

Teoria dos Grafos: O Problema de Coloração de Arestas em Grafos

Graph Theory: The Edge Coloring Problem in Graphs

Lean de Albuquerque Pereira¹, Tiago Castro Barbosa¹, Daniel Martins da Silva¹ e Tanilson Dias dos Santos¹

¹ Universidade Federal do Tocantins, Ciência da Computação, Tocantins, Brasil

Data de recebimento do manuscrito: 03/12/2025

Data de aceitação do manuscrito: 30/01/2026

Data de publicação: 10/02/2026

Resumo—A teoria dos grafos, impulsionada historicamente pela conjectura de Francis Guthrie em 1852 e pela subsequente prova do Teorema das Quatro Cores, evoluiu de curiosidades topológicas para ferramentas essenciais de modelagem. Este trabalho foca especificamente no Problema de Coloração de Arestas, abordando-o sob uma perspectiva histórica e rigorosamente formal. Inicialmente, o texto contextualiza a transição dos problemas de coloração de mapas para a coloração de arestas, destacando sua relevância prática em otimização de redes e agendamento. O núcleo da discussão aprofunda-se na análise do Teorema de Vizing, que estabelece limites precisos para o índice cromático de grafos simples, situando-o entre o grau máximo e o grau máximo acrescido de uma unidade. Serão dissecados os principais lemas e as condições estruturais que determinam se um grafo pertence à Classe 1 ou Classe 2. Ao explorar a complexidade inerente a essa classificação, o artigo serve como uma referência pedagógica, elucidando como restrições locais de adjacência ditam o comportamento global em sistemas complexos.

Palavras-chave—Coloração de Grafos, Problema das Quatro Cores, Teorema de Vizing, Otimização Combinatória, Modelagem.

Abstract—Graph theory, historically propelled by Francis Guthrie's 1852 conjecture and the eventual proof of the Four Color Theorem, has evolved from a collection of topological curiosities into a set of essential modeling tools. This work specifically targets the Edge Coloring Problem, addressing it through a lens that is both historical and rigorously formal. Initially, the text contextualizes the conceptual shift from map coloring to edge coloring, emphasizing its practical applicability in critical areas such as network optimization and scheduling. The core discussion deepens into an analysis of Vizing's Theorem, which establishes precise boundaries for the chromatic index of simple graphs, positioning it strictly between the maximum degree and the maximum degree plus one. Key lemmas and structural conditions determining whether a graph falls into Class 1 or Class 2 are dissected. By exploring the inherent complexity of this classification, this article serves as a pedagogical reference, clarifying how local adjacency constraints dictate global behavior in complex systems.

Keywords—Graph Coloring, Four Color Problem, Vizing's Theorem, Combinatorial Optimization, Modeling.

I. INTRODUÇÃO

A Teoria dos Grafos é uma ferramenta de modelagem versátil, oriunda da matemática, mas de escopo fundamental para a ciência da computação. Sua capacidade de representar e modelar relações complexas em sistemas diversos – desde redes neurais e clusters de computadores até a otimização logística de trabalhadores e rotas aéreas – a torna fascinante e diretamente aplicável a problemas cotidianos. Ao traduzir situações reais para uma linguagem matemática precisa, os grafos permitem abstrair a complexidade do

mundo físico, revelando a estrutura lógica subjacente aos problemas de conexão e conflito.

Nesse contexto, o estudo de coloração em grafos remonta ao século XIX, originado pelo que pode ser visto como o problema gerador da área: o famoso “Problema das Quatro Cores”. A história inicia-se em 1852 com o matemático e botânico sul-africano Francis Guthrie. Ao tentar colorir mapas de condados da Inglaterra, Guthrie observou que talvez fosse possível colorir qualquer mapa plano utilizando apenas quatro cores, de modo que regiões vizinhas não compartilhassem a mesma cor. Embora a conjectura tenha sido formulada em correspondências privadas naquela época, ela foi formalmente apresentada à comunidade científica por Cayley em 1879 [1] e discutida pelo próprio Guthrie em nota posterior [2]. A curiosidade inicial deflagrou uma das mais longas e produtivas buscas por uma prova matemática.

Dados de contato: Lean de Albuquerque Pereira,
lean.albuquerque@uft.edu.br

A primeira prova da conjectura surgiu apenas em 1879, apresentada pelo matemático inglês Alfred Kempe [3]. Aceita por uma década, a demonstração foi refutada em 1890, quando erros estruturais foram encontrados. Diversas soluções foram propostas subsequentemente, mas a confirmação definitiva da conjectura ocorreu somente em 1976, pelos matemáticos Kenneth Appel e Wolfgang Haken, da Universidade de Illinois [4, 5]. Contudo, parte dessa prova utilizava computadores para verificar milhares de casos, fato que gerou resistência na comunidade matemática da época, que ansiava por uma demonstração puramente analítica.

Embora o "Problema das Quatro Cores" trate essencialmente da coloração de vértices (ou faces), ele pavimentou o caminho para variantes igualmente profundas, como o Problema de Coloração de Arestas, foco central deste trabalho. Diferente de colorir regiões, colorir arestas busca atribuir rótulos às conexões de um grafo de tal forma que arestas incidentes a um mesmo vértice não compartilhem a mesma cor. Esse tipo de modelagem é vital para cenários onde o conflito não está nos objetos (vértices), mas na utilização simultânea de canais de comunicação ou horários, sendo o índice cromático o parâmetro que define a eficiência máxima dessa alocação.

Para além do panorama histórico internacional, aparece com prestígio também a contribuição brasileira no desenvolvimento da Teoria dos Grafos. O Brasil consolidou-se como um pólo de excelência mundial nesta área, impulsionado por pesquisadores cujos trabalhos são referência na literatura contemporânea. Dentre eles, destacam-se as contribuições de Jayme Luiz Szwarcfiter [6], fundamental na estruturação da pesquisa em algoritmos e grafos no país; Cláudio L. Lucchesi [7], renomado por seus trabalhos seminais, incluindo o célebre Teorema de Lucchesi-Younger em grafos direcionados; e Nelson Maculan [8], uma referência global em otimização combinatória. Contextualizar o problema de coloração de arestas envolve, portanto, reconhecer essa robusta tradição acadêmica nacional que alia rigor teórico a aplicações computacionais de ponta.

Neste artigo queremos portanto demonstrar de forma pedagógica o problema de coloração de arestas, assegurando ao leitor compreender a evolução desses conceitos, culminando na análise de dois pilares teóricos fundamentais, o Teorema de König [9], que soluciona o problema para grafos bipartidos relacionando-o ao grau máximo, e o Teorema de Vizing [10], que estabelece os limites estritos para grafos simples. Ao detalhar essas condições, busca-se absorver a robustez matemática que sustenta a classificação dos grafos e suas aplicações contemporâneas.

A seguir abordaremos o tópico por entre quatro seções subsequentes. A *Seção II* estabelece as definições preliminares e a notação fundamental, introduzindo conceitos estruturais como grau máximo e emparelhamento. Na *Seção III*, exploramos a natureza do problema, discutindo intuitivamente os limites cromáticos e apresentando os lemas auxiliares de Bondy e Murty que fundamentam a otimização de cores. A *Seção IV* é dedicada à demonstração formal dos dois pilares da teoria: o Teorema de König para grafos bipartidos e o Teorema de Vizing para grafos simples. Por fim, a *Seção V* apresenta as conclusões e uma síntese dos resultados obtidos.

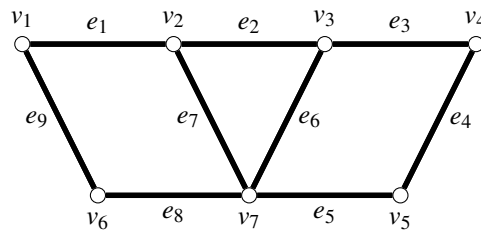


Figura 1: Representação Gráfica do Grafo G_1 .

II. PRELIMINARES

Para compreender a profundidade do Problema de Coloração de Arestas, é necessário primeiro estabelecer a linguagem comum da Teoria dos Grafos. Nesta seção, definimos as estruturas fundamentais, as propriedades de conectividade e os parâmetros que governam a complexidade desses sistemas. As definições foram extraídas de [6, 11].

Formalmente, um *grafo* $G = (V, E)$ é uma estrutura matemática composta por dois conjuntos fundamentais: um conjunto não vazio V de *vértices* e um conjunto E de pares não-ordenados de vértices, denominados *arestas*. Denotamos uma aresta qualquer e , como $e = (a, b)$, onde a e b são vértices do grafo e dizemos que a e b são *extremos* (ou *extremidades*) da aresta e . Ainda, a aresta e é dita *incidente* aos vértices a e b [6].

Neste contexto, os vértices (V) representam os objetos ou entidades do sistema, como computadores, pessoas ou interseções, enquanto as arestas (E) representam as conexões ou relações diretas entre esses objetos.

Um grafo qualquer, digamos G_1 , pode ser representado de várias maneiras, por exemplo, de forma geométrica como pode ser visto na *Figura 1*. Cada vértice é simbolizado com um círculo, e os segmentos de retas que os conectam são as arestas do grafo. Denotamos como $V(G)$ e $E(G)$ o conjunto de vértices e arestas do grafo G , respectivamente. Por exemplo, para o grafo G_1 , denotamos sua estrutura como:

$$\begin{aligned} V(G_1) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} \\ E(G_1) &= \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_7), \\ &\quad (v_7, v_3), (v_3, v_7), (v_5, v_7), (v_6, v_7)\} \end{aligned}$$

Dois vértices são *adjacentes* (ou vizinhos) se existe uma aresta que incide em ambos os vértices. Analogamente, duas arestas são *adjacentes* se possuem uma extremidade em comum [6].

Por exemplo, em G_1 , v_1 e v_2 são vértices adjacentes, pois existe uma aresta que incide (conecta) ambos os vértices: $e_1 = (v_1, v_2)$. Por outro lado, os vértices v_1 e v_5 não são adjacentes, uma vez que não existe aresta que os conectam. Similarmente, considerando a aresta e_2 , temos que e_1 e e_2 são adjacentes, pois possuem uma extremidade em comum (v_2). No entanto, as arestas e_1 e e_4 não são adjacentes.

Seguindo as definições clássicas de Bondy e Murty [11], estabelecemos duas propriedades essenciais para o escopo deste trabalho. Primeiramente, um grafo G é dito *finito* se o seu conjunto de vértices e arestas é finito. Em segundo lugar, um grafo é classificado como *simples* se ele não possui *laços* (uma aresta com início e fim no mesmo vértice) e não possui duas ou mais arestas que incidem no mesmo par de vértices

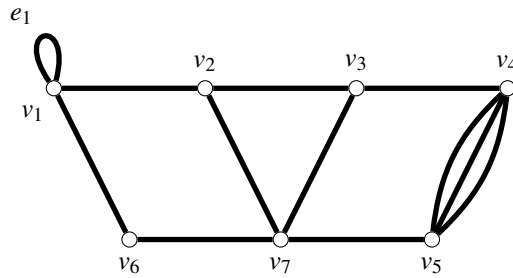


Figura 2: Grafo G_2 (exemplo de grafo não simples).

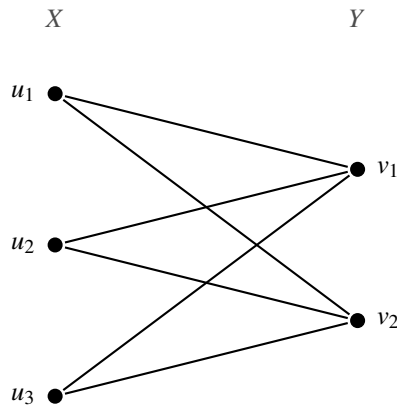


Figura 3: Grafo bipartido $K_{3,2}$ ilustrando a partição de vértices em X e Y .

(arestas múltiplas). Por exemplo, o grafo G_2 (Figura 2) não é simples, pois possui três arestas que conectam v_4 e v_5 e ainda possui um laço, representado pela aresta e_1 . Por outro lado, o grafo G_1 é simples.

Um grafo $G = (V, E)$ é dito *bipartido* se o seu conjunto de vértices V pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos, digamos X e Y , de tal forma que toda aresta de G conecta um vértice de X a um vértice de Y . Consequentemente, não existem arestas com ambas as extremidades no mesmo subconjunto. A Figura 3 exemplifica esta propriedade através do grafo completo $K_{3,2}$.

Um dos conceitos mais críticos para problemas de coloração é o *grau* de um vértice. O grau de um vértice v , denotado por $d(v)$, é definido como o número de arestas incidentes a ele. Na Figura 4, destacamos dois exemplos importantes: o vértice v_1 possui apenas duas arestas incidentes (destacadas em azul), logo $d(v_1) = 2$; já o vértice v_7 comporta-se como o elemento de maior conectividade (destacadas em vermelho). A partir dessa definição local, derivamos o parâmetro global mais importante para este trabalho: o *Grau Máximo* ($\Delta(G)$). Ele representa o maior valor de grau encontrado entre todos os vértices. No nosso exemplo, como nenhum vértice supera v_7 , temos que $\Delta(G_1) = 4$.

Em um grafo definimos *Caminho* (P_n) como sendo uma sequência de vértices adjacentes sem repetição. Na Figura 5, a sequência $v_1 v_6 v_7 v_5$ (destacada em azul) constitui um caminho válido (P_4), conectando o vértice v_1 ao v_5 através do interior do grafo. Em contrapartida, a sequência $v_1 v_2 v_1 v_6$ não forma um caminho, pois o vértice v_1 se repete. Um *Ciclo* (C_n) consiste em um caminho cujo vértice de início é igual ao vértice de fim, fechando um circuito. O destaque em vermelho exemplifica um ciclo C_3 , de tamanho 3 (um triângulo): $v_2 v_3 v_7 v_2$. [6]

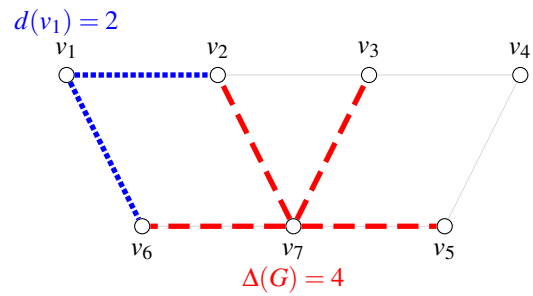


Figura 4: Visualização dos graus do grafo G_1 .

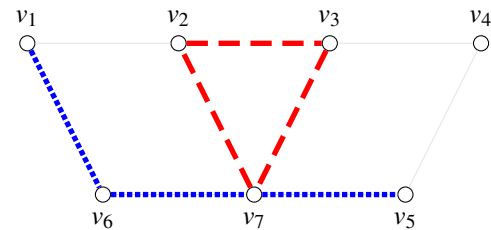


Figura 5: Exemplos de subestruturas em G_1 : um Caminho aberto (azul) e um Ciclo fechado (vermelho).

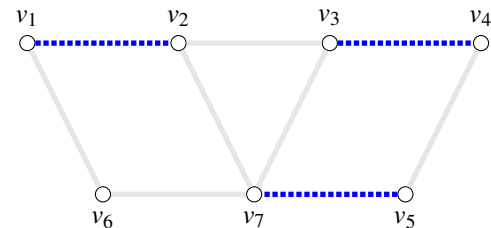


Figura 6: Um emparelhamento no grafo G_1 (em azul).

Um grafo G é denominado *conexo* quando existe caminho para cada par de vértices; do contrário, o grafo é dito ser *desconexo* [6]. Por exemplo, o grafo G_1 é conexo uma vez que para cada dois vértices quaisquer sempre existe um caminho que os conecta. Em contrapartida, considere que as arestas verdes da figura 6 juntamente com os seus vértices formem um grafo. Este, seria desconexo já que, por exemplo, não existe um caminho que conecta os vértices v_1 e v_7 .

Finalmente, chegamos ao conceito de *emparelhamento* (*matching*). Um emparelhamento em um grafo G é um conjunto de arestas $M \subseteq E$ tal que nenhuma aresta de M é adjacente a outra; em outras palavras, nenhum vértice do grafo incide em mais de uma aresta de M [11].

Na Figura 6, destacamos em azul um emparelhamento formado pelas arestas $\{(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_7)\}$. Note a característica visual mais importante: essas três arestas são totalmente independentes e não compartilham nenhum vértice comum (elas "não se tocam"). Esse conceito é a base estrutural da coloração de arestas, pois em uma coloração válida, todas as arestas pintadas com uma mesma cor formam, obrigatoriamente, um emparelhamento.

III. TRABALHOS RELACIONADOS

A Teoria dos Grafos constitui uma importante área tanto no âmbito teórico e prático. No campo teórico sua importância é um reflexo da existência de muitos problemas ainda em estudo ou mesmo sem solução, o que incentiva a escrita de trabalhos acadêmicos na área e formação de

grupos de pesquisas na universidade [6]. Por outro lado, o tema é também extremamente relevante do ponto de vista prático com aplicações que surgem nas mais diversas áreas como na química (modelagem de estrutura de moléculas); no planejamento de rotas de tráfego aéreo com menor distância; na engenharia e obviamente na computação [12]. Portanto, são muitos os trabalhos que buscam contribuir pedagogicamente no ensino Teoria dos Grafos de formas mais acessível, haja vista sua importância prática e teórica.

Silva [12], em sua dissertação, tem como proposta de trabalho introduzir a Teoria dos Grafos no ensino fundamental. Para isso ele propõe uma abordagem evidentemente mais lúdica para assim motivar os alunos ao aprendizado, e escolhe problemas que sejam mais próximos ao cotidiano dos alunos como o problema de caminhos. Segundo o autor, o trabalho não só contribui para professores que desejam lecionar o conteúdo, mas também para qualquer pessoa que tem interesse no assunto.

Csóka, Lippner e Pikhurko [?], em seu estudo investigaram o problema de coloração de arestas em *Graphings*, segundo os autores: "Um graphing é uma generalização analítica de um grafo de grau limitado que aparece em várias áreas, como limites de grafos esparsos e teoria de equivalência de órbitas." Eles mostraram tanto o Teorema de König e o Teorema de Vizing poderiam ser generalizados para essa classe de grafos.

Em seu artigo Müller e Bayer [13] apresentam uma possibilidade pedagógica para a abordagem de Teoria dos Grafos nos anos finais do ensino fundamental, através de um desafio lúdico adaptado por eles. Tal atividade além de divertir os alunos faz uma exposição branda sobre a estrutura de um grafo (vértices, arestas, grau) e conceitos relacionados como conexidade e planaridade.

Soares [14] em seu trabalho, apresenta três teoremas em Teoria dos Grafos e suas respectivas provas em detalhes e estruturadamente, com o intuito de encorajar a inclusão de Tópicos de Grafos no Ensino Médio. Os teoremas apresentados: Teorema das Cinco Cores, Teorema da Galeria de Arte, e Teorema da Amizade foram escolhidos ainda por possuírem um certo apelo estético a auxiliar na conclusão do objetivo de seu estudo.

Finalmente, um trabalho feito por Yasser e Bianchii [15] que, apesar de ser da área de Teoria da Computação, se propõe a fazer uma reflexão e discutir sobre Práticas Pedagógicas no escopo da disciplina de Teoria da Computação. Conforme os autores, o uso de abordagens alternativas como seminários, auxiliou na compreensão dos conceitos que são expostos tradicionalmente de maneira mais abstrata e gerou um maior índice de satisfação na disciplina.

Na próxima seção introduziremos definições e conceitos que serão utilizadas nesta pesquisa para abordar o Problema de Coloração de Arestas.

IV. COLORAÇÃO DE ARESTAS

Intuitivamente, como o próprio nome sugere, uma *coloração* de arestas consiste em atribuir k rótulos às arestas de um grafo qualquer onde cada rótulo pode ser interpretada como uma cor.

Formalmente, uma k -coloração de arestas de um grafo G sem laços, pode ser descrita não apenas como uma atribuição de rótulos, mas estruturalmente como uma partição

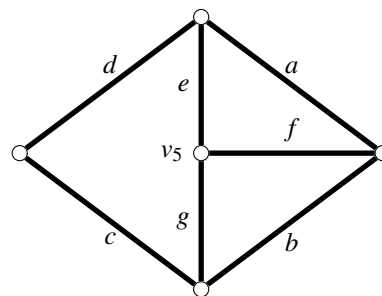


Figura 7: Grafo G_2 Fonte: Bondy e Murty(1976)

do conjunto de arestas E em k subconjuntos (E_1, E_2, \dots, E_k) . Desta forma, cada subconjunto E_i representa as arestas de uma mesma cor. Se as arestas de cada subconjunto E_i forem não adjacentes, dizemos que a coloração é *própria* [11]. Se um grafo G admite uma coloração própria com k cores, dizemos que G é k -colorível.

Sob a ótica da Teoria dos Grafos, nota-se que esse conjunto de arestas independentes corresponde exatamente à definição de *emparelhamento* (*matching*) vista na seção anterior. Portanto, colorir as arestas de um grafo G equivale a particionar sua estrutura em uma coleção de emparelhamentos distintos (M_1, M_2, \dots, M_k) .

Por exemplo, considere o grafo G_2 (Figura 7). Podemos definir uma coloração $\mathcal{C} = (\{a, b, c, d\}, \{e, f\}, \{g\})$. Podemos interpretar essa partição da seguinte forma: as arestas a, b, c e d colorimos com uma cor qualquer, digamos c_1 ; as arestas e e f recebem a cor c_2 e a aresta g recebe a cor c_3 . Obviamente essa coloração não é própria uma vez que existem arestas adjacentes que receberam a mesma cor (por exemplo, as arestas a, b, c, d).

Por outro lado, considere a coloração $\mathcal{C}' = (\{a, g\}, \{b, e\}, \{c, f\}, \{d\})$. Novamente, isso pode ser interpretado como uma atribuição de cores da seguinte forma: as arestas a e g recebem a cor c'_1 ; as arestas b e e recebem a cor c'_2 ; as arestas c e f recebem a cor c'_3 e a aresta d recebe a cor c'_4 . Dessa vez, note que não existe arestas adjacentes com uma mesma cor. Portanto, \mathcal{C}' é uma coloração própria e percebe-se que cada conjunto de arestas dessa partição forma um *emparelhamento*.

Dizemos ainda que uma determinada cor c é *representada em um vértice v* , se existe alguma aresta incidente a v que possua a cor c . Por exemplo, para o grafo G_1 e considerando a coloração \mathcal{C}' as cores c_1, c_2, c_3 são representadas no vértice v_5 , uma vez que, as arestas e, f e g , incidem em v_5 e possuem as cores c_1, c_2, c_3 .

Dessa perspectiva, surge um questionamento natural: "Qual a menor quantidade de cores necessária para pintar as arestas deste grafo sem gerar conflitos de incidência?". A resposta define um dos parâmetros fundamentais da área: o *índice cromático*, denotado por $\chi'(G)$. Este parâmetro representa o número mínimo de emparelhamentos distintos necessários para cobrir todas as arestas de um grafo de forma válida. No exemplo do grafo G_2 , o leitor pode conferir que 4 é o menor número de cores possível para realizar uma coloração própria em G_2 . Portanto $\chi'(G_2) = 4$.

Ao buscarmos o índice cromático, deparamo-nos imediatamente com uma restrição física imposta pela própria estrutura do grafo. Considere o vértice mais "congestionado" do sistema, isto é, aquele que possui o maior número de conexões

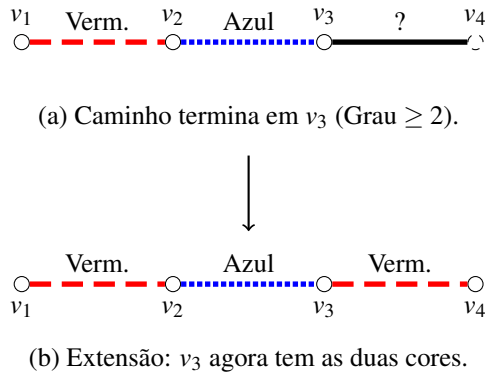


Figura 8: Ilustração esquemática da propriedade de extensibilidade.

(o grau máximo, denotado por $\Delta(G)$).

A lógica é trivial: se olharmos novamente para o vértice v_7 da Figura 1 (Seção 2), vemos que ele possui 4 conexões. É fisicamente impossível colorir essas 4 arestas incidentes com apenas 3 cores sem que duas delas compartilhem a mesma cor e causem um conflito. Esse “gargalo” local impõe, portanto, um limite inferior global para todo o sistema:

$$\chi'(G) \geq \Delta(G) \quad (1)$$

Essa desigualdade estabelece que são necessárias, *pelo menos*, tantas cores quanto o grau máximo. A questão central que a teoria busca responder é: será que esse mínimo é suficiente? Para alguns para alguns tipos de grafos, como os *grafos bipartidos*, a resposta é afirmativa, como veremos a seguir.

Para avançarmos da intuição para a prova formal de que grafos bipartidos atingem o limite inferior $\Delta(G)$, necessitamos de uma ferramenta auxiliar que garanta a distribuição equilibrada de cores. Bondy e Murty apresentam um resultado técnico fundamental, conhecido no livro como *Lema 6.1.1* [11]. Para fins didáticos, chamaremos este resultado de *Lema das Duas Cores*.

A intuição por trás deste lema é uma questão de paridade. Sabemos que ciclos ímpares são as únicas estruturas que impedem uma 2-coloração perfeita (onde arestas alternam cores). Se removermos essa restrição, ganhamos controle sobre a incidência de cores nos vértices.

“*Lema das Duas Cores:* Seja G um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Então, G possui uma 2-coloração de arestas na qual ambas as cores estão representadas em cada vértice de grau pelo menos dois.”

Para visualizar a ideia construtiva deste lema, imagine que nosso objetivo é traçar um caminho pelo grafo, pintando as arestas alternadamente em *Vermelho* e *Azul*, conforme ilustrado esquematicamente na Figura 8.

Ao passarmos por um vértice intermediário (como o vértice v_2 na Figura 8-a), necessariamente entramos por uma cor e saímos pela outra. Isso garante que v_2 possui ambas as cores representadas. O problema surge apenas nos vértices que habitam a *extremidade* do caminho (como o vértice v_3), pois eles estariam em contato com apenas uma aresta colorida neste trajeto.

A genialidade do lema reside na *extensibilidade*, demonstrada na parte (b) da Figura 8. Se o caminho termina em um

vértice que ainda tem outras arestas não coloridas (ou seja, grau ≥ 2), podemos simplesmente *expandir* o caminho por essa nova aresta usando a cor alternada.

Podemos repetir esse processo até que o caminho termine em um vértice sem saída ou feche um ciclo. O lema garante que, exceto no caso específico do ciclo ímpar (onde a alternância de cores trava ao fechar o ciclo), sempre conseguimos ajustar caminhos para que nenhum vértice de grau igual ou maior que dois fique com uma cor só.

Além da existência de colorações, é importante definir uma forma para compará-las. Dada uma k -coloração \mathcal{C} de G , denotamos por $c(v)$ o número de cores distintas representadas no vértice v .

Intuitivamente, um vértice não pode “ver” mais cores do que o número de arestas que chegam a ele. Portanto, temos a desigualdade trivial:

$$c(v) \leq d(v) \quad (2)$$

A igualdade $c(v) = d(v)$ ocorre se, e somente se, a coloração é *própria* em torno de v (ou seja, todas as arestas incidentes têm cores diferentes). Com base nisso, definimos o conceito de *melhoria (improvement)*. Dizemos que uma coloração \mathcal{C}' é uma melhoria sobre \mathcal{C} se a soma global de cores distintas observadas pelos vértices aumenta:

$$\sum_{v \in V} c'(v) > \sum_{v \in V} c(v) \quad (3)$$

Uma k -coloração é dita *ótima* se ela não pode ser melhorada. Esse conceito de “otimalidade” é a chave para as provas construtivas que virão a seguir: a ideia é começar com uma coloração qualquer e “melhorá-la” iterativamente até atingir uma coloração onde a regra de adjacência seja satisfeita para o maior número possível de vértices.

Com o conceito de otimização já estabelecido, podemos finalmente analisar quais os fatores que impedem uma coloração de ser perfeita.

Suponha que atingimos uma k -coloração ótima \mathcal{C} . Agora, imagine que essa coloração ainda não é a “ideal” em um vértice u : a cor i está faltando em u , mas a cor j aparece repetida. Isso indica um desequilíbrio local.

Intuitivamente, gostaríamos de trocar algumas arestas da cor j por i para equilibrar a distribuição. O *Lema 6.1.2* de Bondy e Murty, aqui chamado de *Lema do Obstáculo em Ciclos Ímpares*, nos diz exatamente quando isso *não* é possível.

“*Lema do Obstáculo em Ciclos Ímpares:* Seja \mathcal{C} uma k -coloração ótima de G . Se existe um vértice u onde a cor i não aparece, mas a cor j aparece pelo menos duas vezes, então a componente conexa formada apenas pelas arestas dessas duas cores (i e j) que contém u é, necessariamente, um *ciclo ímpar*.”

A prova dessa afirmação conecta-se diretamente ao Lema das Duas Cores e pode ser visualizada na Figura 9.

Perceba que No vértice u , temos duas arestas azuis (j) e nenhuma vermelha (i), tentar consertar isso alterando as cores ao longo do ciclo apenas deslocaria o problema para v_1 ou v_2 , sem resolver o conflito globalmente. Se a componente contendo u não fosse um ciclo ímpar, poderíamos aplicar a

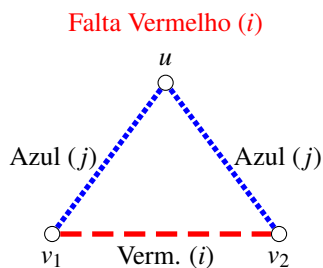


Figura 9: O obstáculo do ciclo ímpar.

lógica da extensibilidade vista anteriormente para re-colorir essa componente de modo que u passasse a ter ambas as cores (i e j). Isso faria com que o número de cores distintas em u aumentasse ($c(u)$ subiria em 1), sem prejudicar os outros vértices, criando uma coloração “melhor”.

Como partimos da premissa de que a coloração original já era *ótima* (impossível de melhorar), essa re-coloração é impossível. Logo, a única explicação geométrica que trava essa melhoria é que estamos presos na estrutura rígida mostrada na Figura 9: um ciclo ímpar.

V. O TEOREMA DE KÖNIG

Com base na fundamentação estabelecida, alcançamos o ponto de convergência desta primeira parte. Os lemas anteriores construíram uma narrativa clara: a otimização de uma coloração só é bloqueada estruturalmente pela presença de *ciclos ímpares*.

Para contextualizar a importância do que vem a seguir, vale ressaltar que, quando o matemático húngaro Dénes König publicou este resultado em 1916 [9], a Teoria dos Grafos ainda nem existia como disciplina autônoma. König, que mais tarde escreveria o primeiro livro-texto da área, chegou a este teorema estudando a decomposição de matrizes e determinantes. Ele percebeu que certas estruturas algébricas poderiam ser traduzidas geometricamente para o que hoje chamamos de grafos bipartidos, provando que, nessas estruturas “bem-comportadas”, a complexidade do problema desaparece.

A elegância da sua conexão reside no fato de que, por definição, a propriedade fundamental de um *grafo bipartido* é a ausência completa de ciclos de comprimento ímpar. Se a única barreira topológica para a otimização perfeita é o ciclo ímpar, e os grafos bipartidos são desprovidos dessa estrutura, a conclusão lógica é inevitável.

“Teorema de König (1916): Se G é um grafo bipartido, então seu índice cromático é exatamente igual ao seu grau máximo, ou seja, $\chi'(G) = \Delta(G)$.”

Para visualizar o porquê deste teorema funcionar, imagine que os vértices do grafo estão divididos em dois times rivais, *Time A* e *Time B*, e as arestas representam partidas entre eles. Em um grafo bipartido, um time nunca joga contra si mesmo; as arestas sempre ligam A a B.

Se tentarmos colorir as arestas (agendar os jogos) e encontrarmos um conflito que exige uma troca de cores em cadeia, essa cadeia de trocas funcionaria como um movimento de “ping-pong”, ilustrado na Figura 10.

Para que um conflito seja insolúvel (como vimos no Lema anterior), essa cadeia precisaria fechar um ciclo ímpar mas

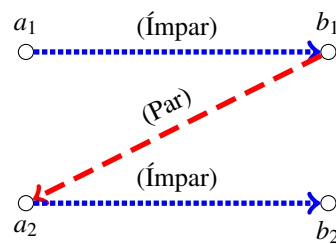


Figura 10: Qualquer caminho de comprimento ímpar termina necessariamente no time oposto.

se observarmos o movimento na figura veremos que *Passo 1 (Ímpar)*: Sai de A \rightarrow Chega em B, *Passo 2 (Par)*: Sai de B \rightarrow Volta para A, *Passo 3 (Ímpar)*: Sai de A \rightarrow Chega em B. Isso mostra que se nosso intuito for fechar um ciclo e voltar ao vértice de origem (que está em A), é necessário, obrigatoriamente, um número *par* de passos pois é impossível sair de A e voltar para A com um número ímpar de movimentos, pois estaríamos fisicamente no lado do Time B.

Podemos concluir portanto que o “curto-circuito” cromático do ciclo ímpar nunca acontece, sempre conseguimos resolver os conflitos locais e organizar as arestas em exatamente Δ rodadas (cores) perfeitas.

O Teorema de König representa, como vimos, o cenário ideal na coloração de arestas: uma classe de grafos onde a topologia colabora perfeitamente com a alocação de recursos, garantindo que o limite inferior natural (Δ) seja sempre suficiente. Nesses casos, não há desperdício e a estrutura bipartida assegura a inexistência dos conflitos cíclicos que impediriam a otimização.

Contudo, a modelagem de sistemas complexos frequentemente nos confronta com grafos que não possuem essa propriedade. O que acontece quando a restrição é levantada e os ciclos ímpares, como um simples triângulo, são reintroduzidos na estrutura? A intuição poderia sugerir que, sem a garantia de König, o número de cores necessárias poderia crescer descontroladamente acima do grau máximo.

A resposta para o caso geral foi descoberta quase cinquenta anos depois e revela um resultado surpreendente: mesmo na presença de ciclos ímpares e estruturas complexas, o “caos” cromático é extremamente limitado. O índice cromático nunca se afasta muito do ideal estabelecido por König, oscilando em um intervalo restrito de apenas dois valores possíveis.

VI. O TEOREMA DE VIZING

O Teorema de Vizing [10] constitui um outro resultado clássico no problema de coloração de arestas. Em seu trabalho, ele mostrou que existia um limite superior para o índice cromático de um multigrafo. Um multigrafo é um grafo que possui mais de uma aresta que conecta um mesmo par de vértices (veja a figura 2). Contudo, o presente trabalho trata de grafos simples, então para cada par de vértices há somente uma aresta que os conecta. Sob essas hipóteses, o Teorema de Vizing possui o seguinte enunciado:

“Seja G um grafo simples. Então vale a desigualdade: $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ ”

Uma vez que o índice cromático de um grafo é um número inteiro, o teorema diz que para qualquer grafo G simples, o seu índice cromático ou é igual ao grau máximo de G ou então é maior por uma unidade apenas. Esse é um resultado extremamente útil na construção de algoritmos para coloração própria e mínima, pois implica que precisamos apenas examinar dois conjuntos de colorações, o que reduz bastante o espaço de busca [16]. A primeira desigualdade é trivial e pode ser vista na seção IV em (1). A dificuldade reside na segunda desigualdade.

Na literatura existem vários tipos de provas da segunda parte: por indução e construção por exemplo. Neste texto usaremos o tipo de demonstração por *contradição*.

No enunciado do teorema temos duas proposições: $p = "G$ é um grafo simples" e $q = "\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1"$. Queremos mostrar que a ocorrência de p implica q . A estrutura da prova é a seguinte: assumimos que p ocorre mas negamos a proposição q , ou seja, assumimos o contrário daquilo que queremos provar, e assim teremos uma nova proposição diferente:

"Seja G um grafo simples. Então $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$ "

Com base nessa proposição, nós faremos uma série de deduções lógicas válidas, e eventualmente chegaremos à conclusão de ser falso um fato já provado ser verdade. Mas isso é uma contradição, então a única explicação para essa incoerência lógica é ter suposto inicialmente que $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$. Então se essa proposição é falsa, sua negação é verdadeira e portanto: $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. [17]

O teorema de Vizing divide os grafos que satisfazem as hipóteses do teorema em duas classes, de acordo com seu índice cromático; se um grafo G satisfaz $\chi'(G) = \Delta(G)$ ele é dito ser de *classe 1*, se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ ele é de *classe 2* [18].

Para compreender melhor essa classificação, é útil visualizar como a topologia do grafo impõe restrições locais. A distinção fundamental reside na capacidade da estrutura em acomodar emparelhamentos sem gerar conflitos insolúveis. Conforme ilustrado na Figura 11, um ciclo par (C_4), por ser um grafo bipartido, permite uma alternância perfeita de índices (representados pelos números 1 e 2), satisfazendo $\chi'(G) = \Delta(G) = 2$ e classificando-se como Classe 1. Em contrapartida, um ciclo ímpar (C_5) apresenta um impasse estrutural: ao tentar alternar os índices 1 e 2, a última aresta conecta vértices que já possuem incidências de ambos, obrigando o uso de um terceiro índice (número 3). Isso resulta em $\chi'(G) = 3 = \Delta(G) + 1$, caracterizando o grafo como Classe 2.

Uma curiosidade interessante é que Holyer [19] mostrou que, dado um grafo G , decidir se ele é de Classe 1 ou de Classe 2 é um *problema NP-completo*. De forma simplificada, problemas NP-completos são problemas de decisão cuja solução, uma vez proposta, pode ser verificada de forma fácil, porém encontrar sua solução é difícil [6]. Por exemplo, dada uma coloração de arestas \mathcal{C} qualquer sobre um grafo G , é fácil verificar se essa coloração é de Classe 1: basta checar se a coloração é própria e se utiliza exatamente $\Delta(G)$ cores. No entanto, decidir se existe tal coloração entre o enorme número de possibilidades é um problema computacionalmente difícil.

Na seção a seguir, veremos as demonstrações dos dois

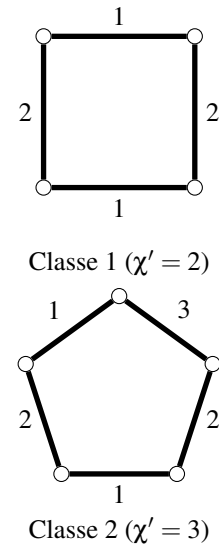


Figura 11: Comparação visual utilizando numeração nas arestas: O ciclo par (C_4) usa apenas rótulos 1 e 2, enquanto o ciclo ímpar (C_5) necessita do rótulo 3.

teoremas propostos.

VII. DEMONSTRAÇÃO E CONTRIBUIÇÕES

Estabelecidas as condições estruturais e os lemas auxiliares sobre a distribuição de cores, o texto avança para a formalização dos dois pilares centrais da coloração de arestas.

Demonstra-se inicialmente o *Teorema de König*, provando que a ausência de ciclos ímpares em grafos bipartidos garante que o índice cromático atinja seu limite inferior natural (Δ). Subsequentemente, a análise expande-se para a classe dos grafos simples gerais. Mediante o método de redução ao absurdo e argumentos de recoloração, demonstra-se o célebre *Teorema de Vizing*. Este estabelece que, mesmo na presença de estruturas cíclicas ímpares, o índice cromático excede o grau máximo em no máximo uma unidade.

Ambas as demonstrações fundamentam-se na estrutura lógica apresentada por Bondy e Murty [11], utilizando os conceitos de otimização cromática e emparelhamentos definidos preliminarmente.

O Teorema de König enuncia-se da seguinte maneira.

Teorema de König VII.1. *Seja G um grafo bipartido. Então a igualdade abaixo se verifica*

$$\chi'(G) = \Delta(G). \quad (4)$$

Proof. A demonstração da igualdade utiliza o método de redução ao absurdo. Assume-se a falsidade da tese para obter uma contradição estrutural.

Seja G um grafo bipartido e suponha-se, por contradição, que $\chi'(G) > \Delta(G)$. Considere $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \dots, E_\Delta)$ uma Δ -coloração ótima das arestas de G . Como o grafo não é Δ -colorível propriamente, existe necessariamente um vértice u onde o número de cores presentes é inferior ao grau do vértice, satisfazendo a condição

$$c(u) < d(u) \quad (5)$$

Essa desigualdade implica uma falha na distribuição das cores em u . Especificamente, existem cores i e j tais que a cor

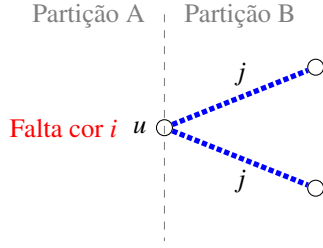


Figura 12: Defeito cromático em u : repetição da cor j (azul) e ausência da cor i (vermelha).

i não está representada em u (falta), enquanto a cor j aparece pelo menos duas vezes (repetição). A Figura 12 ilustra essa configuração local, onde o vértice u possui duas arestas azuis (j) e nenhuma aresta vermelha (i).

Aplica-se neste ponto o *Lema das duas cores* (Lema 6.1.2 de Bondy & Murty). Segundo este resultado, se tal falha ocorre em uma coloração ótima, a componente conexa do subgrafo induzido apenas pelas cores i e j que contém u deve ser, obrigatoriamente, um *ciclo ímpar*.

Entretanto, tal conclusão gera uma contradição topológica imediata com a natureza do grafo G . A definição de grafo bipartido exige que o conjunto de vértices possa ser dividido em dois subconjuntos disjuntos, A e B , onde toda aresta conecta um vértice de A a um de B .

Para que um ciclo exista, é necessário sair de uma partição e retornar a ela. Como cada passo na trilha alterna de partição ($A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow \dots$), retornar ao vértice de origem exige necessariamente um número par de passos. Consequentemente, *é impossível existir um ciclo de comprimento ímpar em um grafo bipartido*.

Visto que a existência do ciclo ímpar exigido pelo lema é impossível, a suposição inicial de que $\chi'(G) > \Delta(G)$ revela-se falsa. Portanto, conclui-se que $\chi'(G) = \Delta(G)$. \square

Vejam os a seguir a demonstração de um outro importante teorema relacionado ao Problema de Coloração de Arestas em Grafos.

Teorema de Vizing VII.2. *Seja G um grafo simples. Então:*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1. \quad (6)$$

Proof. Seja G um grafo simples. Suponha por absurdo que $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$. Seja $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \dots, E_{\Delta(G)+1})$ uma $(\Delta + 1)$ -coloração das arestas de G e seja u um vértice tal que:

$$c(u) < d(u) \quad (7)$$

Note que o vértice u existe, pois assumimos (por contradição) que o grafo G não é $(\Delta + 1)$ -colorível. Assim deve existir pelo menos um vértice tal que uma mesma cor esteja representada nele, exatamente o que o item (7) exprime (Lembre que $c(v)$ denota o número de cores distintas representadas em um dado vértice v). Então, existem certas cores i_0 e i_1 tais que: i_0 não está representado em u , e i_1 está representado pelo menos duas vezes em u . Esse fato ocorre porque, para todo vértice de G , em particular para u , segue que $d(u) < \Delta(G) + 1$ e a coloração que estamos usando possui $\Delta(G) + 1$ cores, logo pelo menos uma cor não é usada em u , o que justifica a existência de i_0 . A existência da cor i_1 é

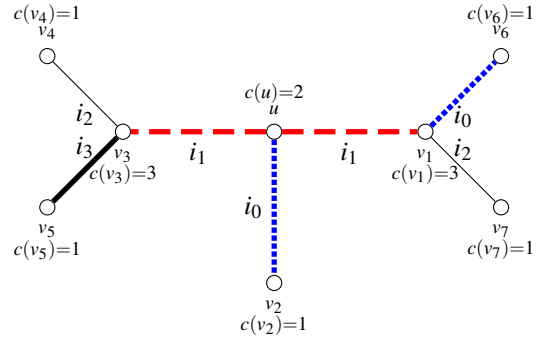


Figura 13: Grafo G com coloração c_0

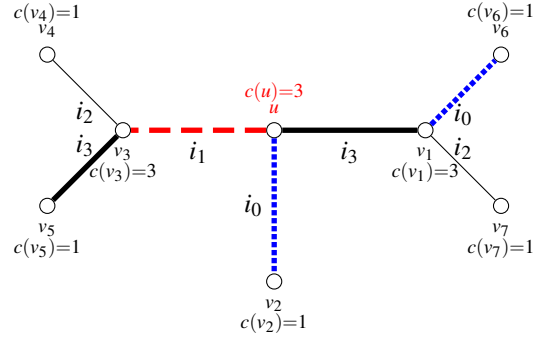


Figura 14: Grafo G com coloração c'_0

consequência de (5). Seja uv_1 uma aresta que possua a cor i_1 . Agora considere a seguinte asserção:

- (i): “Uma vez que $d(v_1) < \Delta(G) + 1$ existe uma cor i_2 que não é representada em v_1 . Note que i_2 necessariamente deve estar representada em u . Do contrário, poderíamos recolorir a aresta uv_1 com a cor i_2 e assim obter uma melhoria na nossa coloração, o que contradiz a hipótese dela ser ótima.”

Vejam os um exemplo para compreender melhor o item (i). Considere o grafo G (figura 13), cujo grau máximo vale 3 (Naturalmente, o argumento também é válido se G fosse um grafo maior, o que importa é olhar localmente para o vértice u que sabemos que existe). Assim, a coloração denotada por c_0 é composta por 4 cores, denotadas por i , onde:

$$c_0 = \{i_0, i_1, i_2, i_3\}$$

Note que, o somatório do número de cores distintas que são representadas em cada vértice é 13, isto é, $\sum c(v) = 13$. A cor preta não é representada no vértice em u e nem em v_1 . Crie uma nova coloração c'_0 onde aresta uv_1 se torna da cor preta e o restante das arestas permanecem inalteradas. Para essa nova coloração, o somatório do número de cores distintas representadas em cada vértice é 14: $\sum c'(v) = 14$ (Figura 14). Ou seja, conseguimos melhorar a nossa coloração c_0 , o que é uma contradição pois supomos que tal coloração era ótima. Portanto o item (i) é de fato verdadeiro.

Então sabemos que existe alguma aresta diferente de uv_1 que possui a cor i_2 , chamemos ela de uv_2 . Novamente, temos que $d(v_1) < \Delta(G) + 1$, logo existe uma cor i_3 que não é representada em v_2 . Por um raciocínio totalmente análogo ao feito em (i), a cor i_3 deve necessariamente estar representada em u , do contrário, seria possível fazer uma melhoria na

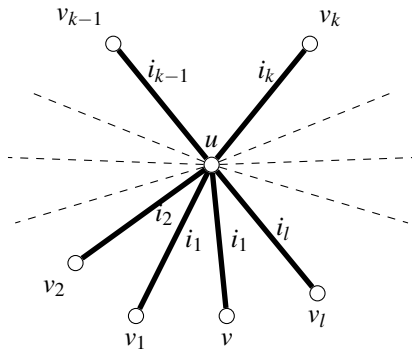


Figura 15: Estrutura gerada em u . Fonte: Bondy e Murty(1976)

coloração ϕ atribuindo a cor i_2 à aresta uv_1 e a cor i_3 à aresta uv_2 . Assim deve existir uma aresta uv_3 com a cor i_3 .

Continuando com esse procedimento, construiremos uma sequência de vértices v_1, v_2, \dots e uma sequência de cores i_1, i_2, \dots que possui as seguintes propriedades:

- (a) A aresta uv_j possui a cor i_j .
- (b) A cor i_{j+1} não aparece na aresta uv_j .
- (c) Como estamos considerando um grafo simples finito, u possui grau finito, e em algum momento as cores começarão a se repetir nas arestas de u .

Graficamente, podemos ver a estrutura construída (Figura 15). Nela podemos ver todas as arestas adjacentes a u , sendo que a cor i_1 é representada duas vezes e a cor i_0 não é representada nenhuma vez. A cor i_2 não é representada em v_1 mas é representada em v_1 , a cor i_3 não é representada em v_2 porém é representada em i_3 do contrário, como já discutimos, seria possível reatribuir cores às arestas do grafo de modo a obter uma melhoria para a $\Delta(G) + 1$ -coloração, o que geraria uma contradição pois supomos que tal coloração é máxima (e assim por diante para as demais cores). Agora faremos recolorações no grafo G de forma a manter sua otimalidade.

A primeira coloração se dará da seguinte forma: a aresta uv_j receberá a cor da aresta uv_{j+1} com $1 \leq j \leq k-1$. Aqui, as cores das arestas de uv_1 até uv_k são todas distintas, e depois da aresta uv_k as cores começam a se repetir seguindo a propriedade (c) dessa estrutura construída. Na prática estamos apenas deslocando as cores uma unidade no sentido anti-horário: a aresta uv_{k-1} receberá a cor i_k , a aresta uv_{k-2} recebe a cor i_{k-1} , ..., a aresta uv_2 recebe a cor i_3 , a aresta uv_1 recebe a cor i_2 (Figura 16).

Note que a nova coloração $\mathcal{C}' = (E'_1, E'_2, \dots, E'_{\Delta(G)+1})$ também é uma $\Delta(G) + 1$ -coloração ótima, pois na estrutura que construímos, a cor i_{j+1} não aparece na aresta u_j (propriedade (b)). Ou seja a quantidade de cores distintas representadas em cada vértice permanece inalterada. Por exemplo, observe a aresta uv_1 . Antes a cor i_2 não era representada nela (do contrário teríamos uma contradição), isto é, nenhuma outra aresta diferente uv_1 possuía a cor i_2 em v_1 . Agora surge a questão: e se v_1 tiver uma aresta wv_1 com a cor i_1 ? Se isso ocorresse, ao colorir uv_1 com i_2 haveria uma melhoria na coloração (uma contradição). Logo estamos trocando uma cor (i_1) que só aparece uma vez em v_1 por outra (i_2) que irá aparecer apenas uma vez em v_1 . O

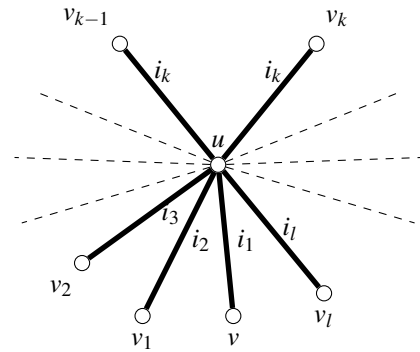


Figura 16: 1ª recoloração. Fonte: Bondy e Murty(1976)

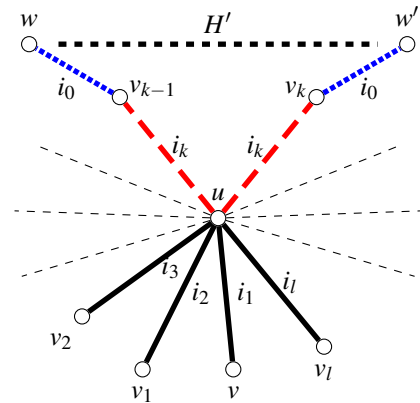


Figura 17: Ciclo ímpar formado pela componente H' . Fonte: Adaptado Bondy e Murty(1976).

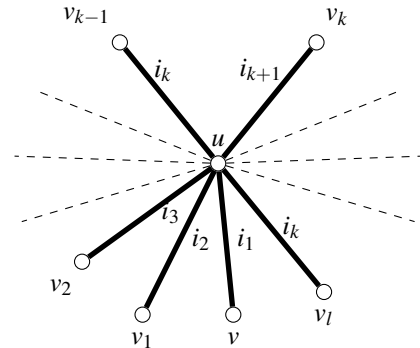


Figura 18: 2ª recoloração. Fonte: Bondy e Murty(1976)

mesmo vale para os demais vértices. Veja que a coloração só altera essa região específica, o restante do grafo permanece da mesma forma.

Então estamos diante de uma $\Delta(G) + 1$ -coloração ótima, onde o vértice u possui uma cor que não é representada nele (i_0 por hipótese) e um outra cor que é representada pelo menos 2 vezes (i_k). Assim pelo *Lema do Obstáculo em Ciclos Ímpares* visto na sessão IV, a componente conexa H' formada pelas arestas das cores i_0 e i_k , isto é, $H' = G[E'_{i_0} \cup E'_{i_k}]$ é um ciclo ímpar e contém o vértice u (Figura 17).

Agora faremos uma segunda recoloração. Cada aresta uv_j receberá a cor i_{j+1} com $k \leq j \leq l-1$, e para aresta uv_l atribuímos a cor i_k (Figura 18). A lógica aqui é muito semelhante à primeira parte, só que agora estamos considerando as arestas que não foram coloridas na primeira fase. Assim a aresta uv_k receberá a cor i_{k+1} , a aresta uv_{k+1} receberá a cor i_{k+2} , ..., a aresta uv_{l-1} receberá a cor i_l . O

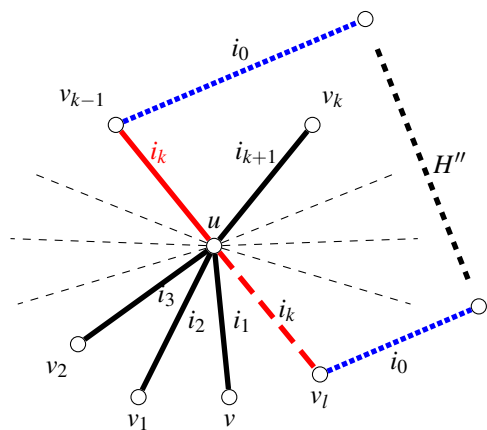


Figura 19: Ciclo ímpar formado pela componente H'' . Fonte: Bondy e Murty(1976)

único ponto a se atentar é que diferença é cor i_k à aresta uv_l , isso ocorreu porque uma vez que o grau de u é finito, haverá uma repetição de cor, isto é, haverá um l tal que $i_{l+1} = i_k$, onde i_k é justamente uma cor que já ocorreu em algum vértice anterior. Perceba que essa segunda coloração $\mathcal{C}'' = (E''_1, E''_2, \dots, E''_{\Delta(G)+1})$ também é uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração ótima por um argumento análogo ao aquele usado na primeira coloração. Novamente, pelo *Lema do Obstáculo em Ciclo Ímpares*, a componente: $H'' = G[E''_{i_0} \cup E''_{i_k}]$ é um ciclo ímpar e contém u (Figura 19).

Note que como a componente H' é conexa, então sempre existirá um caminho de u até v_{k-1} e de v_{k-1} até v_k . No nosso exemplo esse caminho é: $uv_{k-1}ww'v_k$. Esse caminho continuará existindo na segunda coloração, pois nela nós consideramos apenas as arestas com as cores de k até $l-1$, e o caminho citado surge nas arestas de cores 1 até $k-1$. É importante notar que a cada recoloração, nós modificamos apenas partes localizadas do grafo, o restante se mantém inalterado. Desse modo, a componente H'' contém o vértice v_k e seu grau é um. Temos portanto uma contradição, pois H'' é um ciclo ímpar e não pode ter vértices com grau um. Essa falha lógica surgiu porque supomos inicialmente que $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$. Então segue que: $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, o que encerra a demonstração. \square

Como foi dito na seção VI, o Teorema possui uma grande importância para algoritmos de coloração de arestas. Apesar desse tópico principal deste trabalho, será interessante tecer alguns comentários.

A estrutura que construímos na demonstração(15), onde temos um vértice central(u) e demais outros vértices adjacentes que seguem algumas propriedades(VII) é conhecida na literatura como *Fan* ou *Vizing's Fan*(Fan de Vizing) [20]. Alguns autores definem essa estrutura explicitamente e outros não(como no caso do Bondy e Murty). Contudo, a vantagem de definir essa estrutura e juntamente realizar a demonstração por construção do Teorema de Vizing é que obtemos um *algoritmo para coloração própria de arestas* que utiliza no máximo $\Delta(G) + 1$ cores.

O algoritmo de coloração de arestas baseado na prova construtiva do Teorema de Vizing é conhecido como *Algoritmo de Coloração de Arestas de Mista Gries*, e leva o nome dos autores que propuseram a rotina [21]. Uma

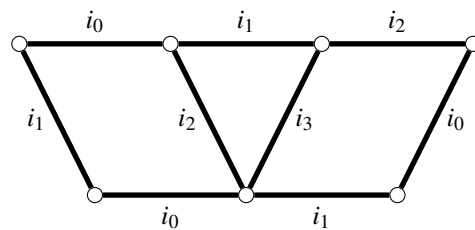


Figura 20: Grafo G_1 .

implementação do algoritmo na linguagem de programação *Python* pode ser vista em [22].

Exemplo:

Vamos utilizar um exemplo para melhor visualizar a aplicação prática do Teorema de Vizing. Suponha que desejamos colorir propriamente o grafo G_1 da seção I(figura 20)

Perceba que nesse grafo, $\Delta(G_1) = 4$. Portanto, pelo *Teorema de Vizing*, o número de cores necessárias para colorir o grafo propriamente não será maior que $\Delta(G_1) + 1 = 4 + 1 = 5$. De fato, o leitor poderá verificar que não é possível colorir esse grafo com menos de 5 cores. Definamos a coloração $c_0 = \{i_0, i_1, i_2, i_3\}$, onde cada $i_j (0 \leq j \leq 3)$ representa uma cor distinta. A coloração pode ser vista na figura:

Uma observação importante é que poderíamos ter um grafo G cujo índice cromático fosse menor que $\Delta(G) + 1$ (seção VIII). Contudo isso não invalida o teorema pois o valor $\Delta(G) + 1$ é um limite superior, ou seja, a garantia é que não será preciso mais que $\Delta(G) + 1$ cores para colorir um grafo G simples e finito qualquer.

VIII. APLICAÇÕES

A Coloração de Arestas de Grafos possui uma série de aplicações práticas, tais como planejamento de rotas, tráfego em redes e muitas outras [23]. Nesta seção trataremos de um problema bastante interessante: O Problema de Programação de Tabelas Esportivas. Utilizaremos como referência o trabalho de Januário (2015) [24].

Um torneio do tipo *round a robin*(todos contra todos), é um competição que envolve t times diferentes que disputam entre si uma quantidade j de jogos. Por exemplo, para $t = 4$ e $j = 1$ teremos um torneio em que, cada time disputa contra os demais 3 uma vez. Nesse cenário 2 questionamentos poderiam surgir: como elaborar uma agenda de jogos de modo que, os times não disputem não mais que uma partida em uma mesma rodada e quantas rodadas seriam necessárias? Podemos responder essas pergunta utilizando os conhecimentos aprendidos até aqui sobre grafos.

Em primeiro lugar, note que podemos facilmente modelar a estrutura do torneio da seguinte forma: defina um grafo $G = (V, E)$, onde os vértices representam os times do torneio e as arestas representam as partidas que devem ocorrer entre eles. Consideremos $t = 4$ e $j = 1$, ou seja, 4 times t_1, t_2, t_3 e t_4 que disputam uma partida entre si. O grafo que representa a estrutura desse torneio pode ser vista na figura 21.

Agora devemos encontrar uma forma de garantir que nas rodadas que se seguirão cada time jogue apenas uma partida. Isso pode ser feito utilizando as técnicas de Coloração de Arestas. Definimos então uma coloração \mathcal{C} em que cada cor

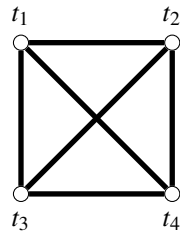


Figura 21: Grafo que representa o torneio

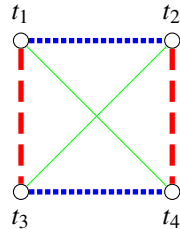


Figura 22: Grafo que representa o torneio, colorido

representa uma rodada do torneio. Observe que buscamos uma coloração do grafo G que seja própria. A coloração sendo própria, garantimos que nenhuma aresta adjacente a qualquer um dos vértices tenha a mesma cor, ou seja, cada partida ocorrerá em uma rodada diferente, e não haverão conflitos.

Sendo assim, estamos aptos a resolver a questão acerca do número de rodadas necessárias para realizar esse torneio. Responder isso é equivalente a reponder: quantas cores são necessárias para obter uma coloração própria de G ? Pelo teorema de Vizing, sabemos que o melhor valor é que funciona para todos os casos é $\Delta(G) + 1 = 3 + 1 = 4$ cores. Obviamente, para valores maiores também é possível obter uma coloração própria, mas é de interesse usar a menor número de cores, pois implica que teremos um menor número de rodadas. Note também que o grafo do torneio usado como exemplo pode ser colorido propriamente com 3 cores, pois como ele é bipartido, pelo Teorema de Kőnig, $\chi'(G) = \Delta(G)$. Porém o limite superior fornecido pelo Teorema de Vizing é melhor no sentido de que, funciona para todos os casos possíveis, mesmo se o grafo do torneio não for bipartido.

O segundo passo seria então aplicar algum algoritmo de coloração própria de arestas no grafo G (sabendo que será preciso não mais que 4 cores) obtendo portanto, o agendamento das partidas. Uma solução pode ser vista na figura 22. Note que, a coloração resolve o problema pois, nenhum vértice (time) possui mais de uma aresta (partida) cuja cor (horário) é o mesmo.

IX. RESULTADOS E REFLEXÕES

A base teórica da coloração de arestas encontra-se bem consolidada na literatura, todavia a complexidade dos argumentos construtivos e das técnicas de recoloração iterativa impõe frequentemente barreiras ao aprendizado em nível de graduação.

O mérito central deste trabalho reside não apenas na demonstração formal, mas na sistematização visual desses raciocínios. Ao decompor as restrições estruturais e os impeditivos topológicos em diagramas sequenciais, evidenciou-se a natureza local do problema. A análise permitiu demonstrar que, enquanto certas classes de grafos

com propriedades específicas permitem uma alocação ótima de recursos garantindo que o índice cromático iguale o grau máximo ($\chi' = \Delta$), a generalização para estruturas mais complexas acarreta, no pior caso, o incremento de apenas uma cor adicional ($\chi' \leq \Delta + 1$).

A expectativa é que este material atue como um instrumento pedagógico facilitador, permitindo que estudantes das áreas de Computação e Matemática transitem da intuição geométrica para o rigor analítico das provas formais com maior fluidez e compreensão.

X. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo revisitou o Problema de Coloração de Arestas, partindo de suas raízes históricas no Problema das Quatro Cores até a formalização contemporânea. A análise comparativa entre a estrutura rígida dos grafos bipartidos e a flexibilidade dos grafos simples permitiu compreender como propriedades topológicas (como a paridade de ciclos) ditam os limites de alocação de recursos.

Conclui-se que a abordagem geométrica e iterativa é essencial para a compreensão profunda do Índice Cromático. A dificuldade inerente em conciliar o rigor matemático com a clareza didática foi mitigada pelo uso extensivo de representações visuais, que serviram como âncoras cognitivas para as abstrações lógicas.

Como trabalhos futuros, sugere-se a expansão desta análise para o Teorema de Vizing generalizado para multigrafos, onde a multiplicidade das arestas introduz novas variáveis à desigualdade cromática. Espera-se que este material sirva como referência pedagógica, facilitando o ensino de Otimização Combinatória e Teoria dos Grafos em cursos de Computação e Matemática.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Cayley, "On the colouring of maps," *Proceedings of the Royal Geographical Society and Monthly Record of Geography*, vol. 1, no. 4, pp. 259–261, 1879.
- [2] F. Guthrie, "Note on the colouring of maps," *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 10, pp. 727–728, 1880.
- [3] A. B. Kempe, "On the geographical problem of the four colours," *American Journal of Mathematics*, vol. 2, p. 193, 1879.
- [4] K. Appel and W. Haken, "Every planar map is four colorable," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 82, no. 5, pp. 711–712, 1976.
- [5] —, "Every planar map is four colorable. part i: Discharging," *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 21, no. 3, pp. 429–490, 1977.
- [6] J. L. Szwarcfiter, *Teoria computacional de grafos: os algoritmos*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.
- [7] C. L. Lucchesi and D. H. Younger, "A minimax theorem for directed graphs," *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 2, no. 3, pp. 369–374, 1978.
- [8] N. Maculan, "The steiner tree problem," *Annals of Operations Research*, vol. 13, no. 1, pp. 53–70, 1987.
- [9] D. König, "Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre," *Mathematische Annalen*, vol. 77, pp. 453–465, 1916.
- [10] V. G. Vizing, "On an estimate of the chromatic class of a p-graph," *Diskretnyi Analiz*, vol. 3, pp. 25–30, 1964.
- [11] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*. New York: Elsevier, 1976.

- [12] L. P. da Silva, “Aplicação da teoria dos grafos no ensino médio à luz das contribuições do PROFMAT,” Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2016, orientador: Dr. Fábio dos Santos.
- [13] J. G. Müller and T. Baier, “Teoria dos grafos: uma possibilidade pedagógica para o ensino fundamental,” *Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana*, vol. 12, no. 2, 2021.
- [14] F. V. S. Soares, “Três teoremas interessantes em teoria dos grafos,” Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017, orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.
- [15] Y. M. L. D. V. Y. Cantafede, G. de Barros Bianchini, and T. D. dos Santos, “Reflexões e práticas pedagógicas no escopo da disciplina de teoria da computação,” *Academic Journal on Computing, Engineering and Applied Mathematics*, vol. 6, no. 2, pp. 10–17, oct 2025.
- [16] S.-i. Nakano, X. Zhou, and T. Nishizeki, *Edge-coloring algorithms*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1995, pp. 172–183.
- [17] D. J. Velleman, *How to Prove It: A Structured Approach*, 3rd ed. Cambridge University Press, 2019.
- [18] R. Diestel, *Graph Theory*, 5th ed. Berlin: Springer Publishing Company, Incorporated, 2017.
- [19] I. Holyer, “The np-completeness of edge-coloring,” *SIAM Journal on Computing*, vol. 10, no. 4, pp. 718–720, 1981.
- [20] M. Stiebitz, D. Scheide, B. Toft, and L. Favrholt, *Graph Edge Coloring: Vizing’s Theorem and Goldberg’s Conjecture*, ser. CourseSmart. Wiley, 2012.
- [21] J. Misra and D. Gries, “A constructive proof of vizing’s theorem,” *Information Processing Letters*, vol. 41, no. 3, pp. 131–133, 1992. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002001909290041S>
- [22] M. A. Maldonado, “An implementation of the misra & gries edge coloring algorithm and its integration on sagemath,” Curitiba, 2023.
- [23] P. Formanowicz and K. Tanaś, “A survey of graph coloring - its types, methods and applications,” *Foundations of Computing and Decision Sciences*, vol. 37, 09 2012.
- [24] T. Januario, S. Urrutia, C. C. Ribeiro, and D. de Werra, “Edge coloring: A natural model for sports scheduling,” *European Journal of Operational Research*, vol. 254, no. 1, pp. 1–8, 2016. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221716301667>