

Demonstração prática e pedagógica do Teorema de Tutte-Berge e o Teorema de Tutte

A Practical and Pedagogical Demonstration of the Tutte-Berge and Tutte Theorems

João Pedro Felix Veloso¹, Artur Anderson Alves Corrêa¹, Daniel Martins da Silva² e Tanilson Dias dos Santos¹

¹ Universidade Federal do Tocantins, Tocantins, Brasil

² Universidade Federal do Norte do Tocantins, Tocantins, Brasil

Data de recebimento do manuscrito: 01/12/2025

Data de aceitação do manuscrito: 22/01/2026

Data de publicação: 10/02/2026

Resumo—Este artigo representa o relato de uma experiência pedagógica desenvolvido na disciplina de Teoria dos Grafos no curso de Ciência da Computação, ofertada no semestre 2025/2 na Universidade Federal do Tocantins. A aplicação prática dos conceitos de grafos aprendidos na disciplina partirá de uma reprodução da demonstração dos Teoremas de Tutte-Berge e de Tutte, os quais representaram grandes avanços na pesquisa de emparelhamentos em grafos. Mais especificamente, o estudo da condição de existência de emparelhamento máximo e perfeito em um grafo qualquer. Estes estudos, por sua vez, abriram as portas para a resolução de problemas cada vez mais complexos, e a versatilidade de seus usos pode ser interpretada como complemento das conquistas trazidas pelo Teorema de Hall. A explicação de tais conceitos será feita com base nas principais dificuldades encontradas pelo corpo estudantil, demonstrando de forma didática e ilustrativa, por meio de imagens, a fim de reduzir a abstração inerente ao tema.

Palavras-chave—Teoria dos grafos, Teorema de Tutte-Berge, Teorema de Tutte, grafos máximos, barreiras, Seminários Acadêmicos, Experiência Pedagógica.

Abstract—This paper reports on a pedagogical experience developed during the Graph Theory course within the Computer Science program, offered in the second semester of 2025 at the Federal University of Tocantins. The practical application of the graph concepts learned in the course involves reproducing the proofs of the Tutte-Berge and Tutte theorems, which represented major advancements in graph matching research. More specifically, it focuses on the study of the existence conditions for maximum and perfect matchings in arbitrary graphs. These studies, in turn, paved the way for solving increasingly complex problems, and the versatility of their applications can be interpreted as a complement to the achievements brought by Hall's Theorem. The explanation of these concepts is based on the primary difficulties encountered by the student body, employing a didactic approach illustrated with images to reduce the inherent abstraction of the subject matter.

Keywords—Graph Theory, Tutte-Berge Theorem, Tutte's Theorem, Maximum Matchings, Barriers, Academic Seminars, Pedagogical Experience.

I. INTRODUÇÃO

A teoria dos Grafos é uma das grandes protagonistas que permeiam o mundo da computação, oferecendo uma linguagem universal para a modelagem de relacionamentos e estruturas complexas. O estudo de grafos não se limita apenas à abstração matemática; ele permeia soluções para problemas reais e contemporâneos, variando desde a otimização de rotas em sistemas de logística e o design de circuitos eletrônicos até a análise de redes sociais e a

bioinformática. A capacidade de abstrair problemas do mundo real em vértices e arestas, aplicando sobre eles algoritmos eficientes de busca, fluxo e conectividade, é uma habilidade indispensável para o cientista da computação moderno.

Partindo deste contexto, o estudo dos emparelhamentos nos grafos remonta a dezenas de anos repletas de contribuições. Redes sociais, problemas de atribuições de postos de trabalho, alocações de recursos ,entre outros, são os problemas que os emparelhamentos enfrentaram, contudo, o foco deste artigo está no emparelhamento máximo, ou seja, o emparelhamento de maior cardinalidade possível em um grafo G . Como um dos maiores representantes do estudo do emparelhamento máximo, em 1935, Philip Hall apresenta o

teorema de Hall, popularmente conhecido como o “Teorema do casamento”. Esse nome popular adveio da natureza do problema que partia da seguinte metáfora: se todo grupo de meninas em uma vila gostar coletivamente de pelo menos tantos meninos quanto há meninas no grupo, então cada menina pode se casar com um menino de quem ela gosta.

Mais formalmente, temos que o teorema de Hall apresentou as ferramentas necessárias para as descobertas de emparelhamentos máximos em grafos bipartidos. O Teorema de Hall tem se mostrado uma ferramenta valiosa tanto na teoria dos grafos quanto em outras áreas da matemática. Ademais, em 1957 Claude Berge avançou o estudo do problema do emparelhamento máximo confirmando a relação crucial entre caminhos M-aumentantes e emparelhamentos máximos. Relação esta, já previamente apontada (mas não provada), por König em 1931 e Petersen em 1891. Herdando estas contribuições, William Thomas Tutte avança com o teorema de Tutte-Berge e o teorema de Tutte, descobrindo uma fórmula do tamanho de um emparelhamento máximo em um grafo qualquer e também uma condição de existência para um emparelhamento perfeito.

Embora o Teorema de Hall tenha estabelecido um marco fundamental, sua aplicabilidade direta restringe-se aos grafos bipartidos, deixando uma lacuna significativa para estruturas mais complexas onde a bipartição não é garantida. É nesse cenário que a generalização proposta por Tutte se torna revolucionária. Ao introduzir o conceito de componentes ímpares resultantes da remoção de vértices, o Teorema de Tutte (1947) fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de um emparelhamento perfeito em um grafo qualquer, superando as limitações impostas pela necessidade de bipartição. A fórmula de Tutte-Berge, consolidada posteriormente em 1958, expande essa visão ao quantificar a deficiência de um grafo, ou seja, determinar o tamanho exato do emparelhamento máximo baseando-se na estrutura topológica do grafo e na análise de seus subconjuntos críticos, conhecidos como barreiras.

Assim, partindo do reconhecimento da importância desses teoremas, o artigo se propõe à reprodução de resultados já adquiridos através de uma perspectiva pedagógica e a disseminação desse conhecimento aos alunos em escala pessoal. Além disso, promove-se a introdução de todos os conceitos necessários para o entendimento dos teoremas, facilitando o acesso às nomenclaturas utilizadas no artigo.

Partindo para a estrutura, o artigo está organizado da seguinte maneira: na *Seção 2 (Preliminares)*, são definidos os conceitos básicos, como grafo, conexidade, componentes e emparelhamento, estabelecendo a notação e o vocabulário necessários. Em seguida, a *Seção 3 (Trabalhos Relacionados)* apresenta uma revisão bibliográfica, situando este trabalho em relação a outras abordagens pedagógicas e técnicas existentes na literatura. Avançando para a definição do escopo, a *Seção 4 (Descrição do Problema)* detalha os teoremas de Tutte-Berge e Tutte, bem como sua importância histórica. Já na *Seção 5 (Demonstração e Contribuições)*, encontra-se o núcleo do trabalho, contendo as demonstrações passo a passo dos teoremas escolhidos. Posteriormente, a *Seção 6 (Resultados e Reflexões)* discute as dificuldades encontradas durante o estudo, as estratégias de superação e realiza discussões quanto aos resultados, e, por fim, a *Seção 7 (Considerações Finais)* sintetiza os aprendizados e conclui

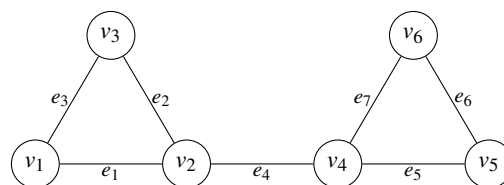


Figura 1: Grafo G ilustrando vértices (v_i), arestas (e_i), ciclos e conectividade.



Figura 2: Representação de um grafo trivial, composto por um único vértice isolado.

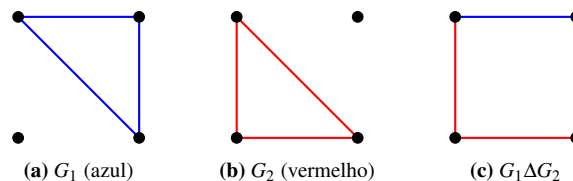


Figura 3: Ilustração da diferença simétrica.

a temática.

II. PRELIMINARES

Um grafo $G(V, E)$ é uma estrutura de dados formada por dois conjuntos: um conjunto V chamado de vértices e um conjunto E de elementos chamados de arestas; cada aresta está associada a dois vértices: o primeiro é a ponta inicial da aresta e o segundo é a ponta final. Pode-se imaginar que um grafo é um mapa rodoviário idealizado: os vértices são cidades A e B e as arestas são estradas. Considere o grafo 1:

Chamamos de *subgrafo* um grafo formado por um conjunto de vértices e arestas do grafo original. Assim, considere um subgrafo H com os conjuntos de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ e arestas $E = \{e_3, e_2, e_1\}$. A partir do subgrafo $H(V, E)$, podemos definir o conceito de *caminho*: um caminho em grafos é uma sequência de vértices interligados por arestas, onde o vértice final de uma aresta é o vértice inicial da próxima.

Ou seja, o conjunto $V = \{v_1, v_2\}$ é um caminho conectado pela aresta e_1 . Como extensão dessa ideia, temos o conceito de *ciclo*: um ciclo em grafos é um caminho que começa e termina no mesmo vértice, sem repetir outros vértices no percurso. Ou seja, um exemplo de ciclo é $V = \{v_1, v_2, v_3\}$; partindo de v_1 pela aresta e_3 , partindo de v_3 pela aresta e_2 e partindo de v_2 pela aresta e_1 , temos um ciclo.

Continuamente, um grafo trivial é definido como um grafo que possui exatamente um vértice e nenhuma aresta.

Matematicamente, se $G = (V, E)$, então G é trivial se $|V| = 1$ e $E = \emptyset$. Também, outro conceito que deve ser explicado é a *diferença simétrica*. A diferença simétrica de dois grafos (denotado por $G_1 \Delta G_2$) é uma operação que resulta em um novo grafo contendo apenas as arestas que são exclusivas de cada um dos grafos originais.

O grafo resultante da figura 3 (c) contém apenas as arestas exclusivas de G_1 (topo) e exclusivas de G_2 (fundo). A aresta diagonal, presente em ambos, é removida. Além disso, um grafo é *conexo* se existir um caminho entre qualquer par de

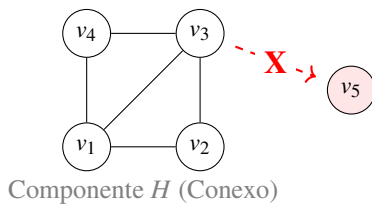
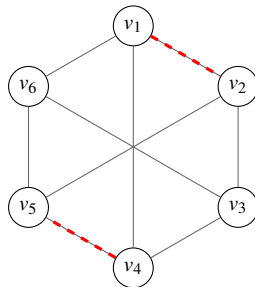
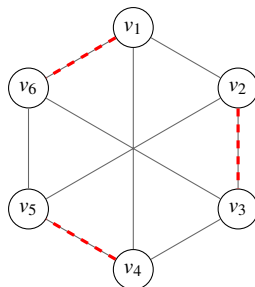


Figura 4: Exemplo de grafo desconexo. O componente H à esquerda é conexo internamente, mas o vértice v_5 está isolado.

Figura 5: Exemplos de emparelhamento em um mesmo grafo G :



(a) Emparelhamento não máximo (tamanho 2). Vértices v_3 e v_6 não foram emparelhados.



(b) Emparelhamento máximo (tamanho 3). Neste caso, é um emparelhamento perfeito.

vértices. Em outras palavras, é possível ir de qualquer vértice para qualquer outro vértice usando apenas as arestas do grafo. Se não for possível, o grafo é considerado desconexo.

Levando em conta o subgrafo H (a parte esquerda da figura), é possível ir de qualquer vértice a outro através de suas arestas; isso significa que o subgrafo H é conexo.

Porém, considerando a Figura 4, é impossível que v_3 alcance v_5 . De fato, é impossível que qualquer vértice do componente H chegue até v_5 , pois não há qualquer aresta que ligue o vértice v_5 aos outros vértices. Portanto, a figura representa um grafo desconexo.

Seguindo adiante, iremos para o conceito de *emparelhamento*. Um emparelhamento é um conjunto de arestas onde nenhuma delas compartilha o mesmo vértice. Em termos simples, é uma seleção de conexões onde cada vértice do grafo está ligado a, no máximo, um outro vértice. Isso pode ser entendido como a formação de pares exclusivos dentro de um grupo. Os vértices "selecionados", isto é, incidentes a uma aresta emparelhada são chamados de M -saturados. Caso não sejam, são chamados de M -insaturados. A partir deste princípio, podemos definir *emparelhamento máximo* que é a cardinalidade do maior emparelhamento possível no grafo.

As arestas em vermelho e tracejadas indicam os pares

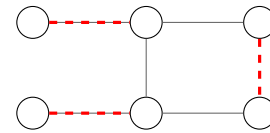


Figura 6: Emparelhamento máximo (e perfeito). As arestas em vermelho e tracejadas indicam os pares exclusivos formados.

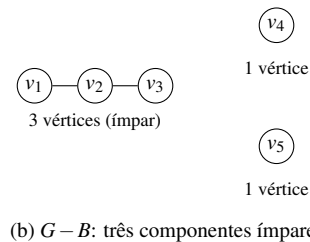
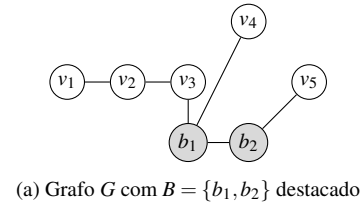
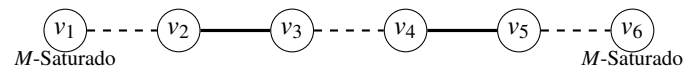


Figura 7: Representação de uma barreira. A remoção de B produz mais componentes ímpares do que $|B|$.

Caminho M -alternante (e M -aumentante)



exclusivos formados. Em 5(a) temos um conjunto válido, mas que poderia ser maior. Em 5(b) temos o maior conjunto possível para este grafo. Além disso, temos o conceito de *emparelhamento perfeito*. Diz-se que um emparelhamento M é *perfeito* se todo vértice do grafo estiver saturado por M . Naturalmente, todo emparelhamento perfeito é *máximo*, e todo emparelhamento máximo é *maximal* (isto é, não pode ser estendido adicionando-se arestas).

Avançando, um *vértice essencial* é aquele que todo emparelhamento máximo o cobre. Com a ideia de emparelhamento determinada, podemos partir para o conceito de *barreira*: Formalmente, dado um grafo G , um subconjunto de vértices B é chamado de barreira se a remoção de B divide o grafo em um número de componentes ímpares (componentes de um grafo com uma quantidade ímpar de vértices) maior que o tamanho do próprio conjunto B .

Ademais, deve-se introduzir conceito de caminho M -alternante e caminho M -aumentante. Seja G um grafo geral, E o conjunto de arestas de G e M um emparelhamento de G . Um caminho M -alternante em G é um caminho cujas arestas pertencem alternadamente a $E \setminus M$ e a M . Um caminho M -alternante cujos vértices extremos são ambos M -Saturados é chamado *caminho M -aumentante*. Observe que um caminho M -aumentante possui uma quantidade par de vértices.

Para a melhor compreensão das fórmulas apresentadas a seguir no artigo, partimos das seguintes denominações: A quantidade de arestas em um emparelhamento máximo será denotada por $\alpha'(G)$. Além disso, denotaremos por $o(G)$ como o número de componentes ímpares do grafo. Também, chamaremos de grafos hipoemparelháveis grafos que não possuem emparelhamentos perfeitos, contudo, qualquer subgrafo com qualquer vértice retirado possui

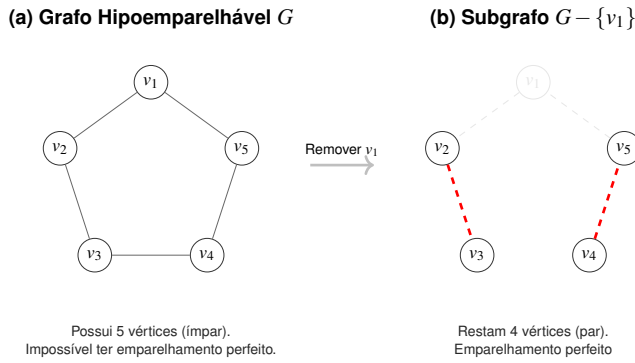


Figura 8: Ilustração de um grafo hipoemparelhável.

$$def(G) = (o(G - S) - |S|)$$

Figura 9: Representação matemática da deficiência

emparelhamento perfeito.

Em (a), o grafo original C_5 não tem emparelhamento perfeito devido à paridade. Em (b), após a remoção do vértice v_1 , o subgrafo restante admite um emparelhamento perfeito (arestas vermelhas tracejadas).

O comportamento demonstrado se repete não importa qual vértice seja retirado. Ademais, devemos definir a ideia de *deficiência*. A deficiência mede quantos vértices não podem ser pareados, no pior caso, se tentarmos formar um emparelhamento. Note que $o(G-S)$ é o número de componentes ímpares após a remoção de S . Sabemos que cada componente ímpar garante que pelo menos 1 vértice ficará sem par. Ou seja, a deficiência representa quantos vértices ficam inevitavelmente "solitários" depois que removemos S .

Com toda a introdução teórica feita, partiremos para uma pequena revisão de literatura quanto aos problemas do emparelhamento máximo e a evolução pedagógica do ensino dos grafos.

III. TRABALHOS RELACIONADOS

A literatura voltada ao ensino de Ciência da Computação e, especificamente, de Teoria dos Grafos, destaca que a complexidade e o nível de abstração dos conceitos exigem estratégias pedagógicas diversificadas. A pesquisa bibliográfica realizada para este artigo identificou duas frentes principais de trabalhos relacionados: (i) experiências didáticas e ferramentas de apoio ao ensino de grafos e computação teórica; e (ii) fundamentações teóricas modernas sobre emparelhamento e os teoremas de Tutte.

No contexto de metodologias ativas, Lassance [1] relata uma experiência similar à vivenciada na elaboração deste artigo, aplicada à disciplina de Teoria da Computação. Os autores destacam que a implementação de um Ciclo de Seminários, focando em tópicos de alta complexidade como NP-Completo, resultou na maximização da compreensão dos estudantes e no desenvolvimento da autonomia investigativa. Este artigo dá continuidade a essa visão, utilizando a metodologia de seminário para aprofundar o estudo de emparelhamentos.

Para mitigar as dificuldades de abstração, diversas abordagens visuais têm sido propostas. Santos et al. [2] discutem a validação do sistema *GraphViewer*, uma ferramenta de visualização de algoritmos focada no ensino de provas por indução em Teoria dos Grafos. Os autores evidenciam que a visualização passo a passo auxilia na compreensão de demonstrações matemáticas rigorosas. A ferramenta preenche uma lacuna específica ao focar em "demonstrações por indução", uma área onde os alunos historicamente têm grande dificuldade de visualização.

O estudo aplicou métricas rigorosas de Ganho de Aprendizagem Absoluto (GAA) e Normalizado (GAN) para medir a eficácia da ferramenta. Em relação ao aumento do desempenho, no primeiro experimento realizado, o grupo que utilizou o *GraphViewer* (grupo de teste) obteve um Ganho de Aprendizagem Normalizado (GAN) de 25,11%, quase o dobro do ganho obtido pelo grupo de controle, e 13,92% que não usou a ferramenta. Na mesma linha, em um trabalho anterior, Santos et al. [3] apresentaram o ambiente TBC-GRAFOS, demonstrando que o uso de softwares gráficos reduz índices de reprovação e agiliza a compreensão de algoritmos clássicos, como os de busca e caminho mínimo.

Além de softwares, abordagens lúdicas também se mostram eficazes. Correa et al. [4] desenvolveram o jogo de tabuleiro "Formígrafo", que utiliza a temática de um formigueiro para motivar o aprendizado do Problema do Caminho Mínimo. O trabalho reforça que a contextualização lúdica facilita a introdução de conceitos abstratos de grafos ponderados.

No que tange à fundamentação teórica específica deste trabalho, a literatura apresenta evoluções nas demonstrações clássicas de emparelhamento. Qu e West [5] publicaram recentemente uma nova prova para a Fórmula Generalizada de Tutte-Berge aplicada a subgrafos f -limitados. O trabalho utiliza o Teorema do f -Fator de Tutte para estabelecer uma relação min-max, simplificando a compreensão da fórmula clássica quando $f(v) = 1$. Isso é, cada vértice pode estar conectado a, no máximo, uma aresta dentro desse subgrafo.

Complementarmente, o livro do Douglas B. West [6] parte de uma perspectiva mais tradicional através das técnicas de provas matemáticas puras. Contudo, encara os problemas de diversos ângulos, iniciando pelo mais tradicional, sendo ele o método da indução de vértices provando a suficiência do teorema de Tutte. Após isso, tomando uma via mais original a resolução do teorema, provando-o pelo Teorema de Hall. Aprofundando-se, a ideia geral é transformar o grafo original em um grafo bipartido adequado e então aplicar Hall.

Tais contribuições denotam a importância de encarar a teoria dos grafos com uma visão didática, a fim de facilitar a compreensão de temas abstratos. Não só isso, mas a exploração de novas maneiras de provar os teoremas mostra que o problema do emparelhamento máximo é relevante até hoje e a sua discussão e compreensão é necessária. Com isso em mente, a seguir mudaremos o enfoque para o problema em si, aprofundando nos teoremas de Tutte-Berge e Tutte.

IV. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Começando com o primeiro dos teoremas escolhidos, considerando um grafo $G(S,E)$, sendo S o conjunto de

$$\alpha'(G) = \frac{1}{2} \min\{v(G) - (o(G-S) - |S|)\} \text{ tal que } S \subset V$$

Figura 10: Fórmula de Tutte-Berge para emparelhamento máximo.

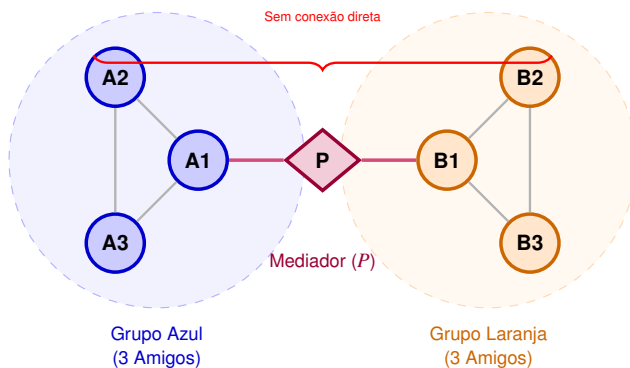


Figura 11: O Problema do Buddy System. A remoção de P cria dois componentes ímpares isolados.

vértices de G e $|S|$ a cardinalidade do conjunto, a fórmula do teorema de Tutte-Berge é dada por:

A intuição por trás da Fórmula de Tutte-Berge baseia-se na barreira estrutural causada pela paridade dos componentes. Considere a remoção de um conjunto de vértices $U \subseteq V$. O grafo resultante $G - U$ se fragmenta em vários componentes conexos.

Com relação à natureza do problema, ele é classificado como um problema de otimização, pois determina o valor máximo de $\alpha'(G)$. O objetivo é encontrar o conjunto U que maximiza a deficiência para provar que o emparelhamento não pode ser maior.

Diferente de muitos problemas em grafos gerais (como Coloração ou Caminho Hamiltoniano) que são NP-Difíceis, o problema do Emparelhamento Máximo pertence à classe P (Tempo Polinomial). Um dos algoritmos mais eficientes conhecidos para emparelhamento máximo em grafos gerais é o algoritmo de Micali-Vazirani, cuja complexidade é $O(E\sqrt{V})$. Também, É possível resolver diversos problemas com o teorema de Tutte-Berge. Um exemplo clássico é o Problema da Formação de Equipes (Buddy System).

O problema consiste em formar o número máximo possível de duplas (emparelhamento máximo) em um grupo de pessoas, respeitando uma regra de compatibilidade: uma dupla só pode ser formada se houver uma aresta de "amizade" entre as duas pessoas.

A Figura 11 ilustra um cenário onde um emparelhamento perfeito é impossível devido à estrutura social do grupo. Temos 7 pessoas divididas em: O Grupo Azul é composto por 3 pessoas (A1, A2 e A3), todas amigas entre si. O Grupo Laranja também possui 3 pessoas (B1, B2 e B3), que igualmente são amigas entre si. Por fim, há o Mediador P, uma pessoa central que possui uma relação de amizade com integrantes de ambos os grupos.

Há uma incompatibilidade total entre os grupos: ninguém do Azul é amigo de alguém do Laranja.

Análise via Tutte-Berge: Se removermos o conjunto $U = \{P\}$, o grafo se quebra em dois componentes conexos (os dois grupos), ambos com um número ímpar de vértices. O

$$o(G-S) \leq |S|, \quad \forall S \subseteq V$$

Figura 12: A condição do Teorema de Tutte.

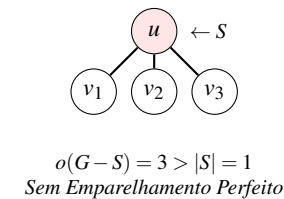
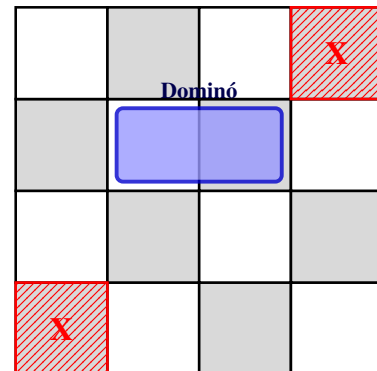


Figura 13: Grafo $K_{1,3}$ violando a condição de Tutte.



Contagem Final:

Branças: 8 Pretas: 6

Impossível cobrir!

Figura 14: O Tabuleiro Mutilado. A remoção de dois cantos da mesma cor quebra a paridade necessária.

mediador único não é suficiente para cobrir a demanda desses componentes.

Agora, analisando o Teorema de Tutte, ele responde se o grafo possui um emparelhamento perfeito. A condição é apresentada na Figura 12:

Assim, um grafo possui um emparelhamento perfeito se e somente se a condição acima for cumprida para todo subconjunto S . A Figura 13 mostra uma violação simples.

Seguindo, o problema de encontrar um emparelhamento perfeito pertence à classe P. Um dos algoritmos fundamentais é o Algoritmo de Blossom (Edmonds, 1965), que lida com "ciclos ímpares" contraindo-os em super-vértices.

Para entender a importância da paridade, analisamos o problema do tabuleiro de xadrez 4x4 "mutilado". Removemos duas casas de cantos opostos (digamos, duas pretas). Restam 14 casas: 8 brancas e 6 pretas (Figura 14).

Para que um emparelhamento perfeito existisse (cobertura por dominós), precisaríamos de um número igual de casas brancas e pretas, pois cada dominó consome um par de cores diferentes. Como restaram 8 casas brancas e apenas 6 pretas, é impossível cobrir o tabuleiro. Com toda a formulação teórica dos teoremas explicada, podemos resumir e comparar ambos através das seguintes tabelas:

Concluindo, o teorema de Tutte e Tutte-Berge possuem diversos paralelos teóricos que serão a seguir, aprofundados e demonstrados.

TABELA 1: RESUMO ESTRUTURAL: TEOREMAS DE TUTTE E TUTTE-BERGE

Problema	Caracterização de Emparelhamentos Perfeitos (Tutte) e de Emparelhamentos Máximos (Tutte-Berge).
Input	Estrutura do grafo G : componentes ímpares após remoção de subconjuntos $S \subseteq V(G)$; método estrutural baseado em princípios Min-Max.
Output	Tutte: G possui emparelhamento perfeito se $o(G - S) \leq S $ para todo $S \subseteq V(G)$. Tutte-Berge: o tamanho máximo do emparelhamento é $\frac{1}{2}(V(G) - \text{def}(G))$.
Resumo	Caracterização Min-Max: relaciona componentes ímpares, barreiras e deficiência à estrutura de emparelhamentos; fornece condição necessária e suficiente para emparelhamentos perfeitos e fórmula exata para emparelhamentos máximos.

TABELA 2: COMPARATIVO ENTRE OS TEOREMAS DE TUTTE E TUTTE-BERGE

Aspecto	Tutte	Tutte-Berge
Objetivo principal	Determinar a existência de um emparelhamento perfeito.	Determinar o tamanho máximo de um emparelhamento em qualquer grafo.
Caracterização	Existencial: condições para a existência de emparelhamento perfeito.	Quantitativa: fornece a cardinalidade de um emparelhamento máximo.
Conceitos estruturais	Componentes ímpares e emparelhamentos perfeitos.	Componentes ímpares, emparelhamentos máximos e barreiras.

V. DEMONSTRAÇÃO E CONTRIBUIÇÕES

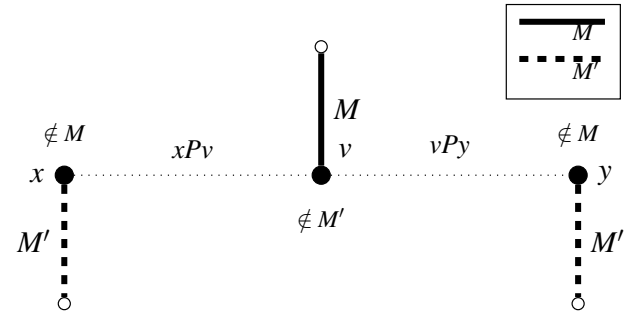
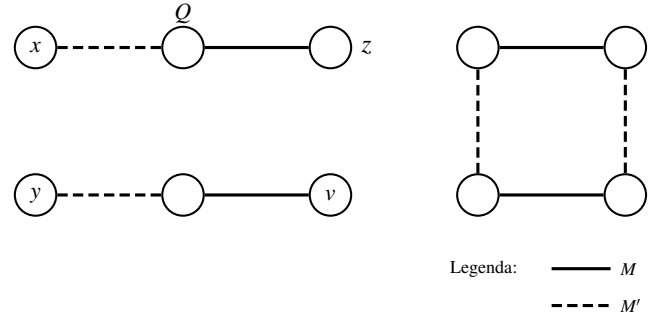
As demonstrações que serão apresentadas são aquelas descritas no livro *Graduate Texts in Mathematics*, conforme citam Bondy e Murty [7] a respeito do Teorema de Tutte-Berge e do Teorema de Tutte. Os teoremas em questão são a estrutura base para caracterizar emparelhamentos máximos e perfeitos apresentando condições necessárias e suficientes. Além disso, as demonstrações a seguir seguem um tratamento bem próximo do exposto por Bondy e Murty, mas apresentando-os de maneira mais clara.

O TEOREMA DE TUTTE-BERGE

Teorema V.1 (Bondy-Murty [7]). *O TEOREMA DE TUTTE-BERGE*

Todo grafo tem uma barreira.

Em um grafo bipartido, uma cobertura mínima constitui uma barreira do grafo. Porém, geralmente todo grafo tem uma barreira. Este fato é conhecido como o *Teorema de Tutte-Berge*. Entretanto, lembre-se de que um vértice v de um grafo G é essencial se todo emparelhamento máximo cobre v , e não essencial caso contrário. Assim, v é essencial se $\alpha'(G - v) = \alpha'(G) - 1$ e não essencial se $\alpha'(G - v) = \alpha'(G)$. Dessa maneira, temos os seguintes lemas auxiliares para o teorema:

**Figura 15:** Ilustração da indução com o emparelhamento M' cobrindo tanto x quanto y **Figura 16:** Ilustração dos componentes de $G[M\Delta M']$.

Lema 1 (16.8, Bondy-Murty [7]). O conjunto vazio é uma barreira de todo grafo hipoemparelhável.

Lema 2 (16.9, Bondy-Murty [7]). Seja v um vértice essencial de um grafo G e seja B uma barreira de $G - v$. Então $B \cup \{v\}$ é uma barreira de G .

Lema 3 (16.10, Bondy-Murty [7]). Seja G um grafo conexo no qual nenhum vértice é essencial. Então G é hipoemparelhável.

Prova Como nenhum vértice de G é essencial, G não tem um emparelhamento perfeito. Resta mostrar que todo subgrafo com um vértice removido tem um emparelhamento perfeito. Caso isso não ocorra, então cada emparelhamento máximo deixa pelo menos dois vértices descobertos. Assim, basta mostrar que para qualquer emparelhamento máximo e quaisquer dois vértices em G o emparelhamento cobre pelo menos um destes vértices. Estabelecemos isto por indução na distância entre estes dois vértices.

Considere um emparelhamento máximo M e dois vértices x e y em G . Seja xPy um caminho xy -mais curto em G . Suponha que nem x nem y são cobertos por M . Como M é máximo, P tem comprimento de pelo menos dois. Seja v um vértice interno de P . Como xPv é mais curto que P , o vértice v é coberto por M , por indução. Por outro lado, como v é não essencial, G tem um emparelhamento máximo M' que não cobre v . Além disso, como xPv e vPy são ambos mais curtos que P , o emparelhamento M' cobre tanto x quanto y , novamente por indução. \square

O vértice interno v é coberto por M (pois $xPv < P$), mas descoberto por M' (pois v não é essencial). Consequentemente, M' cobre x e y . Os componentes de $G[M\Delta M']$ são caminhos e ciclos pares cujas arestas pertencem alternadamente a M e M' .

Cada um dos vértices x, v, y é coberto por exatamente um dos dois emparelhamentos e , portanto, é uma extremidade de um dos caminhos. Como os caminhos são pares, x e y não são extremidades do mesmo caminho. Além disso, os caminhos que começam em x e y não podem ambos terminar em v .

Podemos, portanto, supor que o caminho Q que começa em x não termina nem em v nem em y . Mas então o emparelhamento $M' \Delta E(Q)$ é um emparelhamento máximo que não cobre nem x nem v , contradizendo a hipótese de indução e estabelecendo o lema. Também, deste teorema podemos deduzir um dos mais importantes Corolários dos teoremas de Tutte e Berge. Sendo ela, a *formula de Tutte-Berge*.

Antes de entrar em cálculos, serão retomadas as definições já dadas anteriormente e também, considere que o número total de vértices de um grafo G , denotado por $|V(G)|$, pode ser particionado em dois conjuntos: os vértices que são cobertos por um emparelhamento máximo M e os vértices que permanecem descobertos.

Seja $\alpha'(G) = |M|$ o tamanho do emparelhamento máximo. O número de vértices cobertos é, portanto, $2\alpha'(G)$. O número de vértices não cobertos é definido como a deficiência do grafo, denotada por $\text{def}(G)$. Assim, temos a identidade fundamental:

$$|V(G)| = 2\alpha'(G) + \text{def}(G) \quad (1)$$

Como já dito anteriormente, O Teorema de Tutte-Berge estabelece que a barreira para um emparelhamento perfeito reside na existência de um subconjunto $S \subseteq V(G)$ cuja remoção cria mais componentes ímpares do que o próprio $|S|$ consegue cobrir. Cada componente ímpar em $G - S$ deve, necessariamente, ter pelo menos um vértice não emparelhado internamente ou conectado a um vértice de S .

No pior caso (o que maximiza os vértices descobertos), a deficiência é dada por:

$$\text{def}(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{o(G - S) - |S|\} \quad (2)$$

Substituindo a equação (2) em (1), obtemos:

$$|V(G)| = 2\alpha'(G) + \max_{S \subseteq V(G)} \{o(G - S) - |S|\}$$

Para isolar $\alpha'(G)$, reorganizamos a equação. Note que subtrair o valor máximo de um conjunto é equivalente a somar o valor mínimo do termo negativo:

$$2\alpha'(G) = |V(G)| - \max_{S \subseteq V(G)} \{o(G - S) - |S|\}$$

$$2\alpha'(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|V(G)| - (o(G - S) - |S|)\}$$

Finalmente, dividindo por 2, chegamos à fórmula do Corolário:

$$\alpha'(G) = \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V(G)} \{|V(G)| - (o(G - S) - |S|)\} \quad (3)$$

Esta formulação confirma que o tamanho do emparelhamento máximo é determinado pela "barreira" S que minimiza a perda de vértices que não podem ser emparelhados devido à estrutura topológica do grafo.

Isso nos leva ao seguinte colário:

Corolário 1 (Bondy–Murty [7]). Para qualquer grafo G ,

$$\alpha'(G) = \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V(G)} \{|V(G)| - (o(G - S) - |S|)\}.$$

O resultado em questão fornece a fórmula de Tutte-Berge que caracteriza o tamanho de qualquer emparelhamento máximo em relação as barreiras correspondentes que sintetiza o *Teorema de Tutte-Berge*.

TEOREMA DE TUTTE

Teorema V.2 (Bondy–Murty [7]). Um grafo G tem um emparelhamento perfeito se, e somente se,

$$o(G - S) \leq |S| \quad \text{para todo } S \subseteq V(G). \quad (4)$$

Prova Demonstraremos ambas as direções da equivalência.

Necessidade (\Rightarrow):

Suponha que G possui um emparelhamento perfeito M . Devemos mostrar que $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.

Seja $S \subseteq V(G)$ um subconjunto arbitrário de vértices. Considere o grafo $G - S$ obtido após a remoção de todos os vértices de S e suas arestas incidentes. Seja C_1, C_2, \dots, C_k o conjunto de componentes ímpares de $G - S$.

Para cada componente ímpar C_i , o número de vértices $|V(C_i)|$ é ímpar. Como M é um emparelhamento perfeito em G , todos os vértices devem estar cobertos por M . Portanto, cada componente ímpar C_i deve ter pelo menos uma aresta de M conectando um vértice interno de C_i a um vértice em S (já que um número ímpar de vértices não pode ser perfeitamente emparelhado internamente).

Formalmente: como $|V(C_i)|$ é ímpar e M é perfeito em G , existe pelo menos um vértice $v_i \in V(C_i)$ tal que v_i está emparelhado com algum vértice $s_i \in S$.

Como as arestas de M são disjuntas nos vértices (cada vértice aparece em no máximo uma aresta), os vértices $s_1, s_2, \dots, s_k \in S$ que estão emparelhados com vértices das componentes ímpares devem ser distintos. Portanto, precisamos de pelo menos k vértices em S para cobrir todas as componentes ímpares.

Logo, $k = o(G - S) \leq |S|$, como queríamos demonstrar.

Suficiência (\Leftarrow):

Suponha, por contradição, que $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$, mas G não possui emparelhamento perfeito.

Como G não possui emparelhamento perfeito, seja M^* um emparelhamento máximo de G . Seja $U \subseteq V(G)$ o conjunto de vértices não cobertos por M^* . Por hipótese, $|U| \geq 1$ (se $|U| = 0$, então M^* seria perfeito, contradição).

Pelo Teorema de Tutte-Berge (Corolário 1), existe uma barreira $B \subseteq V(G)$ tal que

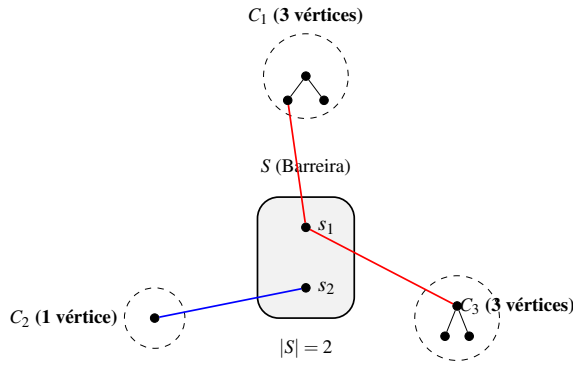
$$\text{def}(G) = o(G - B) - |B| = |U|. \quad (5)$$

Como $|U| \geq 1$, temos:

$$o(G - B) - |B| \geq 1 \Rightarrow o(G - B) \geq |B| + 1 > |B|.$$

Tomando $S = B$, obtemos que $o(G - S) > |S|$, o que **contradiz** diretamente a hipótese de que $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.

Portanto, nossa suposição inicial estava errada, e G deve possuir um emparelhamento perfeito. \square

**Violação da condição de Tutte:**

- Temos $o(G - S) = 3$ componentes ímpares: C_1, C_2, C_3
 - Temos $|S| = 2$ vértices disponíveis
 - Como $o(G - S) = 3 > 2 = |S|$, a condição (4) é violada
- Portanto, G não possui emparelhamento perfeito

Figura 17: Ilustração da violação da condição de Tutte.

A condição de Tutte (4) é uma caracterização *necessária e suficiente* para a existência de emparelhamentos perfeitos em grafos gerais, generalizando o Teorema de Hall para grafos não-bipartidos. A desigualdade $o(G - S) \leq |S|$ captura uma restrição estrutural fundamental: cada componente ímpar resultante da remoção de S necessita de pelo menos um vértice de S para completar o emparelhamento, e não pode haver mais componentes ímpares do que vértices disponíveis em S .

A Figura 17 ilustra um caso concreto onde a condição de Tutte falha. Os componentes C_1, C_2, C_3 são componentes ímpares de $G - S$, cada um contendo respectivamente 3, 1 e 3 vértices.

Para que exista um emparelhamento perfeito em G , cada componente ímpar precisaria estar conectada a pelo menos um vértice distinto em S (pois um conjunto com número ímpar de vértices não pode ser perfeitamente emparelhado internamente). Entretanto, como temos 3 componentes ímpares mas apenas $|S| = 2$ vértices em S , é matematicamente impossível satisfazer todos os emparelhamentos necessários.

Este exemplo demonstra que a desigualdade $o(G - S) > |S|$ constitui uma *obstrução estrutural* à existência de emparelhamentos perfeitos. Finalmente, é provada o teorema de Tutte-Berge e o teorema de Tutte, que terão seus resultados novamente avaliados e pensados na próxima sessão.

VI. RESULTADOS E REFLEXÕES

O trabalho realizado nesse artigo considerou grafos com ênfase na análise de suas propriedades de emparelhamento. Nos casos apresentados, foram mostrados cenários que não admitem emparelhamento perfeito, de tal forma descobrindo as condições que impedem sua ocorrência. Nesse tema, conceitos como componentes ímpares, barreiras e remoção de vértices constituíram elementos fundamentais para a formulação dos critérios analisados. De maneira específica, observou-se de que forma a remoção de um subconjunto $S \subseteq V(G)$ influencia o número de componentes ímpares de $G - S$, fornecendo elementos fundamentais para a compreensão estrutural do grafo.

O principal resultado identificado corresponde à car-

acterização dos grafos que permitem a existência de um emparelhamento perfeito, conforme estabelecido pelo Teorema de Tutte. Esse teorema determina que um grafo G possui emparelhamento perfeito se, e somente se, para todo subconjunto $S \subseteq V(G)$, o número de componentes ímpares de $G - S$ satisfaz a relação:

$$o(G - S) \leq |S|$$

O estudo comprova que a condição de Tutte possui natureza necessária e suficiente, servindo como uma conexão entre características globais (como a presença de um emparelhamento máximo) e as propriedades locais que resultam da partição do grafo em seus componentes ímpares.

Adicionalmente, o Teorema de Tutte-Berge permitiu quantificar o tamanho de um emparelhamento máximo mesmo em situações nas quais o grafo não admite emparelhamento perfeito. Essa quantidade é dada por:

$$\alpha'(G) = \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V(G)} \{ |V(G)| - (o(G - S) - |S|) \}.$$

e a deficiência do grafo é definida por:

$$\text{def}(G) = \max_{S \subseteq V(G)} (o(G - S) - |S|)$$

Esse resultado complementa o Teorema de Tutte ao oferecer uma medida precisa do grau de impossibilidade estrutural que impede o grafo de possuir um emparelhamento perfeito. A análise desses teoremas também permitiu identificar aspectos adicionais cruciais para a compreensão da teoria de emparelhamentos. Notou-se que as barreiras desempenham um papel essencial na caracterização dos grafos hipoemparlháveis, contribuindo para a análise de estruturas que impossibilitam a construção de emparelhamentos perfeitos.

Partindo para a perspectiva pedagógica, o caráter altamente figurativo das explicações do teorema e os exemplos como o Buddy System, tabuleiro multilado foram propostos como um material pedagógico para facilitar a compreensão dos alunos. Estes exemplos são feitos trazendo objetos e situações cotidianas como metáforas para a lógica dos teoremas, retirando do aluno a carga teórica que os livros didáticos possuem.

No caso do buddy system, o problema poderia ser demonstrado de forma prática dividindo a sala de aula entre times azul e laranja, também escolhendo um aluno como mediador. Dessa forma, o problema engajaria os alunos a aprofundarem seus pensamentos com a camada da experiência, escapando dos limites da teoria. Assim, o mesmo tipo de atividade pode ser feita com o tabuleiro multilado, dividindo a sala em grupos e distribuindo tabuleiros, o que motiva o aluno a ver como os grafos estão presentes no dia a dia. Isso não significa porém, o completo abandono da teoria, pois ferramentas como o *GraphViewer*[2] já citada anteriormente, permite a visualização da prova dos algoritmos o que aumenta a capacidade de aprendizado dos alunos, como demonstrado no próprio estudo.

Com tudo isso posto, a seção de considerações finais apresentará o resumo dos resultados, cumprimento dos objetivos, contribuições do estudo, limitações da pesquisa e sugestões futuras para pesquisas.

VII. CONCLUSÕES FINAIS

Os resultados obtidos permitiram caracterizar de maneira precisa as condições estruturais que determinam a existência ou inexistência de emparelhamentos perfeitos em grafos. O Teorema de Tutte mostrou-se fundamental nesse processo, uma vez que estabelece a relação entre o número de componentes ímpares e o tamanho dos subconjuntos de vértices removidos.

Constatou-se, além disso, que o Teorema de Tutte–Berge complementa essa análise ao quantificar o tamanho de um emparelhamento máximo mesmo quando o grafo não admite emparelhamento perfeito. Assim, verificou-se que ambos os teoremas fornecem uma descrição abrangente e operacional da estrutura dos emparelhamentos em grafos gerais.

Todos os objetivos traçados no início do estudo foram alcançados. O objetivo geral, que consistia em entender as condições que asseguram a existência de emparelhamentos perfeitos, foi cumprido por meio do exame detalhado das demonstrações e implicações dos Teoremas de Tutte e Tutte–Berge.

Os objetivos específicos também foram atendidos: o papel dos componentes ímpares foi elucidado, a noção de deficiência foi analisada como medida estrutural relevante, o conceito de barreira foi discutido no contexto de grafos hipoemparelháveis e a relação entre esses elementos e a formação de emparelhamentos máximos foi cuidadosamente explorada. Esses resultados demonstram que a investigação se desenvolveu de acordo com o que havia sido proposto.

O estudo apresenta contribuições teóricas ao sistematizar dois resultados centrais da teoria de emparelhamentos, destacando as relações entre componentes ímpares, barreiras e deficiência. A discussão reforça a relevância das formulações de Tutte para a compreensão estrutural dos grafos e evidencia a profundidade de suas implicações matemáticas.

Sob uma perspectiva prática, os resultados discutidos fornecem ferramentas analíticas importantes para problemas de alocação, otimização, modelagem combinatória e desenho de redes. A aplicabilidade dos teoremas de Tutte em diferentes áreas, como ciência da computação e pesquisa operacional, demonstra a utilidade das formulações estudadas.

Este estudo apresenta como principal limitação seu foco estritamente teórico, não abordando algoritmos computacionais para o cálculo de emparelhamentos máximos nem implementações práticas relacionadas. Além disso, não foram consideradas generalizações contemporâneas dos resultados de Tutte, como fatores k -regulares ou formulações baseadas em programação linear. Tais escolhas restringiram deliberadamente o escopo do trabalho, mantendo-o alinhado aos objetivos propostos, embora reduzam sua abrangência aplicada.

Com base nas limitações observadas, temos algumas possíveis pesquisas futuras. Uma possibilidade é explorar algoritmos eficientes para encontrar emparelhamentos máximos e perfeitos, analisando seu desempenho em grafos grandes ou específicos. Outra vertente, envolve estudar a aplicação dos teoremas em classes particulares de grafos, como bipartidos por exemplo.

Além disso, futuras pesquisas podem aprofundar as generalizações dos resultados apresentados, investigando fatores k -regulares, decomposições estruturais e conexões

com métodos algébricos e combinatórios modernos. Esses caminhos podem ampliar tanto o alcance teórico quanto a aplicabilidade prática dos conceitos discutidos.

REFERÊNCIAS

- [1] Y. Lassance, G. de Barros Bianchini, and T. Dias dos Santos, “Reflexões e práticas pedagógicas no escopo da disciplina de teoria da computação,” *Academic Journal on Computing, Engineering and Applied Mathematics*, vol. 6, no. 2, p. 10–17, out. 2025. [Online]. Available: <https://sistemas.uft.edu.br/periodicos/index.php/AJCEAM/article/view/21791>
- [2] M. O. Santos, J. C. J. de Freitas, G. F. Silva, and E. L. Bispo Jr, “Validação de um sistema de visualização de algoritmos no ensino de provas por indução em teoria dos grafos,” in *Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE)*. SBC, 2020, pp. 1613–1622.
- [3] R. P. Santos, H. A. Costa, A. M. Resende, and J. M. Souza, “O uso de ambientes gráficos para ensino e aprendizagem de estruturas de dados e de algoritmos em grafos,” in *Anais do XVI Workshop sobre Educação em Computação, XXVIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação*. sn, 2008, pp. 157–166.
- [4] A. C. Correa, A. Lyra, Y. B. Lima, and G. Xexéo, “Formígrafo: um jogo para motivar ao aprendizado de teoria de grafos,” in *Simpósio Brasileiro de Jogos e Entretenimento Digital (SBGames)*. SBC, 2022, pp. 1096–1100.
- [5] Z. Qu and D. B. West, “Another proof of the generalized tutte–berge formula for f -bounded subgraphs,” *arXiv preprint arXiv:2307.01324*, 2023.
- [6] D. B. WEST, *INTRODUCTION TO GRAPH THEORY SECOND EDITION*(p.174). Patparganj, India: Prentice Hall, 1999.
- [7] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*. London: Macmillan, 1976.

