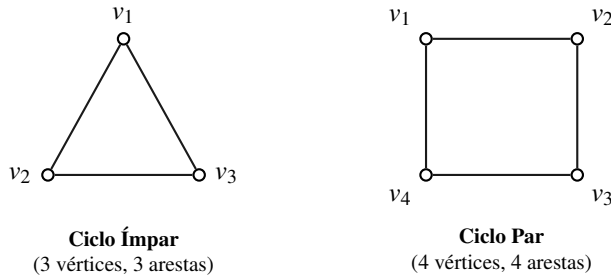


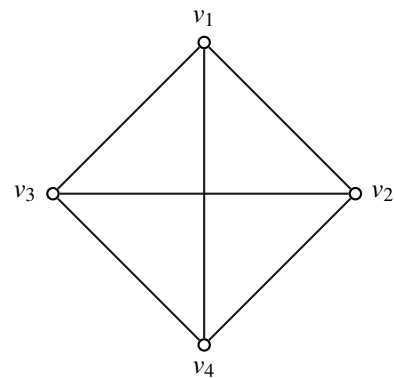
Figura 4: Exemplos de ciclos e um grafo acíclico.

Figura 4 ilustra um exemplo de ciclo par com 4 vértices e um ciclo ímpar com 3 vértices. Um grafo que não possui ciclos é chamado de grafo acíclico, o qual está exemplificado na Figura 4.

Um grafo é dito *completo* quando cada par de vértices é conectado por uma única aresta. É utilizada uma notação K_n para designar um grafo completo com n vértices. A Figura 5 mostra um grafo completo K_4 , e cada vértice é ligado por uma única aresta com todos os outros vértices.

Uma k -coloração (*própria*) de G é uma função $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta $\{u, v\} \in E$. Observe que uma k -coloração de vértices de um grafo é a atribuição de k cores aos seus vértices de forma que quaisquer dois vértices adjacentes (conectados por uma aresta) recebam cores diferentes [1], podemos observar isso na Figura 6.

O *número cromático* de um grafo G , denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro k o qual G admite uma k -coloração [1]. Então, o número cromático de um grafo é o menor número de cores necessárias para colorir todos os seus vértices de forma que nenhum par de vértices adjacentes tenham a mesma cor. Este conceito é ilustrado na Figura 7, com um grafo que tem o número cromático igual a 4.



Grafo Completo K_4
(4 vértices, 6 arestas)

Figura 5: Exemplo de um Grafo Completo K_4 .

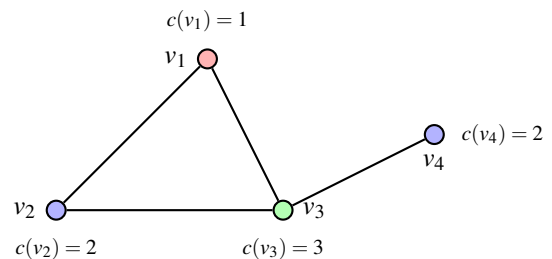


Figura 6: Uma 3-coloração própria válida para o grafo G_{col} .

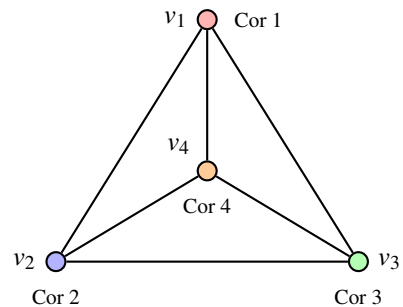


Figura 7: Grafo com número cromático igual a 4.

III. TRABALHOS RELACIONADOS

Vale destacar os trabalhos relacionados com o mesmo tema e problema deste estudo. Dentre eles, o artigo de Cranston e Rabern [5] apresenta diferentes demonstrações do Teorema de Brooks. O objetivo é ilustrar as técnicas principais da coloração de grafos, como coloração gulosa, cadeia de Kempe, lema de Kernel e *hitting sets*, com o intuito de torná-las acessíveis. Para isso, os autores desejaram mostrar as suas provas favoritas. Cada tópico das provas é apresentado em ordem de complexidade, cada um é autocontido e pode ser lido em qualquer ordem. Este trabalho será utilizado como base para a demonstração do Teorema de Brooks neste estudo.

Além disso, Sajith e Saxena [6] demonstram duas provas do Teorema de Brooks. A primeira prova é feita modificando a prova de Melnikov e Vizing [7] e de Wilson [8] que provam por contradição, porém é alterada para ser construtiva e resultar em um algoritmo de tempo linear. E a segunda prova combina com os elementos das demonstrações de Zając [9] e do Bondy [10, 11], garantindo uma prova mais simples e resultando também em um algoritmo de tempo linear. Os

autores, Sajith e Saxena, consideram essas provas mais fáceis de serem ensinadas em aulas de Ciência da Computação.

Amiroch et al. [12] projetam um novo método para criação de cardápios alimentícios utilizando a coloração de vértices. Eles combinaram o algoritmo de Welsh-Powell [13] com uma técnica de combinação matemática a qual gera uma diversidade de cardápios que seguem diretrizes de baixa caloria. Para comprovar a eficácia da abordagem, simularam de forma dinâmica com a ferramenta MatLab para criarem três cardápios distintos com necessidades nutricionais específicas. Adicionalmente, para a organização e diversificação de cardápios nutricionalmente balanceados, empregam o conceito de caminhos disjuntos de grafos. Este estudo tem destaque pela solução de lidar com problemas em planejamento alimentar e pelo fornecimento de informações importantes para trabalhos futuros.

F. Radmehr et al. [14] focam em utilizar uma abordagem baseada em investigação para explorar o ensino e a aprendizagem sobre coloração de vértices para os alunos de graduação em matemática. Para isso, desenvolveram sete tarefas baseadas em investigação para ensinar o tema para os alunos e buscam descrever o engajamento deles. Como resultado, os discentes se entretiveram bastante com as tarefas e perceberam o quão importante essas práticas podem ser para o desenvolvimento de conhecimentos conceituais sobre matemática. Os autores promovem que essas tarefas sejam empregadas em cursos de matemática discreta de graduação para aprimorar o conhecimento matemático.

Rajagaspar e Senthil [15] buscam divulgar a ideia inicial sobre grafos e coloração de vértices. Eles investigam como a coloração de vértices pode ser usada para modelar problemas práticos, como escalonamento de horários, alocação de recursos, *networking* e mineração de dados.

Cabe mencionar o artigo de Yasser e Bianchini [16] como referência para contribuição pedagógica. Este fator é essencial para a escrita deste trabalho, dado que buscamos tornar este material acessível para a comunidade acadêmica que deseja entender sobre o Teorema de Brooks e se aprofundar na coloração de grafos.

Partindo disso, segue na próxima seção o detalhamento do problema, descrevendo o seu tipo, complexidade, problemas lúdicos relacionados, o contexto em que se enquadra, utilizando exemplos ilustrativos com explicações.

IV. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

A coloração de grafos possui uma ampla variedade de aplicações práticas em diferentes áreas. Um exemplo clássico é a coloração de mapas, em que regiões adjacentes devem receber cores distintas [17]. Além desse caso bem conhecido, problemas de coloração em vértices surgem em diversas situações reais, como na alocação de frequências em redes de comunicação, onde transmissores próximos não podem operar na mesma frequência, e no escalonamento de tarefas que não podem ocorrer simultaneamente [18]. Outro uso importante aparece em compiladores [19], durante a etapa de alocação de registradores, e em sistemas de horários acadêmicos, garantindo que disciplinas que compartilham alunos não sejam ofertadas no mesmo período [13]. Além disso, é aplicado em problemas lúdicos como a resolução do *sudoku*, que pode ser modelado como um problema de

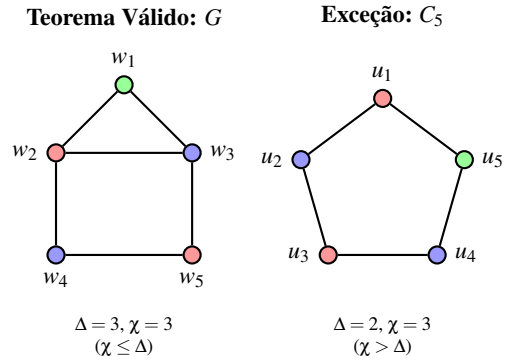


Figura 8: Visualização do Teorema de Brooks: Uma exceção (ciclo ímpar) e um caso válido.

coloração de grafos [20].

Neste estudo, trabalharemos com coloração de vértices formulada como um problema de decisão. Em termos gerais, quando o grafo G é completo ou ciclo ímpar satisfaz $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Porém, o Teorema de Brooks mostra que se um grafo G não é completo e nem ciclo ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$ [17]. A Figura 8 ilustra o grafo G para o qual o Teorema de Brooks é válido para sua estrutura, diferente do grafo C_5 , que é um ciclo ímpar.

O Teorema de Brooks insere-se no contexto mais amplo de resultados que buscam relacionar propriedades estruturais dos grafos (como conectividade, presença de ciclos, graus dos vértices) com sua coloração. Ele fornece um critério poderoso para limitar a complexidade cromática, com aplicações desde problemas de escalonamento (scheduling) até alocação de recursos e alocação de registradores.

Determinar o número cromático exato é considerado um problema *NP-completo* [21]. Existem muitas técnicas de coloração de vértices para provar o Teorema de Brooks que podem se estender em várias direções [5]. Neste estudo, buscamos utilizar duas técnicas para realizar a demonstração do teorema.

Assim, embora o Teorema de Brooks forneça um limite garantido de $\Delta(G)$ cores (exceto nos casos excepcionais), ele não fornece necessariamente um algoritmo polinomial para determinar se o grafo admite coloração com menos cores do que as previstas pelo limite. Em muitos cenários, algoritmos gulosos (greedy) podem se aproximar desse limite, mas não há garantias de optimalidade em geral.

V. DEMONSTRAÇÃO E CONTRIBUIÇÕES

Antes de iniciar a prova do teorema, apresentam-se dois lemas principais para a contextualização do problema: o **Lema de Lovász e Cadeias de Kempe**.

Lema 1 (Estrutura de Lovász). *Seja G um grafo 2-conexo com $\delta(G) \geq 3$. Se G não for completo, então G contém um caminho induzido de três vértices, digamos u, v, w , tal que $G \setminus \{u, w\}$ é conexo.*

Proof. Para demonstrar este lema, utilizaremos a técnica de construção. Como G é conexo e não é completo, sabemos que existe algum caminho induzido de três vértices [5]. Se G for 3-conexo, a remoção de quaisquer dois vértices (u, w) não desconecta o grafo, então qualquer caminho induzido serve.

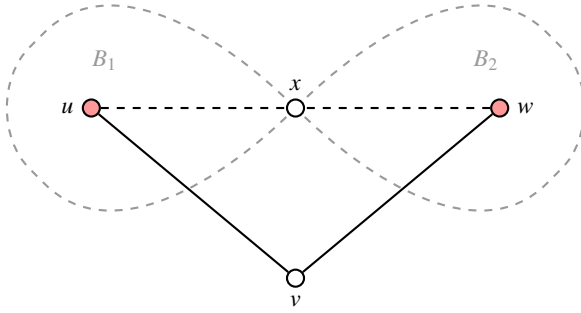


Figura 9: Visualização da estrutura: Os contornos tracejados indicam os blocos B_1 e B_2 que se encontram no vértice de articulação x .

O caso crítico ocorre quando G não é 3-conexo. Neste caso, existe um conjunto de corte de tamanho 2. Seja $\{v, x\}$ este conjunto de corte, onde v será o vértice central do nosso caminho desejado.

Considere o grafo $H = G - v$. Como $\{v, x\}$ é um corte em G , então x deve ser um vértice de corte em H (ou H é desconexo, mas como G é 2-conexo, H deve ser conexo e x é quem articula os componentes). O grafo H pode ser decomposto em seus blocos (subgrafos maximais 2-conexos). A estrutura desses blocos forma uma árvore (o "grafo de blocos"). Uma árvore com pelo menos uma aresta possui pelo menos duas folhas (blocos finais). Sejam B_1 e B_2 dois blocos finais (endblocks) de H . Pela propriedade de 2-conexidade de G : Cada bloco final de H deve conter pelo menos um vértice adjacente a v que não seja x . Se não houvesse tal vizinho, a remoção apenas de x em G desconectaria aquele bloco do resto do grafo, o que contradiz o fato de G ser 2-conexo (que exige remoção de 2 vértices para desconectar). Sejam $u \in V(B_1) \setminus \{x\}$ e $w \in V(B_2) \setminus \{x\}$ vizinhos de v (com $u, w \neq x$). O caminho $u - v - w$ é induzido (pois u e w estão em blocos diferentes separados por x , logo não há aresta direta entre eles, a menos que passem por x , mas estamos olhando vizinhança direta) podemos ver isso na figura 9. Agora verificamos a conectividade de $G' = G \setminus \{u, w\}$.

- O grafo $H = G - v$ é conexo.
- u e w não são vértices de corte em H (pois pertencem a blocos finais e não são a articulação x). Logo, $H \setminus \{u, w\}$ permanece conexo.
- Ao adicionarmos v (para formar G'), precisamos garantir que v se conecte a $H \setminus \{u, w\}$.
- Como o grau $\delta(G) \geq 3$, o vértice v tem grau pelo menos 3. Dois vizinhos são u e w . Logo, v tem pelo menos mais um vizinho (podendo ser x ou outro vértice em H). Isso garante que v não fica isolado, como visto na Figura 10.

Portanto, $G \setminus \{u, w\}$ é conexo. \square

O procedimento construtivo descrito na demonstração acima é formalizado no Algoritmo [1].

Lema 2 (Corretude do Algoritmo 1). *Seja G um grafo 2-conexo, não completo, com $\delta(G) \geq 3$. O Algoritmo 1 retorna, em tempo finito, uma tripla de vértices (u, v, w) tal que o caminho $u - v - w$ é induzido e o grafo $G' = G \setminus \{u, w\}$ é conexo.*

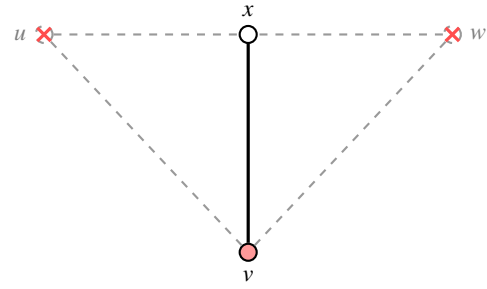


Figura 10: Conectividade de $G' = G \setminus \{u, w\}$.

Algorithm 1 Busca de Caminho Induzido com Extremidades Removíveis (Método de Lovász)

Require: Grafo 2-conexo G com $\delta(G) \geq 3$, não completo.

Ensure: Caminho induzido $u - v - w$ tal que $G \setminus \{u, w\}$ é conexo.

\triangleright Caso base trivial

- 1: **if** G é 3-conexo **then**
- 2: Encontrar qualquer caminho induzido $u - v - w$.
- 3: **return** (u, v, w)
- 4: **end if**
- 5: \triangleright Passo 1: Identificar o corte e definir o centro v
Encontrar um par de corte $\{v, x\}$ em G .
 \triangleright Nota: v será o centro do nosso caminho.
 \triangleright Passo 2: Decomposição em blocos
6: Construir $H = G - v$ e obter sua árvore de blocos-corte.
- 7: Sejam B_1 e B_2 dois blocos finais de H (separados por x).
 \triangleright Passo 3: Selecionar as pontas u e w
8: Escolher $u \in V(B_1) \setminus \{x\}$ tal que u seja vizinho de v .
- 9: Escolher $w \in V(B_2) \setminus \{x\}$ tal que w seja vizinho de v .
 \triangleright Verificação Implícita: Como u, w estão em blocos separados por x ,
 \triangleright não há aresta direta $u - w$, logo o caminho é induzido.
- 10: **return** (u, v, w)

Proof. A terminação do algoritmo é garantida, pois todas as operações (busca de componentes, identificação de blocos e cortes) são executadas em grafos finitos com complexidade polinomial. Resta demonstrar a corretude da saída em dois casos.

Caso 1: G é 3-conexo (Linhas 1-4). Pela definição de k -conectividade, a remoção de menos de k vértices não desconecta o grafo. Como $k = 3$, a remoção do conjunto $\{u, w\}$ (tamanho 2) resulta em um grafo G' conexo. Como G não é completo, existe pelo menos um caminho induzido de comprimento 2. Logo, a saída é válida.

Caso 2: G não é 3-conexo (Linhas 5-13). Neste caso, o algoritmo identifica um par de corte $\{v, x\}$. Definimos $H = G - v$. Como G é 2-conexo, H é conexo e x é um vértice de corte em H (separando os blocos finais B_1 e B_2).

- **Existência dos vértices u e w :** Pela 2-conectividade de G , cada bloco final B_i de H deve possuir pelo menos um vértice adjacente a v que não seja x . Caso contrário, $\{x\}$ seria um corte em G , contradizendo a hipótese inicial. Logo, a escolha de $u \in V(B_1) \setminus \{x\}$ e $w \in V(B_2) \setminus \{x\}$ nas linhas 9-10 é sempre possível.
- **Caminho Induzido:** Os vértices u e w pertencem a blocos distintos de H , articulados apenas por x . Como

$u \neq x$ e $w \neq x$, qualquer caminho entre u e w em H deve passar por x . Logo, não existe aresta direta (u, w) em G . Assim, o caminho $u - v - w$ é induzido.

- **Conectividade de $G' = G \setminus \{u, w\}$:** A conectividade é preservada em duas etapas:

1. *Conectividade de H :* Em uma decomposição em blocos, os vértices que não são de articulação (como u e w dentro de blocos finais) não desconectam o grafo ao serem removidos. Portanto, $H \setminus \{u, w\}$ permanece conexo.
2. *Reconexão de v :* O vértice v é readicionado para formar G' . Como $\delta(G) \geq 3$, $d(v) \geq 3$. O algoritmo remove dois vizinhos (u e w). Logo, resta pelo menos um vizinho de v em H (seja x ou outro vértice). Isso garante que v se conecta ao componente conexo restante $H \setminus \{u, w\}$.

Portanto, $G \setminus \{u, w\}$ é conexo e o algoritmo está correto. \square

Lema 3 (Cadeia de Kempe). *Em uma coloração própria de um grafo G , uma cadeia de Kempe (i, j) é uma componente conexa do subgrafo induzido pelos vértices coloridos com as cores i e j [5]. Se trocarmos as cores de i e j simultaneamente em todos os vértices dessa componente, obtemos novamente uma coloração própria de G .*

A demonstração do **Teorema de Brooks** segue a abordagem de contradição assumindo um **contraexemplo minimal** [5], combinada com duas técnicas fundamentais: a Estrutura de Lovász e as Cadeias de Kempe. Ademais, estão incluídas explicações intermediárias e observações pedagógicas para facilitar o entendimento da estrutura lógica da prova. Segue o teorema e a demonstração abaixo:

Teorema 1. *Seja G um grafo conexo. Se G não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Proof. Suponha, por contradição, que G é um contraexemplo minimal ao teorema, ou seja, G é um grafo conexo Δ -regular com o menor número de vértices tal que $\chi(G) > \Delta$ e que não é um ciclo ímpar nem um grafo completo. Como G é minimal, todo subgrafo próprio $H \subseteq G$ satisfaz $\chi(H) \leq \Delta$.

Escolha um vértice arbitrário $v \in V(G)$. Então $G - v$ é Δ -colorível. Pelo **Lema 1**, $G - v$ possui pelo menos dois blocos terminais. Sejam u e w vértices não-cortantes pertencentes a blocos terminais distintos. Além disso, considerando novamente o **Lema 1** existe um caminho induzido $u - v - w$ tal que $G - \{u, w\}$ permanece conexo. A Figura 11 ilustra a estrutura inicial do grafo para a demonstração.

Colore u e w com a mesma cor, pois são vértices não adjacentes, e então colorimos $G - \{u, w\}$ gulosamente. A ordem utilizada segue a Estrutura de Lovász: começamos a coloração a partir dos blocos terminais de $G - v$, movendo-os em direção ao vértice v . Dessa forma, cada vértice (exceto v) é colorido quando todos os seus vizinhos posteriores na ordem já foram coloridos, o que garante a coloração. A Figura 12 mostra a coloração de u e w e colorindo gulosamente.

Após a coloração de todos os vértices de $G - \{u, w\}$, se alguma cor fica disponível para v , obtemos uma coloração usando Δ cores, encerrando a prova. Caso contrário, cada

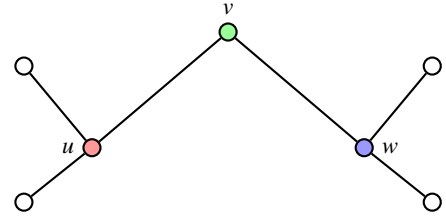


Figura 11: Estrutura inicial: vértices u e w em blocos terminais distintos de $G - v$.

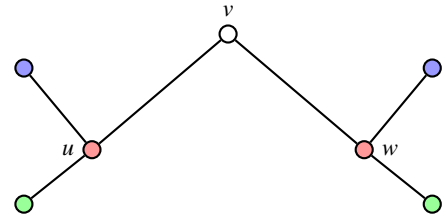


Figura 12: Coloração imediata após a coloração gulosa: todos os vértices, exceto v , já foram coloridos e u e w compartilham a mesma cor.

uma das Δ cores aparece em $N(v)$. Para liberar uma cor, empregamos cadeias de Kempe, explícito no **Lema 3**.

Para cada cor $i \in \{1, \dots, \Delta\}$, considere v_i o vizinho de v usando a cor i . Por um argumento semelhante, para cada v_i , cada cor diferente de i aparece em um vizinho de v_i ; se não, poderíamos recolorir v_i e colorir v com i . Para cada par de cores i e j , seja $C_{i,j}$ a cadeia de Kempe (i, j) contendo v_i .

A partir desta construção, formulamos as seguintes afirmações que descrevem configurações impossíveis para um contraexemplo minimal:

- **Afirmção 1:** Para qualquer par de cores i e j , a cadeia de Kempe que começa em um vértice da cor i e a cadeia que começa em um vértice da cor j têm que ser a mesma componente conexa. Porque, se fossem cadeias diferentes, poderíamos fazer uma troca na cadeia de Kempe onde está o vértice da cor i . Esta troca inverteria as cores nesse componente, e com isso faria a cor i desaparecer da vizinhança de v . A Figura 13 ilustra a situação antes da troca, com componentes de Kempe (i, j) disjuntos contendo v_i (esquerda) e v_j (direita), e a Figura 14 ilustra o momento em que troca é realizada no componente de v_i . Agora, v_i e v_j usam a cor j (azul), e a cor i (vermelho) está livre em $N(v)$. O vértice v pode ser colorido com i , contradizendo o contraexemplo minimal.
- **Afirmção 2:** Qualquer cadeia de Kempe precisa ser um caminho simples, isto é, ela não pode ter ramificações, não pode ter vértices com grau maior que 2 dentro da cadeia. Se

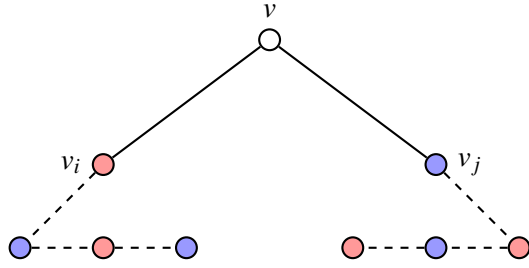


Figura 13: Afirmação 1: Antes da Troca (Violação $C_{i,j} \neq C_{j,i}$).

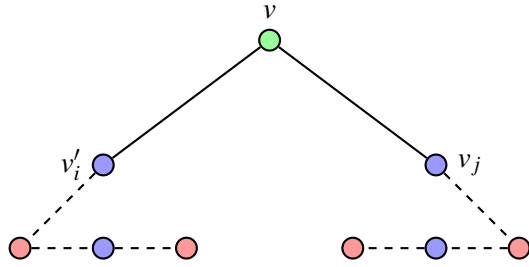


Figura 14: Afirmação 1: Depois da Troca.

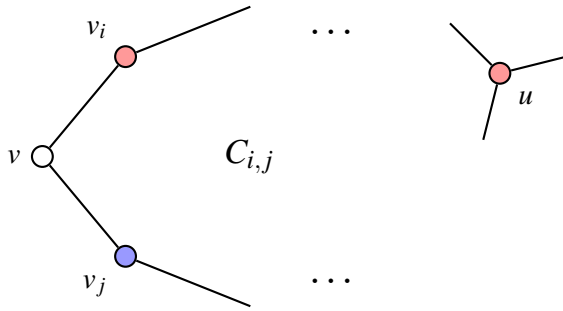


Figura 15: Ilustração da Afirmação 2. Fonte: Adaptado de Cranston e Rabern [5]

uma cadeia tivesse um vértice com grau 3, poderia recolorir apenas uma parte da cadeia de modo a liberar uma cor para um vértice vizinho de v , e de novo conseguiríamos colorir v , destruindo o contraexemplo. A Figura 14 consiste em uma adaptação do trabalho de Cranston e Rabern [5] e ilustra a interpretação da afirmação em questão.

- **Afirmação 3:** Duas cadeias que partem do mesmo vértice v_i e usam cores diferentes só podem se encontrar no próprio v_i e em nenhum outro lugar. Se houvesse qualquer outro vértice u que estivesse ao mesmo tempo em $C_{i,j}$ e em $C_{i,k}$, então u teria vizinhos em cores j e k dentro das cadeias, o que novamente permitiria recolorir parte das cadeias e liberar a cor i na vizinhança de v . Com isso, G deixaria de ser um contraexemplo. A Figura 16 também é uma adaptação do trabalho de Cranston e Rabern [5] e esclarece a afirmação discutida.
- **Afirmação 4:** Agora juntamos todas as três propriedades e mostramos que elas não podem valer ao mesmo tempo. Escolhemos três vizinhos de v , chamados v_1 , v_2 e v_3 , cada um com uma cor diferente. Pela estrutura do grafo, existe um vértice u na cadeia $C_{1,2}$. E como v_1 e v_3 usam as cores 1 e 3, também existe uma cadeia $C_{1,3}$ conectando esses dois vértices. Realizamos uma troca de Kempe na cadeia $C_{1,3}$: os vértices de cor 1 viram 3, e os de cor 3 viram 1. Depois da troca, o vértice u , que antes só estava na cadeia $C_{1,2}$, passa a estar ao mesmo tempo na cadeia $C'_{1,2}$ e na cadeia $C'_{2,3}$. Mas isso contradiz a Afirmação 3, que dizia que esse

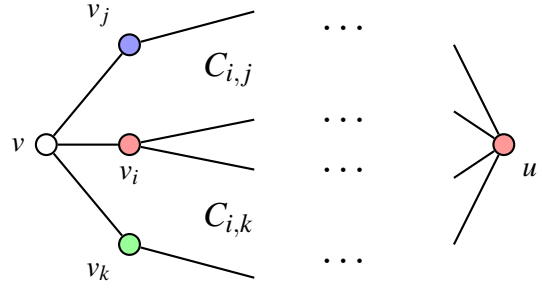


Figura 16: Ilustração da Afirmação 3. Fonte: Adaptado de Cranston e Rabern [5]

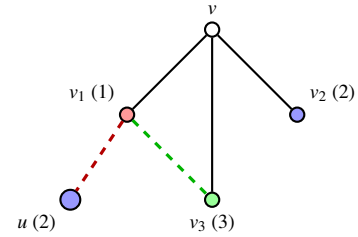


Figura 17: Afirmação 4: ANTES da troca em $C_{1,3}$. u pertence à cadeia $C_{1,2}$ e v_1 está conectado a v_3 na cadeia $C_{1,3}$.

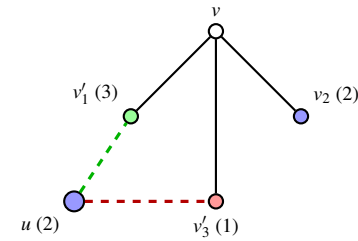


Figura 18: Afirmação 4: DEPOIS da Troca em $C_{1,3}$. $u \in C'_{1,2} \cap C'_{2,3}$.

tipo de interseção só pode ocorrer no próprio v_1 . Como encontramos essa interseção, as três afirmações não podem ser todas verdade. Logo, o contraexemplo minimal não pode ser válido e o Teorema de Brooks é válido. Observe a Figura 17, ela mostra o momento antes da troca em $C_{1,3}$, v_1, v_2, v_3 são vizinhos de v , u (cor 2) é um vizinho de v_1 (cor 1) e faz parte da cadeia $C_{1,2}$. A Figura 18 ilustra o momento onde a troca é realizada, v'_1 agora tem cor 3, u ainda tem cor 2 e v_2 tem cor 2. O vértice u agora pertence a $C'_{1,2}$ e $C'_{2,3}$, violando a Afirmação 3 ($C_{i,j} \cap C_{i,k} = v_i$).

As Afirmações 1, 2 e 3 descrevem propriedades que qualquer contraexemplo minimal precisaria ter. Mas a Afirmação 4 mostra que essas três condições juntas levam a uma contradição depois de uma troca de Kempe.

Com isso, existe uma troca válida que libera uma cor em $N(v)$. Após a troca, colorimos v com a cor liberada e, temos um grafo Δ -colorível. Isto contradiz o contraexemplo minimal, logo, não existe um contraexemplo para este teorema e, portanto:

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

□

O contraexemplo precisa ser Δ -regular, pois a coloração gulosa produziria uma Δ -coloração de G , contradizendo $\chi(G) > \Delta$. As técnicas de Lovász e da cadeia de Kempe

garantem um vértice especial que pode ser controlado no entorno, uma vez que é possível colorir partindo de blocos terminais, e sempre existe uma troca de cores possível para resolver conflitos locais. Ademais, na Afirmação 4 se afirma que tem vizinhos v_1 e v_2 não adjacentes, porque os vizinhos de v não formam clique. Se fosse um clique, o grafo seria completo, porém é uma exceção para o teorema. Logo, os vizinhos de v não podem formar um clique.

Na seguinte seção, serão relatadas as contribuições adicionais dos autores, dificuldades encontradas, solução para as adversidades e como este problema possui potenciais pedagógicos para o meio acadêmico.

VI. RESULTADOS E REFLEXÕES

O trabalho de Cranston e Rabern [5] destaca-se pela abordagem clara e ilustrativa para apresentar o teorema. Este foi utilizado como base para a demonstração desenvolvida neste estudo. Os autores evidenciam as buscas de suas provas favoritas do Teorema de Brooks, expondo as técnicas principais da coloração de vértices usadas para auxiliar nas demonstrações. Cabe ressaltar que possuíam o objetivo de apresentar as provas, destacando suas vantagens e extensões de cada uma. A organização deste trabalho permite a leitura independente de suas seções, uma vez que cada seção apresenta, de forma autossuficiente, as técnicas e a demonstração. Ademais, o artigo explicita outros autores que adotaram estratégias diferentes para as provas baseado na demonstração apresentada em cada seção.

A ilustração dos conceitos abstratos e as pesquisas apresentadas no trabalho de Cranston e Rabern [5] contribuem para o meio acadêmico. Essas contribuições possibilitam a construção de novos temas para trabalhos futuros, aprimorando os argumentos e definindo novas abordagens. Embora os autores não descrevam as suas adversidades encontradas durante o processo da elaboração do artigo, eles salientam a relevância das contribuições recebidas por meio de comentários e sugestões de outros pesquisadores. Os feedbacks e as avaliações foram cruciais para o refinamento da escrita e para a atualização do problema apresentado.

As maiores dificuldades vistas na escrita deste trabalho estiveram relacionadas à escolha dos métodos para realizar a demonstração. Algumas abordagens requerem um conhecimento mais apurado em Teoria dos Grafos. A intenção é expor ao menos dois lemas de maneira coerente e didática. Este problema expandiu-se na prova do problema e dos lemas auxiliares, buscando ajudar no desenvolvimento da resolução do Teorema de Brooks. Além disso, houve dificuldade na construção de ilustrações que representassem de forma clara cada conceito apresentado sobre grafos e das técnicas aplicadas.

Para contornar essas adversidades, foram feitas pesquisas aprofundadas em artigos acadêmicos que mostravam a prova completa do Teorema de Brooks. Estes trabalhos utilizam diferentes lemas com suas técnicas de demonstração adequadas para uma conclusão correta. Para a elaboração das figuras ilustrativas, demandou mais análise sobre materiais didáticos que abordam noções básicas de grafos acompanhada de exemplos pedagógicos e explicativos. A partir disso, foram selecionados os lemas adequados para este trabalho. Dessa maneira, este material busca servir como um suporte didático

para os acadêmicos que desejam se aprofundar no assunto de coloração dos grafos.

A coloração de grafos tem grande potencial para aplicações pedagógicas e acadêmica. Essa área é utilizada para modelagem de problemas reais, construção de ferramentas computacionais e desenvolvimento de algoritmos de coloração [22]. Ademais, a demonstração apresentada pode servir como base para a construção de teses e dissertações que explorem classificações de grafos e diferentes técnicas de coloração.

VII. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, este estudo contextualiza o cenário sobre coloração de grafos, destaca os conceitos fundamentais e básicos sobre grafos para esclarecer o problema e a demonstração do Teorema de Brooks. O teorema estabelece que, se um grafo G tal que G não seja completo nem ciclo ímpar, então satisfaz $\chi(G) \leq \Delta(G)$. Para demonstrar o problema, foi utilizada a prova por contradição assumindo um contraexemplo minimal. A abordagem foi apoiada por duas técnicas essenciais: o Lema Estrutural de Lovász e cadeia de Kempe.

Adicionalmente, foram destacados outros trabalhos relacionados ao tema, os quais mostram diferentes formas de demonstração e técnicas elaboradas ou modificadas pelos autores. As contribuições evidenciam que o estudo de coloração de vértices permanece relevante para a resolução de problemas reais. Para a construção deste trabalho, uma pesquisa aprofundada de artigos, que exploram o mesmo problema, foi necessária com o intuito de reproduzir os resultados da literatura, buscando tornar o ensino mais acessível e descomplicado.

A construção da demonstração, a síntese das técnicas e a elaboração das ilustrações foram os desafios encontrados ao longo deste estudo. Isso se deve ao fato de que se priorizou a apresentação de uma explicação compreensível e coesa para a comunidade acadêmica.

A coloração de grafos apresenta potencial para o desenvolvimento de trabalhos futuros, principalmente no que se refere à aplicação em problemas reais e à estruturação de algoritmos. Como perspectiva de melhoria dos resultados apresentados, destaca-se a possível inclusão da prova baseada em Coloração de Listas (List Coloring) ou do lema de Kernel [5], que são técnicas mais modernas da literatura. No entanto, essas abordagens não foram implementadas no presente artigo devido à sua maior complexidade conceitual. Sua inclusão exigiria um detalhamento adicional de preliminares e poderia comprometer a acessibilidade do material para o escopo desta disciplina.

REFERÊNCIAS

- [1] J. L. Szwarcfiter, *Teoria Computacional de Grafos: os algoritmos*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.
- [2] R. P. Alves, "Coloração de grafos e aplicações," Ph.D. dissertation, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, 2015, dissertação de Mestrado Profissional em Matemática.
- [3] D. S. Vasconcelos, "Coloração em grafos e aplicações," Ph.D. dissertation, Universidade Federal de Sergipe (UFS), São Cristóvão, SE, 2018, Dissertação de Mestrado em Matemática PROFMAT.
- [4] L. Sousa, "O Teorema das Quatro Cores," *Millenium*, no. 25, pp. 125–151, 2003.

- [5] D. W. Cranston and L. Rabern, "Brooks' Theorem and Beyond," *Journal of Graph Theory*, vol. 80, no. 3, pp. 199–225, 2014.
- [6] G. Sajith and S. Saxena, "On Brooks' Theorem," *arXiv preprint*, 2025, Available at arXiv:2208.02186v2.
- [7] L. S. Mel'nikov and V. G. Vizing, "New proof of Brooks' theorem," *Journal of Combinatorial Theory*, vol. 7, pp. 289–290, 1969.
- [8] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, 5th ed. London: Pearson Education, 2010.
- [9] M. Zajac, "A short proof of Brooks' theorem," *arXiv preprint*, 2018, Available at arXiv:1805.11176.
- [10] J. A. Bondy, "Short proofs of classical theorems," *Journal of Graph Theory*, vol. 44, no. 3, pp. 159–165, 2003.
- [11] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Berlin: Springer, 2008, vol. 244.
- [12] S. Amiroch, H. Chang, M. Jamhuri, and T. Yulianto, "Vertex coloring in graphs: A novel approach to nutritional menu planning," in *AIP Conference Proceedings*, vol. 3176, no. 1. AIP Publishing, 2024, p. 020006.
- [13] D. J. A. Welsh and M. B. Powell, "An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems," *The Computer Journal*, vol. 10, no. 1, pp. 85–86, 1967.
- [14] F. Radmehr and co authors, "Teaching and learning of vertex coloring using an inquiry-based approach," *Journal of Graph Theory Education*, 2023.
- [15] S. S. M. Rajagaspar, "Applications of Graph Coloring Using Vertex Coloring," *PublishOA Journal*, 2023, Acesso via PublishOA. DOI/ISSN não especificados.
- [16] Y. O. Lassance, R. Bianchini, and R. R. Santos, "Uma experiência didática em Teoria da Computação: limites da computação e Ensino Médio," *Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)*, vol. 16, no. 2, pp. 1–20, 2025.
- [17] R. Diestel, *Graph Theory*, 4th ed., ser. Graduate Texts in Mathematics. Heidelberg: Springer, 2010, vol. 173.
- [18] W. K. Hale, "Frequency assignment: Theory and applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 68, no. 12, pp. 1497–1514, 1980.
- [19] G. J. Chaitin, "Register allocation & spilling via graph coloring," *SIGPLAN Notices*, vol. 17, no. 6, pp. 98–105, 1982.
- [20] L. E. C. Laurindo and F. J. da Silva e Silva, "SaturBFS: Um Algoritmo de Coloração de Grafos para Resolução do Sudoku," in *Anais da Escola Regional de Computação do Ceará, Maranhão e Piauí (ERCEMAPI)*, 9°. Sociedade Brasileira de Computação (SBC), 2021, pp. 74–81.
- [21] R. M. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*. New York: Plenum Press, 1972, pp. 85–103.
- [22] C. B. Silva, M. E. Sena, C. M. S. Machado, and D. F. Adamatti, "Uma abordagem teórica e prática da coloração em problemas modelados por grafos," *Vetor*, vol. 26, no. 2, pp. 61–72, 2016.

