

Reprodução e Contribuições Pedagógicas: Casamento Máximo em Grafos Bipartidos e suas Generalizações

Reproduction and Pedagogical Contributions: Maximum Matching in Bipartite Graphs and its Generalizations

Vitória Milhomem Soares¹, Matheus de Sousa Silva¹, Daniel Martins da Silva¹ e Tanilson Dias dos Santos¹

¹ Universidade Federal do Tocantins, Ciência da Computação, Tocantins, Brasil

Data de recebimento do manuscrito: 01/12/2025

Data de aceitação do manuscrito: 05/01/2026

Data de publicação: 10/02/2026

Resumo—Este artigo apresenta um estudo didático sobre o problema do *Casamento Máximo* em grafos, com ênfase na estrutura de grafos bipartidos e suas generalizações. O objetivo é reproduzir resultados fundamentais que fogem da abordagem clássica de König e Hall. Para isso, exploramos o Teorema de Tutte, que condiciona o emparelhamento perfeito à análise de componentes ímpares, e o Teorema de Dilworth, que estabelece uma dualidade com conjuntos parcialmente ordenados (posets). A metodologia emprega a análise de provas, utilizando técnicas de redução e decomposição, acompanhada de exemplos lúdicos e visualizações estratégicas. Como resultados centrais, demonstramos que a condição de Tutte é o obstáculo estrutural universal para o emparelhamento perfeito, e que a equivalência de Dilworth é a base para a eficiência algorítmica, como exemplificado pelos trabalhos de Kameda e Munro. Em conclusão, este estudo preenche lacunas conceituais e oferece uma contribuição pedagógica significativa, tornando o rigor da Teoria dos Grafos mais acessível a estudantes de graduação e promovendo uma visão unificada sobre a existência de emparelhamentos e coberturas de cadeias.

Palavras-chave—Casamento Máximo, Teorema de Tutte, Teorema de Dilworth, Kameda-Munro, Didática em Grafos.

Abstract—This paper presents a didactic study on the Maximum Matching problem in graphs, with an emphasis on bipartite graph structures and their generalizations. The objective is to reproduce fundamental results that move beyond the classical approach of König and Hall. To this end, we explore Tutte's Theorem, which conditions perfect matching on the analysis of odd components, and Dilworth's Theorem, which establishes a duality with partially ordered sets (posets). The methodology employs the analysis of proofs, utilizing techniques of reduction and decomposition, accompanied by illustrative examples and strategic visualizations. As central results, we demonstrate that Tutte's condition is the universal structural obstacle to perfect matching, and that Dilworth's equivalence establishes a rigorous reduction between poset decomposition and bipartite matching, enabling efficient polynomial-time solutions as exemplified by the works of Kameda and Munro. In conclusion, this study fills conceptual gaps and offers a significant pedagogical contribution, making the rigor of Graph Theory more accessible to undergraduate students and promoting a unified view on the existence of matchings and chain covers.

Keywords—Maximum Matching, Tutte's Theorem, Dilworth's Theorem, Kameda-Munro, Graph Theory Education.

I. INTRODUÇÃO

A Teoria dos Grafos atua como a linguagem universal da Ciência da Computação, oferecendo a estrutura necessária para modelar desde redes sociais complexas até a arquitetura microscópica de circuitos integrados [2]. No centro dessa teoria, o *Problema do Casamento Máximo* (Maximum Matching) ocupa uma posição de destaque. Em

termos simples, este problema busca encontrar a maior quantidade possível de pares dentro de um grupo, sem que ninguém "sobre" ou participe de mais de um par. Embora a definição pareça simples, sua resolução possui implicações profundas e diretas em cenários reais como: a alocação eficiente de tarefas em processadores, a distribuição de médicos em plantões hospitalares e a otimização de sistemas de recomendação.

Tradicionalmente, o ensino introdutório de *emparelhamentos* em grafos concentra-se quase exclusivamente em grafos *bipartidos* — cenários onde os vértices podem ser divididos em dois grupos distintos (como tarefas e

trabalhadores). Nesses casos, os clássicos teoremas de Hall [5] e König [9] oferecem soluções fundamentais e bem conhecidas. No entanto, o mundo real nem sempre é bipartido. Quando as restrições de conexão são mais complexas e formam grafos gerais, as ferramentas básicas deixam de funcionar. É neste ponto que este artigo se insere: propomos uma abordagem pedagógica para transpor a barreira dos grafos bipartidos, explorando o *Teorema de Tutte* [14], que generaliza a existência de emparelhamentos através de uma análise de paridade topológica (componentes ímpares).

Além de tratar de grafos gerais, buscamos conectar a teoria dos grafos à *teoria da ordem*. Para isso, revisitamos o *Teorema de Dilworth* [3], que estabelece uma dualidade surpreendente entre o tamanho de emparelhamentos e a estrutura de conjuntos parcialmente ordenados (posets). Para amarrar a teoria à prática computacional, discutimos como essas propriedades estruturais fundamentam algoritmos eficientes, como os estudados por Kameda e Munro [8], que utilizam tais decomposições para resolver o problema em tempo polinomial.

Portanto, o objetivo deste trabalho é duplo e focado na didática. Buscamos fornecer demonstrações passo a passo e rigorosas destes teoremas avançados, bem como oferecer contribuições pedagógicas concretas. A intenção é utilizar exemplos lúdicos e visualizações estratégicas para facilitar a intuição do estudante, revelando conceitos abstratos como a barreira de componentes ímpares ou a cobertura de cadeias, transformando a demonstração matemática em uma narrativa lógica e compreensível.

As seções subsequentes guiarão o leitor por essa jornada, começando pelas Preliminares (Seção II), seguidas pelos Trabalhos Relacionados (Seção III) e a Descrição do Problema (Seção IV), avançando para as Demonstrações passo a passo (Seção V), a análise de Resultados e Reflexões (Seção VI), culminando nas Considerações Finais (Seção VII). No entanto, para que o rigor e a didática pretendidos sejam plenamente alcançados, é imperativo que o leitor domine o vocabulário e as estruturas básicas que sustentam toda esta competência.

Desta forma, para que a complexidade dos teoremas principais possa ser abordada, dedicamos a próxima seção, Preliminares, a estabelecer o vocabulário formal e a intuição essencial sobre emparelhamentos e as estruturas de paridade que serão cruciais nas demonstrações subsequentes.

II. PRELIMINARES

Um *grafo* $G = (V, E)$ é uma estrutura composta por um conjunto de vértices V (pontos) e um conjunto de arestas E (linhas que conectam esses pontos) [2]. Um grafo é dito *bipartido* quando o seu conjunto de vértices V pode ser particionado em dois grupos disjuntos, A e B , de tal forma que todas as arestas conectam um vértice de A a um vértice de B . Não existem arestas conectando dois vértices dentro do mesmo grupo (ex: não há arestas de A para A).

Nota Didática: Para compreender intuitivamente a distinção estrutural de um grafo bipartido, imagine que o conjunto de vértices do grafo é particionado em dois subconjuntos disjuntos e independentes, que rotulamos como A e B . A Figura 1 ilustra visualmente essa partição. Podemos

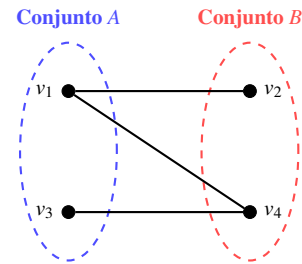


Figura 1: Exemplo visual de Grafo Bipartido $G = (A \cup B, E)$. Note a ausência de arestas "verticais" dentro de cada conjunto.

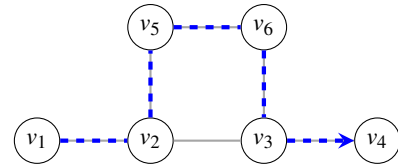


Figura 2: A linha pontilhada em azul é um exemplo de um Caminho Simples, onde nenhum vértice é repetido.

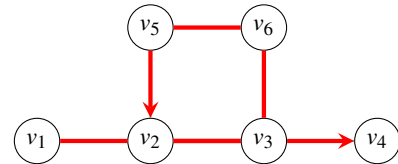


Figura 3: Exemplo de um Caminho não Simples, com início em v_1 e término em v_4 . O caminho repete os vértices v_2 e v_3 ao passar pelo ciclo $v_2 - v_3 - v_6 - v_5 - v_2$.

descrever esses subconjuntos através de um exemplo lúdico: considere os vértices do subconjunto A como "Tarefas" e os vértices do subconjunto B como "Trabalhadores". A regra fundamental de um grafo bipartido é a sua restrição de conectividade: as interações (representadas pelas arestas) só podem ocorrer entre um vértice pertencente ao subconjunto A e um vértice pertencente ao subconjunto B . É crucial notar que não existe conectividade interna; ou seja, não há arestas entre dois vértices que pertençam ao mesmo subconjunto (A ou B). Essa restrição impõe uma estrutura menos densa e mais restrita, facilitando a análise e a busca por emparelhamentos. Em contraste, um grafo geral permite interações irrestritas, o que pode levar à formação de ciclos ímpares (como triângulos), que são a principal fonte de complicação e o foco do Teorema de Tutte [14].

O *grau* de um vértice em um grafo é o número de arestas que estão conectadas a ele. A *vizinhança* de um vértice v em um grafo G é o conjunto composto por todos os vértices adjacentes a v , onde, vértices adjacentes, são aqueles conectados por uma aresta a v .

Um *caminho* em um grafo é uma sequência de vértices interligados por arestas, onde o último vértice de uma aresta é o primeiro da próxima. Um caminho simples é aquele que não repete vértices. O comprimento de um caminho é a quantidade de arestas que o compõem [2]. A Figura 2 ilustra um exemplo claro de um caminho simples, em contraste com o caminho não simples, onde a repetição de vértices ocorre, conforme detalhado na Figura 3.

Um *subgrafo* de um grafo G , essencialmente, é um grafo cujo conjunto de vértices e conjunto de arestas são subconjuntos de G . Uma *componente conexa* em um grafo é um subgrafo onde todos os vértices estão conectados entre

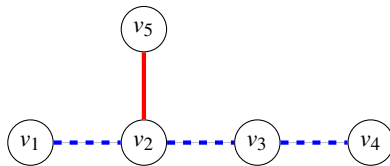


Figura 4: Comparação entre o Caminho Máximo (azul tracejado) e um Caminho Maximal que não é máximo (vermelho)

si por caminhos, formando um “pedaço” isolado do grafo original [2].

A análise dessas subestruturas nos leva à necessidade de distinguir entre o maior elemento local e o maior elemento global, conceitos fundamentais na otimização: um elemento $M \in S$ é classificado como *máximo* se for maior ou igual a todos os outros elementos em S . Esta é uma propriedade de natureza global. Se um elemento máximo existe, ele é intrinsecamente único dentro do conjunto. Por outro lado, um elemento $m \in S$ é classificado como *maximal* se não houver nenhum outro elemento em S que seja estritamente maior do que m na relação de ordem definida. Esta é uma propriedade de natureza local, o que implica que um conjunto pode conter múltiplos elementos maximais que não são comparáveis entre si.

A distinção reside na comparabilidade: um elemento máximo domina todos os outros, enquanto um elemento maximal apenas garante não ser dominado por nenhum outro. Consequentemente, todo elemento máximo é, por definição, maximal; contudo, a recíproca não é verdadeira.

A Figura 4 demonstra visualmente a diferença conceitual: o caminho $P_m = v_2 - v_5$ (em vermelho) é classificado como maximal porque, sendo v_5 um vértice de grau 1, ele não pode ser estendido. Contudo, ele não é máximo, pois o grafo contém o caminho $P_M = v_1 - v_2 - v_3 - v_4$ (em azul), que possui 3 arestas e representa o maior caminho possível do grafo.

Dado um grafo $G = (V, E)$, um *emparelhamento* M é um subconjunto de arestas, $M \subseteq E$, tal que quaisquer duas arestas em M não possuem vértices em comum. Um emparelhamento M é máximo se o número de arestas em M , $|M|$, é o maior possível dentre todos os emparelhamentos existentes no grafo G . Já um emparelhamento M é perfeito se satura (cobre) todos os vértices em V . Isso implica que todo vértice $v \in V$ é ponta de exatamente uma aresta em M . É importante notar que um emparelhamento perfeito só pode existir se o número de vértices $|V|$ for par.

Intuição: Um emparelhamento representa “escolhas exclusivas”. Se os vértices fossem pessoas e as arestas fossem parcerias de dança, um emparelhamento garantiria que ninguém está tentando dançar com duas pessoas ao mesmo tempo. O emparelhamento perfeito, onde ninguém fica sem par, ilustra o resultado ideal do Casamento Máximo. A saturação de todos os vértices é o objetivo que a Figura 5 demonstra.

Seja G um grafo (ou um subgrafo), um componente ímpar é uma componente conexa do grafo que possui uma quantidade ímpar de vértices (1, 3, 5, etc.). A quantidade total dessas componentes ímpares no grafo é denotada por $o(G)$.

Este é o coração do Teorema de Tutte [14]. Emparelhamentos sempre formam pares (número par: 2, 4, 6...). Em um componente com número ímpar de vértices, é ma-

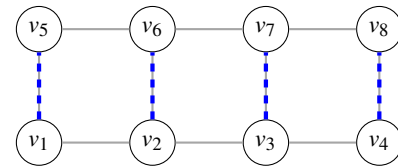


Figura 5: Exemplo de um Emparelhamento Perfeito. As arestas destacadas formam um emparelhamento que satura todos os 8 vértices do grafo.

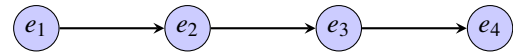


Figura 6: Exemplo visual de uma Cadeia. Elementos em sequência ordenada.



Figura 7: Exemplo visual de uma Anticadeia. Elementos totalmente independentes.

tematicamente impossível emparelhar todos internamente: sempre sobrar pelo menos um vértice. Essa “sobra” cria a necessidade de buscar par fora do componente.

Uma relação de *ordem parcial* em um grafo é uma estrutura que define uma hierarquia ou precedência entre alguns dos seus vértices. Um *conjunto parcialmente ordenado* (poset) em um grafo é uma representação visual de um conjunto de elementos onde uma relação de ordem parcial é definida.

Considere um poset P , onde existe uma relação de ordem “ \leq ” definida entre alguns elementos. Nessa estrutura, uma *Cadeia* é um subconjunto de elementos onde todos são comparáveis entre si, seguindo uma sequência linear (como uma fila indiana ou uma linha do tempo, onde $a \leq b \leq c$). Em contraste, uma *Anticadeia* é um subconjunto de elementos onde ninguém é comparável com ninguém, representando elementos totalmente independentes ou simultâneos.

Uma analogia para compreender essas estruturas é a árvore genealógica. Uma Cadeia representa uma linhagem direta (Bisavô \rightarrow Avô \rightarrow Pai \rightarrow Filho), onde a hierarquia é clara e sequencial. Observando a Figura 6, os vértices e_1, e_2, e_3 e e_4 exemplificam essa relação de ordem total: a presença das arestas direcionadas indicando que e_1 leva a e_2 , que por sua vez leva a e_3 , confirma que todos os elementos neste caminho são comparáveis entre si.

Em contraste, uma Anticadeia corresponde a um grupo de irmãos ou primos que não possuem relação de descendência direta entre si. Conforme ilustrado na Figura 7, os vértices denotados por c_1, c_2, c_3 e c_4 materializam essa propriedade: a ausência total de arestas conectando c_1 a c_2 , ou qualquer outro par, evidencia que eles são incomparáveis. Eles coexistem no mesmo “nível” hierárquico sem que nenhum elemento preceda ou suceda o outro, mantendo essa independência mútua até o enésimo elemento c_k .

Munidos dessas definições fundamentais, dispomos do vocabulário necessário para compreender a evolução histórica da teoria. Essas estruturas básicas não são meras abstrações; elas serviram como blocos de construção para os teoremas de dualidade que definem a área. Para além dos clássicos, a seção a seguir contextualiza como os pioneiros da teoria dos grafos manipularam esses conceitos para transitar de soluções em estruturas simples para a

complexidade dos grafos gerais, e como obras mais recentes vêm complementando e refinando essas técnicas estruturais, tornando-as aplicáveis aos desafios computacionais atuais.

Dessa forma, a revisão bibliográfica subsequente organiza-se para refletir sobre trabalhos relacionados ao tema central do nosso estudo.

III. TRABALHOS RELACIONADOS

A literatura fundamental sobre emparelhamentos, que serve de base para as definições utilizadas neste artigo, remonta ao período clássico da Teoria dos Grafos. As obras de König [9] e Hall [5] estabeleceram as condições de existência em grafos bipartidos, enquanto Berge [1] introduziu a dinâmica dos caminhos aumentantes. Para o contexto de grafos gerais e ordens parciais, as generalizações propostas por Tutte [14] e Dilworth [3] são as referências primárias. Embora estes trabalhos sejam seminais, a pesquisa na área continua ativa, focando-se especialmente na eficiência algorítmica e em novas abordagens pedagógicas.

No âmbito da otimização algorítmica e suas aplicações em Inteligência Artificial, o trabalho de Tassa [13] oferece uma perspectiva relevante sobre a identificação de arestas. O autor investiga o problema de encontrar todas as arestas "maximamente emparelháveis" (aquelas que pertencem a pelo menos um emparelhamento máximo) em grafos bipartidos. Tassa [13] propõe um algoritmo baseado na decomposição do grafo em componentes fortemente conexos, otimizando a abordagem anterior ao reduzir o tamanho do grafo direcionado auxiliar para $\max\{|V_1|, |V_2|\}$ nós. Além disso, o estudo estabelece uma conexão importante com a área de Problemas de Satisfação de Restrições (CSPs), reconhecendo que técnicas similares foram exploradas pioneiramente por Régim [12] para algoritmos de filtragem. Essa linha de pesquisa demonstra como os conceitos teóricos de emparelhamento, discutidos em nosso trabalho, são instrumentalizados para resolver problemas complexos de privacidade de dados e filtragem de restrições.

Contemporaneamente, o algoritmo de Micali e Vazirani continua sendo referência central para problemas de emparelhamento em grafos gerais. Peterson e Loui [11] oferecem uma exposição clara e rigorosa deste algoritmo, que opera em tempo $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$ e permanece como o algoritmo sequencial mais eficiente conhecido para emparelhamento de cardinalidade máxima. A importância deste trabalho vai além da implementação: ele estabelece as bases teóricas que permitem a paralelização e distribuição de algoritmos de emparelhamento. Compreender profundamente este algoritmo é fundamental para estudantes que buscam avançar para domínios mais complexos de otimização combinatória, pois suas técnicas de tratamento de ciclos ímpares inspiraram desenvolvimentos posteriores em algoritmos distribuídos.

Expandindo a abordagem de Micali e Vazirani para ambientes distribuídos, o trabalho de Huang e Su [7] apresenta um algoritmo polinomial $\text{poly}(1/\epsilon, \log n)$ -round para obter uma aproximação $(1 - \epsilon)$ do emparelhamento máximo ponderado em grafos gerais no modelo CONGEST distribuído. Este avanço resolve um problema em aberto de longa data na área de algoritmos distribuídos, generalizando resultados prévios que funcionavam apenas em classes

especiais de grafos (bipartidos e grafos livres de menores). A contribuição de Huang e Su demonstra que a estrutura de obstrução de Tutte permanece relevante e pode ser explorada de forma eficiente mesmo em cenários distribuídos, onde a comunicação entre processadores é limitada.

Paralelamente à evolução técnica, a transposição didática desses conceitos complexos tem sido objeto de estudo recente. Lassance et al. [10] argumentam que a barreira de entrada para o entendimento de grafos gerais não é puramente matemática, mas estrutural. O trabalho deles propõe uma reorganização curricular onde a apresentação de teoremas avançados deve ser precedida por uma construção visual rigorosa. Inspirados por essa metodologia, nosso artigo adota a premissa de que a visualização de "obstáculos" — como as componentes ímpares em Tutte — deve ser o ponto de partida do processo de ensino.

Diferentemente dos trabalhos existentes, que priorizam a otimização de desempenho algorítmico em cenários específicos ou a complexidade em sistemas distribuídos, este artigo contribui ao oferecer uma unificação didática entre a Teoria dos Grafos e a Teoria da Ordem. Nossa contribuição reside na sistematização da técnica de redução — especificamente na conversão entre Posets e Emparelhamentos — e na formalização de uma narrativa visual para o Teorema de Tutte. Ao focar na desmistificação dos obstáculos estruturais por meio de provas assistidas por diagramas, este trabalho preenche a lacuna entre o rigor matemático puro e a intuição necessária para o domínio da disciplina por estudantes de graduação.

Com o alicerce histórico referenciado e as conexões com a algoritmia moderna e a pedagogia estabelecidas, torna-se imperativo formalizar o desafio matemático. A seção a seguir delimita o escopo do nosso estudo, transpondo a intuição discutida nestes trabalhos relacionados para uma definição rigorosa de otimização combinatória.

IV. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O desafio central abordado neste trabalho é o Problema do Emparelhamento Máximo, fundamental na otimização combinatória. Formalmente, dado um grafo $G = (V, E)$, buscamos identificar um subconjunto de arestas $M \subseteq E$ tal que nenhuma aresta em M compartilhe um vértice comum. Esta propriedade é conhecida como arestas par-a-par disjuntas. O objetivo é maximizar a cardinalidade $|M|$, ou seja, encontrar a configuração que envolva o maior número possível de vértices e minimize vértices não emparelhados. A complexidade computacional para solucionar este problema varia conforme a topologia do grafo. Para grafos bipartidos, algoritmos exatos como o de Hopcroft-Karp [6] operam com alta eficiência em tempo $O(E\sqrt{V})$. Entretanto, em grafos gerais, a ausência de uma bipartição clara permite a existência de estruturas mais rígidas. Isso exige abordagens mais sofisticadas, como o algoritmo de Edmonds (Blossom) [4], para tratar ciclos ímpares.

Para concretizar a distinção estrutural entre essas classes de grafos e motivar a necessidade do Teorema de Tutte [14], propomos a análise de um cenário lúdico denominado "O Baile da UFT". Inicialmente, observamos o caso restrito ilustrado na Figura 8, que representa o Cenário A. Neste

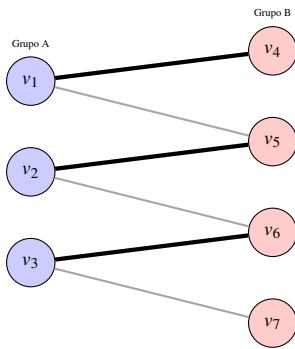


Figura 8: Cenário A: Grafo Bipartido. Os vértices v_i representam alunos. O Grupo A só dança com o Grupo B. As arestas marcadas (emparelhamento) são o resultado máximo.

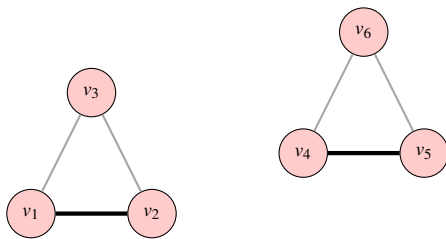


Figura 9: Cenário B: Grafo Geral. Os ciclos ímpares (triângulos) impedem um emparelhamento perfeito. As arestas marcadas mostram o emparelhamento máximo possível, deixando v_3 e v_6 sem par.

grafo bipartido, as regras de interação são estritas: alunos do Grupo A (nós azuis) só podem formar pares com alunos do Grupo B (nós vermelhos). A ausência de arestas internas em cada grupo simplifica a busca pelo emparelhamento máximo, pois não há conflitos de paridade interna a serem resolvidos.

Por outro lado, a complexidade aumenta consideravelmente no Cenário B, apresentado na Figura 9. Aqui, temos um grafo geral onde a regra de formação de pares baseia-se na afinidade, independentemente do grupo de origem. Essa flexibilidade permite a formação de ciclos ímpares, como o triângulo formado pelos vértices v_1, v_2 e v_3 . Como pode ser visualizado na figura, se três indivíduos desejam formar pares exclusivamente entre si, é matematicamente impossível que todos sejam atendidos simultaneamente. Portanto, inevitavelmente, um vértice restará sem par. Esta ocorrência do ciclo ímpar é a representação geométrica do obstáculo que impede o emparelhamento perfeito em grafos não-bipartidos.

É neste contexto de impossibilidade estrutural que o Teorema de Tutte [14] se insere, oferecendo uma condição necessária e suficiente baseada na topologia global. Antes de avançarmos para as demonstrações formais, sistematizamos nas Tabelas 1 e 2 os principais problemas abordados, separando a análise de existência da análise de otimização de ordem.

A lógica de resolução apresentada nas tabelas desdobra-se em uma narrativa contínua que fundamenta as provas subsequentes. Inicialmente, na Análise de Paridade (Tutte), a prova estabelece que componentes com número ímpar de vértices possuem uma limitação aritmética inerente, pois nunca podem ser totalmente emparelhados internamente. Assim, cada componente ímpar exige uma conexão com um vértice externo (do conjunto S), de modo que, se o número de componentes ímpares $o(G - S)$ for maior que o número de vértices disponíveis em S , o emparelhamento perfeito torna-

TABELA 1: RESUMO ESTRUTURAL: TEOREMA DE TUTTE

Problema	Existência de Emparelhamento Perfeito (Tutte)
Input	Grafo Geral $G = (V, E)$ e a análise de subconjuntos de vértices removidos S .
Output	Condição Necessária e Suficiente: $o(G - S) \leq S $.
Resumo	Demonstração baseada na identificação de componentes ímpares como obstáculos estruturais intransponíveis.

TABELA 2: RESUMO ESTRUTURAL: TEOREMA DE DILWORTH

Problema	Decomposição Mínima de Cadeias (Dilworth)
Input	Poset P e sua transformação em Grafo Bipartido.
Output	Teorema Min-Max: tamanho máx. anticadeia = mínimo de cadeias.
Resumo	Técnica de Redução: converte a dependência de ordem em um problema de emparelhamento bipartido.

se impossível. Sequencialmente, no que tange à Técnica de Redução (Dilworth), a prova utiliza a construção de um grafo auxiliar para traduzir um conceito abstrato de ordem parcial em um geométrico de arestas. Ao duplicar os vértices do Poset para criar um grafo bipartido, demonstramos que cada aresta do emparelhamento conecta o fim de uma cadeia ao início de outra, resultando na identidade fundamental onde minimizar o número de cadeias é matematicamente equivalente a maximizar o emparelhamento ($|C| = n - |M|$).

Estabelecida a intuição visual de que ciclos ímpares impedem o emparelhamento perfeito e como a redução simplifica problemas de ordem, torna-se imperativo formalizar esses conceitos na próxima seção.

V. DEMONSTRAÇÃO E CONTRIBUIÇÕES

Nesta seção, apresentamos as demonstrações dos dois resultados fundamentais: o Teorema de Tutte [14] e o Teorema de Dilworth [3]. A escolha destes resultados visa expandir o repertório para além das técnicas básicas de caminhos aumentantes, introduzindo o conceito de "obstáculos estruturais". Iniciamos essa análise expandindo o escopo dos grafos bipartidos para os grafos gerais. Enquanto o Teorema de Hall [5] verifica vizinhanças locais, o Teorema de Tutte fornece uma condição global.

Condição de Tutte: Um grafo $G = (V, E)$ possui um emparelhamento perfeito se, e somente se, para todo subconjunto de vértices $S \subseteq V$, vale a desigualdade $o(G - S) \leq |S|$. Aqui, $o(G - S)$ representa o número de componentes conexos com um número ímpar de vértices no grafo resultante da remoção de S .

Partimos da hipótese de que o grafo G possui um emparelhamento perfeito M . Seja S um subconjunto qualquer de vértices removidos e considere as componentes conexas C_1, C_2, \dots, C_k resultantes dessa remoção. Ao analisarmos uma componente ímpar específica C_i , observamos que a soma das arestas internas não cobre a totalidade dos vértices,

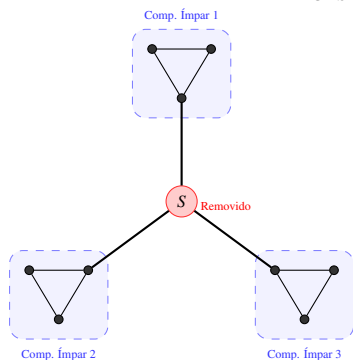


Figura 10: Visualização da falha na condição de Tutte: $o(G - S) > |S|$. Ao retirar o vértice central, restam 3 componentes ímpares isolados.

devido à sua cardinalidade ímpar. Obrigatoriamente, pelo menos uma aresta de M deve conectar um vértice de C_i a um elemento externo.

Como C_i é uma componente isolada em $G - S$, não existem arestas ligando-a a outras componentes; logo, essa conexão externa deve necessariamente incidir em um vértice de S . Sob a ótica da contabilidade de arestas, visto que os elementos do emparelhamento são disjuntos, cada componente ímpar consome um vértice exclusivo de S . A conclusão lógica, ilustrada na Figura 10, é que se existem k componentes ímpares, serão necessários no mínimo k vértices distintos em S , demonstrando que $|S| \geq o(G - S)$.

Demonstração da Suficiência (\Leftarrow): A prova de que a validade da condição garante o emparelhamento é construída por redução ao absurdo. Inicialmente, supomos que a condição de Tutte [14] é verdadeira para o grafo G (ou seja, $o(G - S) \leq |S|$ para todo subconjunto S), mas, contraditoriamente, G não possui um emparelhamento perfeito.

Para explorar as falhas dessa suposição, maximizamos a estrutura do grafo adicionando arestas fictícias até formarmos um grafo G^* , que representa o limite máximo de conexões possível sem que se crie um emparelhamento perfeito. Vale ressaltar que, se encontrarmos uma violação da condição de Tutte em G^* , ela prova a falha no grafo original. Neste grafo saturado G^* , definimos S como o conjunto de vértices universais. A análise do resultado revela que a quantidade de componentes ímpares geradas pela remoção de S supera o número de vértices disponíveis em S . Isso implica diretamente que $o(G^* - S) > |S|$, um resultado que viola a nossa hipótese inicial.

Além da análise de existência proposta por Tutte, a teoria dos grafos se conecta diretamente à Teoria da Ordem. Essa relação é fundamental para a otimização combinatória, pois permite tratar problemas de ordenação sob uma ótica algorítmica eficiente. Frequentemente, problemas práticos de agendamento, hierarquia e dependência de tarefas — modelados matematicamente como Conjuntos Parcialmente Ordenados (Posets) — não aparentam, à primeira vista, possuir relação direta com a geometria de vértices e arestas. No entanto, o Teorema de Dilworth [3] é o exemplo central dessa relação, estabelecendo um vínculo formal entre estruturas de ordem e grafos. Essa equivalência com o emparelhamento bipartido foi explorada por Kameda e Munro [8] para o desenvolvimento de algoritmos. Ao provarem que a decomposição de conjuntos ordenados

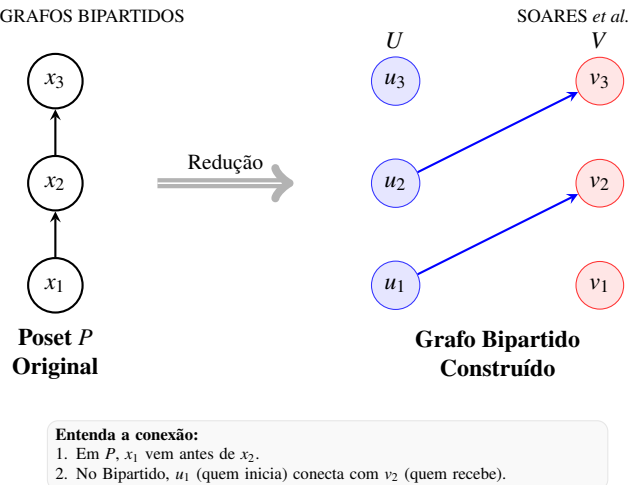


Figura 11: Visualização da Redução: duplicamos os vértices para separar as funções de "antecessor" (U) e "sucessor" (V).

pode ser reduzida ao problema de emparelhamento, eles viabilizaram o uso de soluções polinomiais eficientes para resolver problemas de ordenação.

Dilworth: O número mínimo de cadeias necessárias para cobrir todos os elementos de um conjunto parcialmente ordenado P é igual ao tamanho máximo de uma anticadeia em P .

Para demonstrar este teorema e sua aplicação computacional, utilizamos a técnica de Redução, transformando o problema de "Posets" em "Casamento Bipartido". A Figura 11 detalha visualmente essa transformação. O processo consiste em tomar os elementos do conjunto ordenado $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ e duplicá-los para criar um grafo bipartido $G = (U \cup V, E)$. Conforme detalhado na Figura 11, o lado U (nós azuis) representa os elementos atuando como "início de uma relação", enquanto o lado V (nós vermelhos) representa os mesmos elementos como "fim". A regra de construção é direta: desenhamos uma aresta direcionada (u_i, v_j) se, e somente se, o elemento x_i precede o elemento x_j na ordem original.

A validade desta construção reside em demonstrar uma equivalência estrutural estrita, da qual existe uma bijeção entre um emparelhamento válido em G e uma decomposição em cadeias em P . Observe que a definição de emparelhamento exige que arestas sejam disjuntas, ou seja, cada vértice tenha grau no máximo 1. No contexto do poset, isso traduz-se na regra de linearidade das cadeias: um elemento x_i não pode ter múltiplos sucessores imediatos (o que violaria o grau em U) nem múltiplos antecessores imediatos (o que violaria o grau em V). Portanto, um conjunto de arestas é um emparelhamento se, e somente se, ele une elementos formando sequências lineares válidas e disjuntas.

Algebricamente, a prova se estabelece pela contagem de componentes. Iniciamos com n cadeias triviais (cada elemento isolado). Cada aresta (u_i, v_j) adicionada ao emparelhamento junta o final de uma cadeia ao início de outra, reduzindo o número total de cadeias em exatamente uma unidade. Assim, estabelecemos a identidade fundamental: o número de cadeias $|\mathcal{C}|$ resultantes de um emparelhamento M é dado por $|\mathcal{C}| = n - |M|$. Para minimizar o número de cadeias $|\mathcal{C}|$, o objetivo de Dilworth, somos matematicamente forçados a maximizar $|M|$. Desta forma, demonstramos que

encontrar a Decomposição Mínima de Cadeias é equivalente à busca pelo Emparelhamento Máximo no grafo bipartido. Como cada aresta do emparelhamento une dois vértices em uma mesma cadeia, o número mínimo de cadeias será igual ao número total de vértices subtraído da cardinalidade deste emparelhamento máximo.

Com a validação desta equivalência e o encerramento das demonstrações formais, finalizamos a análise técnica das estruturas propostas. Torna-se pertinente, então, avaliar não apenas a correteza matemática dos teoremas apresentados, mas também o impacto pedagógico que a construção dessas provas exerce sobre o domínio da disciplina.

VI. RESULTADOS E REFLEXÕES

A elaboração deste artigo cumpriu o papel de consolidar o entendimento sobre teoremas fundamentais da Teoria dos Grafos, funcionando como uma ferramenta de fixação de conceitos matemáticos complexos para estudantes de Ciência da Computação. Ao explorarmos as provas de Tutte [14] e Dilworth [3], os resultados apontam para a eficácia de uma abordagem que privilegia a intuição geométrica aliada ao rigor formal, facilitando a assimilação de estruturas abstratas. A análise desenvolvida confirma que o domínio de grafos gerais é significativamente ampliado quando se adota um pensamento estrutural e holístico.

Diferente da verificação local de vizinhanças — comum no estudo introdutório do Teorema de Hall [5] — a compreensão de Tutte beneficia-se imensamente da visualização global do grafo e de suas componentes conexas. O uso de metáforas visuais, onde o conjunto S é representado como um "hub" ou ponto de articulação, mostrou-se uma estratégia pedagógica poderosa para tangibilizar a abstração da remoção de vértices ($G - S$). Essa representação concreta permite que o estudante visualize imediatamente como a estrutura se fragmenta, tornando a condição de paridade uma consequência lógica observável, e não apenas uma regra algébrica.

Da mesma forma, a exploração do Teorema de Dilworth [3] revelou-se uma oportunidade excelente para clarificar a dualidade Min-Max. A abordagem adotada permitiu demonstrar positivamente como a adição de arestas (emparelhamento) atua como um mecanismo de otimização que funde cadeias disparatadas, oferecendo uma intuição robusta sobre como problemas de ordem podem ser resolvidos eficientemente através de grafos. Essa transposição didática resulta no desenvolvimento de competências críticas, como a modelagem por redução, onde o discente aprende a converter um problema de ordem parcial em um desafio geométrico de emparelhamento bipartido. Essa capacidade de simplificação topológica é um ganho conceitual que prepara o aluno para enfrentar problemas de alta complexidade em disciplinas como Teoria da Computação e Análise de Algoritmos, onde a técnica de redução é o alicerce para o entendimento de classes de complexidade.

Além disso, ao priorizar a centralidade teórica de Tutte [14] e Dilworth [3], este trabalho promove uma forte interdisciplinaridade ao conectar a Álgebra com a Algoritmia de Grafos. Demonstrou-se que problemas práticos de agendamento, hierarquia e dependência de tarefas — comuns em áreas como Sistemas Operacionais e Engenharia de

Software — são, em sua essência, problemas de desenho estrutural. O exercício de construir provas matemáticas utilizando diagramas como parte do argumento lógico desenvolve no estudante um rigor demonstrativo visual, permitindo identificar gargalos em redes de forma intuitiva. Assim, o texto consolida-se como um material de apoio didático que transforma o rigor dos livros-texto em uma ponte acessível para o sucesso em disciplinas avançadas de Otimização Combinatória, validando a premissa de que a compreensão profunda da estrutura do problema é o primeiro passo para a eficiência algorítmica.

VII. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo central deste trabalho foi revisitar os fundamentos teóricos do emparelhamento em grafos, transcendendo a abordagem tradicional focada apenas na execução de algoritmos. Buscou-se preencher a lacuna didática existente entre o entendimento intuitivo de grafos bipartidos e a complexidade abstrata dos grafos gerais e estruturas de ordem. Ao analisar as demonstrações clássicas, o artigo propôs uma narrativa visual que facilita a assimilação de conceitos difíceis por estudantes de graduação.

A síntese dos resultados aponta para duas conclusões teóricas maiores. Primeiramente, na análise de existência, entendemos que o Teorema de Tutte é uma fórmula abrangente, que explica tanto os casos simples (bipartidos) quanto os complicados (gerais), olhando para a estrutura completa do grafo. Demonstramos que a "barreira de paridade" (componentes ímpares isolados) é o mecanismo universal de obstrução, englobando os casos restritos de Hall [5] e König [9]. Em segundo lugar, a exploração do Teorema de Dilworth [3] ratificou a equivalência estrita entre problemas de ordenação (posets) e o emparelhamento bipartido. Essa conexão provou que a complexidade de problemas de agendamento pode ser reduzida polinomialmente, validando as estratégias algorítmicas de Kameda e Munro [8].

No que tange às contribuições pedagógicas, este estudo oferece uma metodologia de ensino baseada na visualização de "obstáculos estruturais". A principal contribuição reside na formalização da técnica de Redução, ao invés de apenas apresentar o Teorema de Dilworth como uma fórmula, detalhamos o processo de transformação topológica que converte um problema desconhecido em um conhecido. Além disso, o uso de analogias concretas fornece aos estudantes um vocabulário visual para identificar falhas de emparelhamento, superando a dificuldade comum de visualizar a remoção de conjuntos arbitrários.

Como limitação, este estudo concentrou-se nas condições de existência e nas provas estruturais, sem aprofundar-se na implementação computacional dos algoritmos de busca, como o *Blossom* de Edmonds. Como perspectiva para trabalhos futuros, sugere-se a expansão desta base didática para o domínio da implementação computacional interativa. A criação de ferramentas de software que permitam a visualização dinâmica dos algoritmos — especificamente a simulação passo a passo da contração de ciclos ímpares no algoritmo *Blossom* de Edmonds — representaria um avanço significativo. Ao utilizar as mesmas metáforas de "fusão de componentes" e "gargalos" estabelecidas neste artigo, seria possível demonstrar aos estudantes não apenas

por que o emparelhamento falha sob a ótica teórica, mas como o computador manipula e reduz essas estruturas em tempo de execução. Encerramos, portanto, com a convicção de que a união entre a base matemática sólida e a visualização intuitiva se mostrou uma estratégia de ensino extremamente eficaz. Acreditamos que essa abordagem facilita significativamente o aprendizado, permitindo que os estudantes compreendam o conteúdo com muito mais clareza e segurança.

REFERÊNCIAS

- [1] Claude Berge. Two theorems in graph theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 43(9):842–844, 1957.
- [2] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Elsevier, New York, 1976.
- [3] R. P. Dilworth. A decomposition theorem for partially ordered sets. *Annals of Mathematics*, pages 161–166, 1950.
- [4] Jack Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17:449–467, 1965.
- [5] P. Hall. On representatives of subsets. *Journal of the London Mathematical Society*, 10:26–30, 1935.
- [6] John E. Hopcroft and Richard M. Karp. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. *SIAM Journal on Computing*, 2(4):225–231, 1973.
- [7] Shang-En Huang and Hsin-Hao Su. $(1-\epsilon)$ -Approximate Maximum Weighted Matching in $\text{Poly}(1/\epsilon, \log n)$ Time in the Distributed and Parallel Settings. *Proceedings of the 2023 ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, pages 42–52, 2023.
- [8] T. Kameda and I. Munro. A $o(|V| \cdot |E|)$ algorithm for maximum matching of graphs. *Computing*, 12(1):91–98, 1974.
- [9] D. König. Grafok es matrixok. *Matematikai és Fizikai Lapok*, 38:116–119, 1931.
- [10] Y. M. Lassance Di Vilhena y Cantañede, G. B. Bianchini, and T. D. Dos Santos. Reflexões e práticas pedagógicas no escopo da disciplina de teoria da computação. *Academic Journal on Computing, Engineering and Applied Mathematics*, 6(2):10–17, 2025.
- [11] Paul A. Peterson and Michael C. Loui. The general maximum matching algorithm of Micali and Vazirani. *Algorithmica*, 3:511–533, 1988.
- [12] Jean-Charles Régin. A filtering algorithm for constraints of difference in csp. In *Proceedings of the 12th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, pages 362–367, 1994.
- [13] Tamir Tassa. Addendum to "finding all maximally-matchable edges in a bipartite graph". *Theoretical Computer Science*, 491:136, 2013.
- [14] W. T. Tutte. The factorization of linear graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, 22(2):107–111, 1947.