Uma Proposta de Atividade para o Conceito de Integral no Ensino Médio via Método da Exaustão com Auxílio do Geogebra

A Teaching Activity Proposal for the Concept of Integral in High School Using the Method of Exhaustion with the Aid of GeoGebra

Jodã Gomes Brito[1], Warley Gramacho da Silva[1], Elis Gardel da Costa Mesquita[1] e Rogério Azevedo Rocha[1]

[1] *Universidade Federal do Tocantins, Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Tocantins, Brasil*

Data de recebimento do manuscrito: 10/07/2025
Data de aceitação do manuscrito: 28/12/2025
Data de publicação: 31/12/2025

Resumo—Há, no meio acadêmico, um debate acerca da possibilidade de retomada do ensino de conceitos introdutórios de Cálculo Diferencial e Integral ainda na Educação Básica, especificamente no Ensino Médio. A ausência desse conteúdo nessa etapa do ensino suscita duas problemáticas principais: a exclusão de conceitos basilares para o desenvolvimento de diversas aplicações no mundo moderno e a perda da oportunidade de atenuar as elevadas taxas de evasão em cursos de ensino superior que incluem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em seus currículos. Diante desse cenário, este artigo objetiva apresentar uma breve contextualização histórica do desenvolvimento do Cálculo Integral, iniciando nos primeiros registros dos debates relacionados à noção de infinitesimal e culminando nos conceitos associados à integral de Riemann. Em seguida, são propostas duas atividades de exploração dos conceitos da integral de Riemann com o uso do software GeoGebra. A construção dos comandos é detalhada de modo a possibilitar sua reprodução e adaptação por professores. Acredita-se que a aplicação das atividades propostas contribua para uma aprendizagem mais fluida de conceitos considerados complexos, uma vez que alia recursos gráficos à abordagem de situações próximas ao cotidiano dos estudantes.

Palavras-chave— Cálculo Diferencial Integral; Soma de Riemann; Método da Exaustão; Cálculo de Área; Geogebra

Abstract*—There is an ongoing debate in the academic community regarding the possibility of reintroducing introductory concepts of Differential and Integral Calculus in Basic Education, specifically at the high school level. The absence of this content at this stage of education raises two main issues: the exclusion of foundational concepts essential to the development of various applications in the modern world and the missed opportunity to mitigate the high dropout rates in higher education programs that include Differential and Integral Calculus in their curricula. In this context, this article aims to present a brief historical overview of the development of Integral Calculus, beginning with the earliest recorded debates related to the notion of infinitesimals and culminating in concepts associated with the Riemann integral. Subsequently, two exploratory activities addressing concepts related to the Riemann integral are proposed using the GeoGebra software. The construction of the commands is described in detail to enable their reproduction and adaptation by teachers. It is argued that the implementation of the proposed activities contributes to a more fluid learning of concepts considered complex, as it combines graphical resources with the exploration of situations close to students' everyday experiences.*

Keywords*— Differential and Integral Calculus; Riemann Sum; Method of Exhaustion; Area Calculation; GeoGebra*

I. INTRODUÇÃO

Tem-se discutido no meio acadêmico, com certa frequência, a possibilidade de retorno ao ensino de conceitos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral ainda no Ensino Médio, haja vista que esse assunto já fez parte da grade curricular desta etapa do ensino básico brasileiro até o ano de 1960.

Para [1] não é correto descartar o ensino de Cálculo, uma vez que se trata de um componente de significativa relevância no contexto da matemática moderna e responsável por propor um conjunto de ideias que o aluno não aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Ideias estas que tiveram e continuam tendo

Dados de contato: Jodã Gomes Brito, joda.gomes@mail.uft.edu.br

grande importância em diversos ramos da ciência no mundo moderno. Além disso, o Ensino Médio é a etapa educacional que prepara o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. Portanto, configura-se como um erro a não inclusão desse assunto nessa etapa do ensino.

Outra questão que surge na discussão sobre o tema é se a legislação atual permite a inclusão do ensino de Cálculo no Ensino Médio e como esse conteúdo pode ser ensinado. Em estudo realizado por [2] conclui-se que não somente é permitido como é possível trabalhá-lo junto com os conteúdos já previstos de forma contextualizada e interdisciplinar. Obviamente não é o momento de apego a formalismos e rigor, uma vez que os estudante do Ensino Médio ainda não possuem maturidade para tanto. Porém, é possível desenvolver discussões interessantes no ensino de funções polinomiais, cálculo de áreas, assim como na cinemática, durante as aulas de física.

Outro ganho que se consegue, conforme discutido por [2], seria a diminuição das altas taxas de reprovação nas disciplinas de Cálculo, em cursos superiores que possuem o Cálculo Diferencial e Integral nos seus programas de ensino. O aluno, já ambientado com as ideias gerais trabalhadas no Ensino Médio, estaria melhor preparado para o tratamento mais rigoroso do assunto no Ensino Superior.

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho é apresentar um conjunto de duas atividades para o ensino das ideias relativas ao Cálculo Integral, precisamente o método da exaustão, utilizado pelos gregos para a resolução de problemas de cálculo de áreas e volumes de regiões curvas, sendo responsável por introduzir conceitos basilares para as técnicas de integração modernas. Este trabalho foi elaborado pensando na utilização do software GeoGebra durante as aulas.

É esperado, com a aplicação da proposta apresentada nesse trabalho, uma contribuição no aguçamento do espírito investigativo dos estudantes a respeito do cálculo de áreas de figuras *não convencionais* tendo em vista a abordagem interdisciplinar e contextualizada. Além disso, um caminhar na direção da compreensão da relevância do conhecimento matemático para o entendimento da vida cotidiana.

Antes da apresentação das atividades, serão apresentados alguns marcos históricos relativos ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, propiciando, assim, ao professor um repertório histórico sobre o tema. Em seguida, será feita uma breve apresentação do software que será utilizado na execução das atividades. Após o detalhamento das atividades, o trabalho se encerra com as considerações finais.

A próxima seção trará alguns marcos históricos ocorridos durante o desenvolvimento do Cálculo Integral. Abordará algumas das principais figuras que contribuíram para esse processo. Entende-se que o professor munido desses fatos históricos conseguirá inclui-los no momento da aplicação das atividades propostas, tornando assim a aula mais cativante para os estudantes.

II. Evolução histórica do cálculo

Considera-se que a invenção do cálculo ocorreu no final do século XVII, de forma independente, pelos matemáticos Gottfried Wilhelm Leibniz e Sir Isaac Newton. Conforme [3], com essa invenção, a matemática criativa transcendeu para um plano superior, estendendo-se, a partir daí, para além da matemática considerada elementar. No entanto, cabe destacar que as ideias genitoras do que viria a ser o cálculo remontam de muito antes de Isaac Newton e Leibniz, surgiram ainda na Grécia antiga. O primeiro registro conhecido sobre o cálculo de uma superfície curva é do Papiro Egípcio de Moscou, datado de aproximadamente 1890 a.c. Nele é pedido a área da superfície de um cesto e a questão é respondida com um cálculo semelhante à uma fórmula de integração [4].

a. Paradoxos de Zenão e o método de Exaustão de Eudoxo

.

O cálculo trabalha essencialmente com a ideia do infinitesimal. Sobre esse tema, há evidência de que na Grécia antiga surgiram escolas de raciocínio matemático que abraçavam uma das seguintes premissas: de que uma grandeza poderia ser subdividida de forma indefinidade ou de que seria formada por um número grande de partes atômicas indivisíveis. Para essas duas premissas, o filósofo Zenão de Eleia (c. 450 a.C) destacou dificuldades lógicas, criando alguns paradoxos que tiveram forte influência na matemática do período [3].

Os primeiros problemas da história do cálculo estão relacionado ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Por exemplo, sobre o problema de encontrar um quadrado de área equivalente a um círculo dado (quadratura do círculo), consta que uma das contribuições mais antigas é creditada à Antífon, o Sofista (c. 430, a.C), um contemporâneo de Sócrates. A abordagem de Antífono, continha o germe do famoso método de exaustão grego. Ele argumentou que por sucessivas duplicações dos lados de um polígono regular inscrito em um círculo seria possível eliminar a diferença entre a área do circulo e a área do polígono. E, como é possível, dado um polígono, construir um quadrado com a mesma área, o problema está resolvido [3]. O desenvolvimento dessa ideia utilizando o software GeoGebra constitui a segunda atividade proposta neste artigo.

b. O método de equilíbrio de Arquimedes e avanços posteriores

O renomado matemático grego Arquimedes (287–212 a.C.) desenvolveu o chamado método de equilíbrio. Segundo [3], esse método consistia em determinar áreas ou volumes de figuras geométricas por meio da decomposição da região em um grande número de fatias paralelas extremamente finas, as quais eram concebidas como suspensas em uma das extremidades de uma alavanca. O equilíbrio era então estabelecido em relação a uma figura de área ou volume conhecidos, cujo centroide fosse previamente determinado. Observa-se, assim, que esse procedimento antecipa a ideia fundamental que viria a constituir a base da Integral de Riemann.

O método de equilíbro de Arquimedes, usava ao mesmo tempo conceitos da física e o método de exaustão. A ideia do fatiamento de uma superfície constitui o cerne do que viria a

 ISSN: 2675-3588

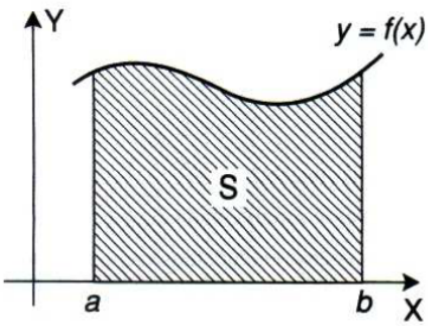


Figura 1: Área abaixo do gráfico de $f(x)$

ser a Integral de Riemann.

Como explica [3], das realizações de Arquimedes até os tempos modernos, a teoria sobre integração quase não foi explorada. Apenas por volta de 1450 os trabalhos do grande matemático grego chegaram à Europa Ocidental. A partir desse ponto, alguns matemáticos e engenheiros passaram a utilizar métodos semelhantes aos de Arquimedes.

c. Newton X Leibniz

Pelos anos de 1675, conforme destaca [3], já se tinha feito progressos no cálculo integral e diferencial. O *teorema fundamental do cálculo*, apareceu enunciado e demonstrado em *Lectiones*, obra do matemático britânico, precursor de Newton, Isaac Barrow. Havia ocorrido também progressos em resoluções de problemas com integrações, o processo de diferenciação tinha aflorado com muitas tangentes de curvas sendo descobertas. Além disso, a ideia de limite já fora concebida. Mas então, o que ainda faltava?

Segundo [3], a matemática carecia de um simbolismo geral e de regras analíticas formais sistematizadas, além de fundamentos rigorosos. As contribuições independentes de Newton e Leibniz atenderam a essa primeira necessidade, motivo pelo qual a invenção do cálculo lhes é atribuída.

Após o surgimento do cálculo houve ainda um longo percusso de aperfeiçoamento que contou com a participação de diversos matemáticos. Conforme pontua [5], isso ocorreu por ter sido verificado ao longo dos anos finais do século XVIII, muitos absurdos e contradições ao se assumir certas premissas como verdadeiras. Por isso imperou a necessidade de dar uma fundamentação lógica rigorosa ao cálculo.

d. Bernhard Riemann

A definição de integral que se tem contato atualmente nos cursos superiores é devida ao matemático alemão Bernhard Riemann (1826 - 1866). O significação geométrica se assemelha à do método de Arquimedes. No contexto da integral de Riemann, esta pode ser interpretada como a área situada sob o gráfico de uma função não negativa em um intervalo dado. Tal área é obtida por meio da partição do intervalo em subintervalos cada vez menores, construindo-se retângulos associados a esses subintervalos e, ao final, somando-se as áreas correspondentes.

Explicaremos em mais detalhes tomando como referência [6]. O objetivo é encontrar a área S de uma região plana delimitado pelo gráfico de uma função contínua não negativa, o eixo dos x e as retas $x = a$ e $x = b$ (Figura 1).

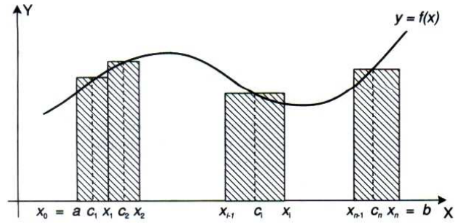


Figura 2: Formação dos retângulos

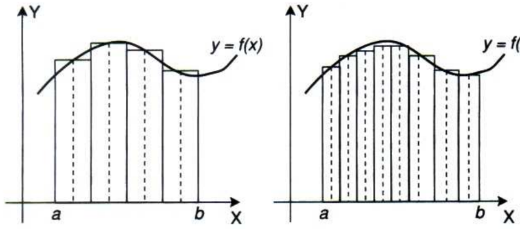


Figura 3: Soma de Riemann

Afim de obter a área desejada, particiona-se o intervalo $[a,b]$ em n intervalos, escolhendo os pontos: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots x_n = b$. Onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ é o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Escolhe-se um ponto qualquer $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Por fim, para cada um desses intervalos constrói-se um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$. O procedimento pode ser visualizado na Figura 2.

Na Figura 3, temos os retangulos para $n = 4$ *e* $n = 8$.

A soma das áreas dos n retângulos é dada por $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$. Esta soma é chamada de *Soma de Riemann* da função $f(x)$. Podemos observar que a medida em que Δx_i diminui, os retângulos se tornam cada vez menores e a área se aproxima intuitivamente da área S procurada. A integral definida no intervalo $[a,b]$ é denotada pelo limite da Soma de Riemann quando Δx_i tende a 0. Isto é:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

III. APRESENTAÇÃO DO RECURSO COMPUTACIONAL USADO

Conforme [7], o “GeoGebra é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma". Pode ser usado de forma online no site `https://www.geogebra.org` ou também pode ser feito o *download*.

Conforme destacado por [8], o GeoGebra é uma ferramenta poderosa que oferece importantes vantagens quando utilizada durante as aulas de Matemática. Entre essas vantagens, destacam-se: a possibilidade de visualizar objetos e conceitos matemáticos, tornando-os mais tangíveis e compreensíveis; a interação direta dos alunos com os objetos trabalhados, permitindo a exploração e experimentação de diferentes cenários; e a construção de modelos que representam situações do mundo real, possibilitando a investigação de situações e o teste de hipóteses. A ferramenta também permite o compartilhamento de projetos, o que facilita a colaboração entre alunos e professores.

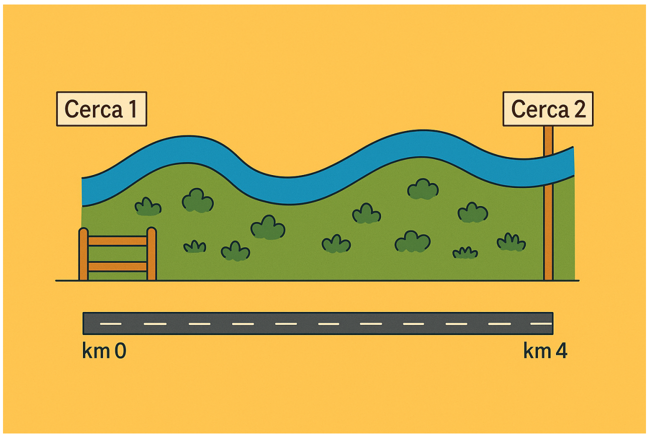


Figura 4: Ilustração da situação

IV. Atividades propostas

a. Atividade 01. Área de uma pequena vegetação de pastagem para animais

Carlos está realizando uma viagem de carro por uma avenida totalmente retilínea, ele sai inicialmente do km 0 onde há a cerca 01 e chega no km 04, onde há a cerca 02. Tomando o sentido do deslocamento de Carlos, à esquerda há um córrego que segue o trajeto da estrada, no entanto tem um formato curvilíneo que ao ser modelado matematicamente percebeu-se, se considerarmos o eixo x sendo a avenida 01 e o eixo y a cerca 01, ser definido pela função $f(x) = sen(2x) + 2$. Carlos é uma pessoa curiosa e se indagou de que maneira ele poderia obter a área da região delimitada, na vertical, pelas cercas e na horizontal pela avenida e pelo córrego. Essa área está cercada para ser utilizada como pastagem para animais.

A Figura 4 apresenta a ilustração da situação descrita. O desenho foi feito com o auxílio do ChatGPT, modelo de inteligência artificial desenvolvido pela empresa norte americana OpenAI e que permite o desenvolvimento de conversas humanizadas. O processo de criação da ilustração foi feito em três etapas: primeiro se criou um esboço desenhado a própria mão; após, pediu-se que o ChatGPT desenvolvesse algo similar; por fim, foi solicitado alguns ajustes pontuais.

Na Figura 5 está o trecho do gráfico da função $f(x) = sen(2x) + 2$ que exploraremos.

O gráfico irá aparecer após, na versão online, selecionar as opções “Álgebra”, “gráfica” e na “entrada” digitar a função. Observemos o que foi descrito na Figura 6.

O próximo passo é definir os comandos para iniciar a aproximação da área da região desejada pela Soma de Riemann, cujo processo foi explicado na Sessão II. Aqui cabe um adendo. Utilizaremos a Soma de Riemann em duas formas:

- *Soma de Riemann Inferior*: neste caso o software particiona o intervalo $[0,4]$ em n subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de mesmo tamanho. Em cada um desses intervalos toma-se o retângulo de base $x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$, com c_i sendo o ponto no intervalo I_i em que a função assume valor mínimo. O resultado deste processo pode ser visualizado, por exemplo, na figura 8a.

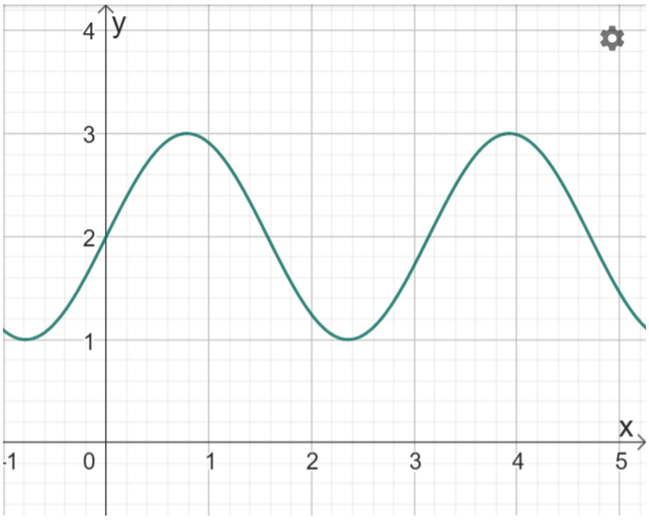


Figura 5: Gráfico da função

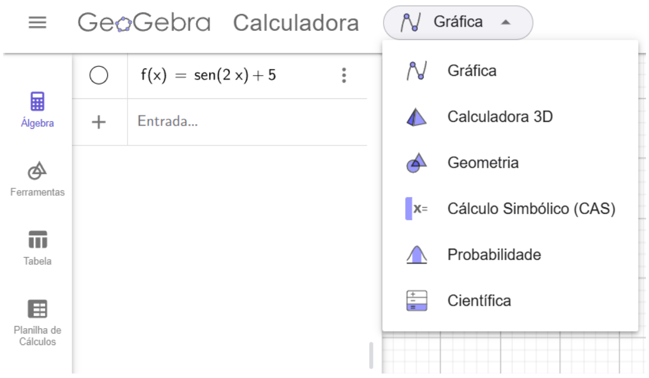


Figura 6: Definição da função no Geogebra

- *Soma de Riemann Superior*: neste caso o software particiona o intervalo $[0,4]$ em n subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de mesmo tamanho. Em cada um desses intervalos toma-se o retângulo de base $x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$, com c_i sendo o ponto no intervalo I_i em que a função assume valor máximo. O resultado deste processo pode ser visualizado, por exemplo, na figura 8b.

Para a determinação dos comandos, fazemos em ordem as seguintes etapas:

- *Definir e configurar o controle deslizante*; basta digitar a letra (em nosso caso “n”), igual e enter. Após isso clicar nos três pontos que fica do lado do controle deslizante definido, ir na janela “controle deslizante”, definir valor mínimo 5 e máximo 2000, incremento 1. Desse modo teremos uma quantidade de retângulos variando de 5 a 2000.

- *Configurar o comando da Soma de Riemann*; digite “rieman”, ponha o mouse sobre “somaderiemaninferior (ou somaderiemansuperior)”, clique sobre a opção desejada, em função escreva $f(x)$, em “valor inicial” escreva 0, em valor final escreva 4, em “Número de retângulos” escreva n.

  O processo descrito pode ser visualizado na figura 7.

  É intuitivo a conclusão de que sendo A_1 a área da região

ISSN: 2675-3588

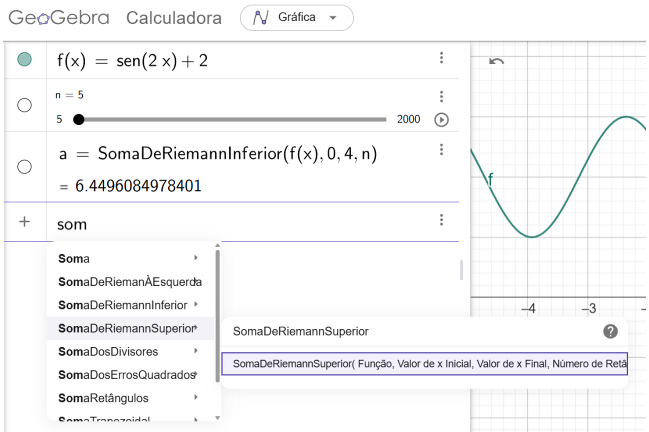
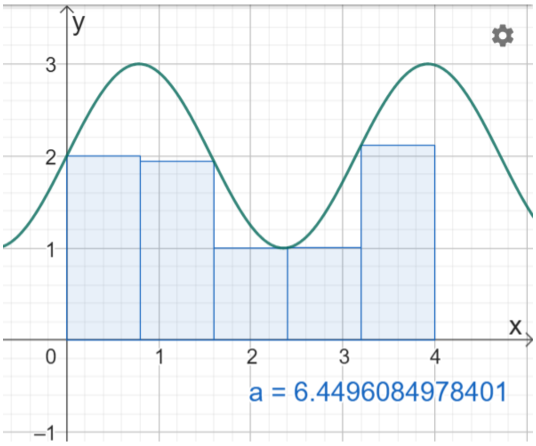
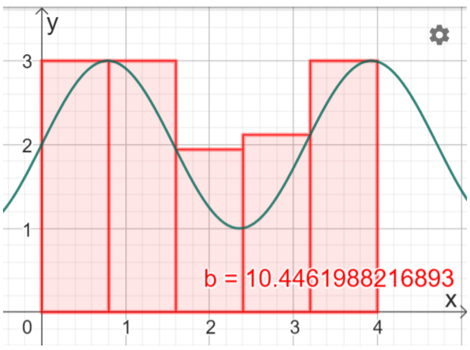


Figura 7: Determinação dos comandos para análise da área delimitada pela função



(a) Aproximação por falta



(b) Aproximação por excesso

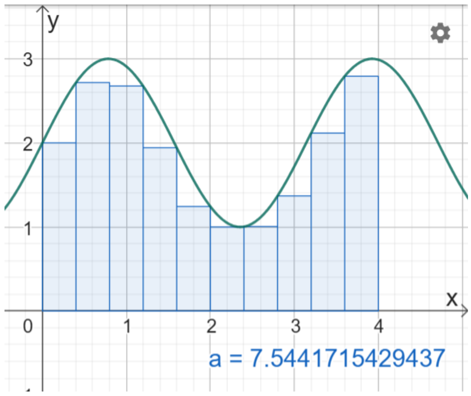
Figura 8: Aproximação da área por 5 retângulos

buscada tem-se que $S_i \leq A_1 \leq S_s$. Onde S_i é a Soma de Riemann Inferior e S_s a Soma de Riemann Superior.

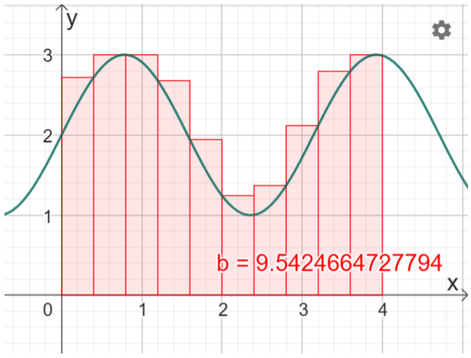
Aproximando 5 casas decimais, com 5 retângulos (Figura 8), a Soma de Riemann por falta gera uma área de $6,4496$ km^2 enquanto que por excesso gera $10,4461$ km^2. Trata-se de uma variação significativa de $3,9965$ km^2.

Movendo o controle deslizante para $n = 10$, ou seja, particionando a área em 10 retângulos obtemos uma aproximação por falta de $7,5441$ km^2 e por excesso de $9,5424$ km^2. Aqui já percebemos uma diminuição da diferença para $1,9983$ km^2. A Figura 9c expõe melhor essa comparação.

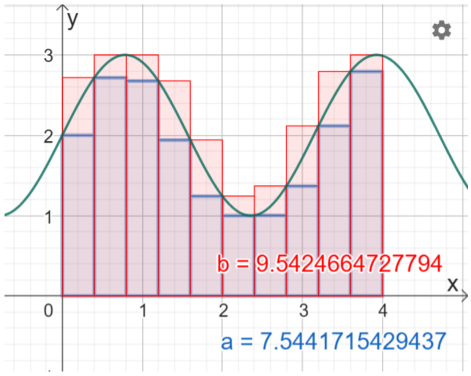
Movendo o controle deslizante para $n = 25$, como exposto na Figura 10, conseguimos uma aproximação por falta de



(a) Aproximação por falta.



(b) Aproximação por excesso



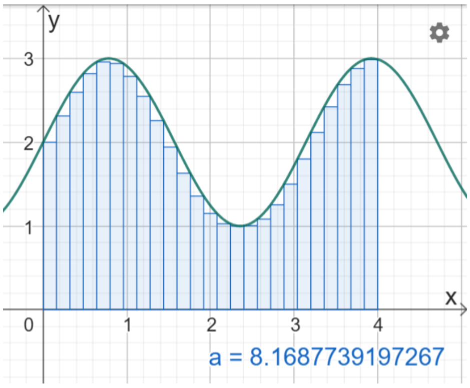
(c) Aproximação por falta e por excesso.

Figura 9: Aproximação da área por 10 retângulos

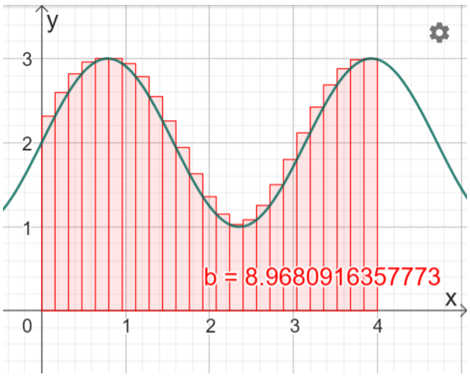
$8,1687$ km^2, enquanto que por excesso de $8,9680$ km^2. A diferença continua diminuindo, agora para $0,7993$ km^2.

Por fim, movendo o controle deslizante para $n = 2000$, máximo valor que definimos. Os retângulos se tornam tão próximos um do outro que graficamente, com o mesmo zoom usado nas imagens anteriores, não é possível distingui-los. A Figura 11 mostra o resultado obtido. Cabe destacar a diminuição expressiva da diferença entre a área aproximada por falta ($8,5677$ km^2) e a área aproximada por excesso ($8,5777$ km^2), apenas $0,0093$ km^2.

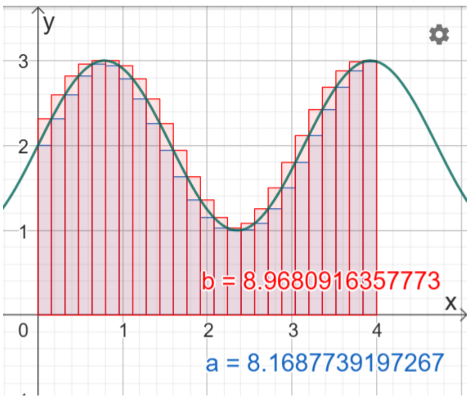
Fica evidente, portanto, que adoção do método gera uma aproximação da área tão mais precisa quanto maior a quantidade de subintervalos definidos. Ao conduzir as partições para o infinito, isto é, fazer a quantidade de subintervalos I_i infinitos a diferença será nula e $S_i = S_2$. Ao considerar o limite em que o número de subintervalos tende ao infinito, define-se, em essência, a integral de Riemann, a qual é estudada de maneira mais aprofundada em determinados cursos do ensino superior.



(a) Aproximação por falta



(b) Aproximação por excesso



(c) Aproximação por falta e por excesso

Figura 10: Aproximação da área por 25 retângulos

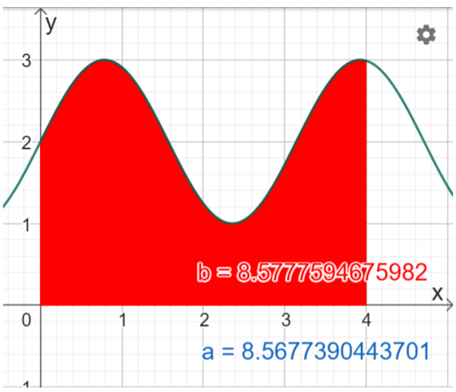


Figura 11: Aproximação por falta e excesso (2000 retângulos)

b. Atividade 02. Área de uma superfície de formato circular

Em uma certa propriedade há um poço artesiano de raio $r = 10cm$. Deseja-se obter a área da superfície circular desse poço.

Com o conhecimento matemático atual facilmente é possível obter a área do círculo usando a famosa fórmula $A_c = \pi r^2$. Para o caso do poço artesiano, usando 5 casas decimais para π, chegamos em $A_c = 3,14159.10^2 = 314,159\ cm^2$.

Esta atividade tem por objetivo obter um resultado análogo por meio da aproximação da circunferência dada por polígonos regulares nela inscritos. Conforme destaca [3], este foi precisamente o método usado por Arquimedes que resultou na fórmula tão amplamente conhecida. Arquimedes conclui que a área de um círculo é equivalente a área de um triângulo retângulo cuja base é igual ao comprimento da circunferência e a altura é igual a seu raio, ou seja, $A_c = \frac{2\pi r.r}{2} = \pi r^2$.

A Figura 12 apresenta a configuração dos comandos necessários para o estudo do problema a ser investigado. Explicaremos em ordem como definir cada um deles. Enfatizando que estamos usando a versão *online* do programa. A versão instalada não possui mudanças significativas.

- *Definição do círculo*: em "ferramenta", na parte de círculos escolha a opção "Círculo: centro & raio", clique no ponto $(0,0)$ e defina o raio igual a 10.

- *Área do círculo*: digite na barra de entrada "área" e entre parênteses escreva "c", ou a legenda criada pelo programa para o círculo definido anteriormente.

- *Controle deslizante*: fazer como no exercício anterior, coloque o menor n igual 3 para a formação de um triângulo inscrito na circunferência.

- *Sequência de pontos*: para definir a sequência de pontos que irão ser vértices dos polígonos inscritos escreva na barra de entrada exatamente o comando "Sequência" mostrado na Figura 12, tomando o devido cuidado para não cometer erros. Este comando define n pontos equidistantes, com n variando de 1 a 2000, todos inscritos em uma circunferência de raio 10 e centro $(0,0)$.

- *Construção dos polígonos*: para a construção dos polígonos inscritos basta digitar "polígono", selecionar a opção "Lista de pontos" e entre parênteses escrever o rótulo da lista de pontos definido anteriormente, em nosso caso "l1"

- *Texto em tela*: o texto em tela é um recurso adicional que o professor pode usar para tornar a investigação mais interessante. Basta ir em "ferramentas", "texto". Ao escolher o local na tela em que o texto será exposto, na parte superior da caixa que se abrir, escreva a legenda desejada e em "avançado" escolha o rótulo do valor que deseja que apareça em tela.

Para $n = 3$ o resultado pode ser visualizado na Figura 13. Notemos que há uma diferença significativa entre o valor da área calculado pelo programa e a área do triângulo.

Para $n = 6$ o polígono inscrito é um hexágono. A diferença entre as áreas já diminuiu (Figura 14).

Por meio da Figura 15 visualiza-se o caso em que o polígono é um Decágono ($n = 12$). Fica evidente que, à

 ISSN: 2675-3588

Figura 12: Determinação dos comandos para análise da área do círculo

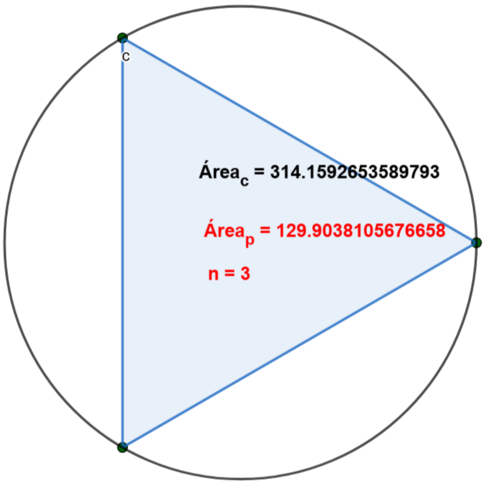


Figura 13: Aproximação para $n = 3$ (triângulo)

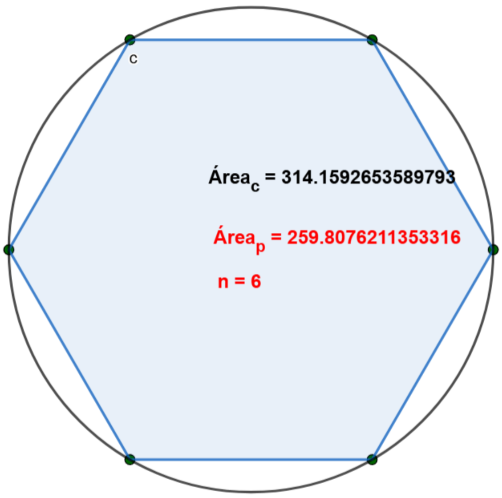


Figura 14: Aproximação para $n = 6$ (hexágono)

medida que aumenta o número de lados dos polígonos, as respectivas áreas se aproximam da área da região circular na qual estão inscritos. Espera-se, nesse momento, que o

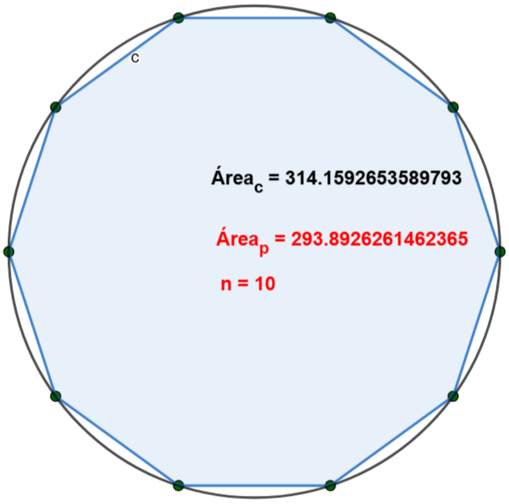


Figura 15: Aproximação para $n = 10$ (Decágono)

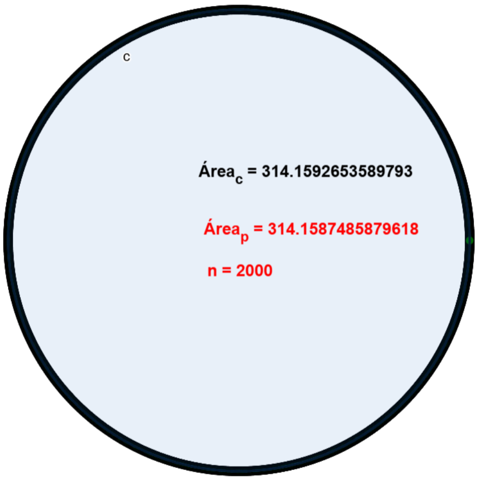


Figura 16: Aproximação para $n = 2000$

aluno já seja capaz de compreender esse comportamento de aproximação.

Por fim, na Figura 16 tem-se o resultado para $n = 2000$. Os pontos se aproximam de tal modo que não é possível visualizar o polígono. Os valores das áreas indicam um diferença de aproximadamente $0,000516$. No infinito essa diferença será nula.

c. O que esperar destas atividades ?

Após a conclusão destas atividades, espera-se que os estudantes tenham condições de refletir sobre a resolução de problemas similares ligados ao cotidiano, a exemplo de áreas de piscinas, áreas de fachadas de ginásios, áreas de praças, entre outras. Ou seja, espera-se uma expansão da compreensão do mundo que os cerca.

Acredita-se ainda que a abordagem de se trabalhar com o infinito irá tornar a introdução mais rigorosa do tema, quando no ensino superior, mais agradável e, portanto, com maior chance de sucesso, visto que a taxa de reprovação nas disciplinas de cálculo continua sendo um desafio para boa parte dos cursos de exatas. Essa seria uma contribuição relevante deste trabalho.

Cabe destacar que a contextualização histórica feita neste artigo pode ser livremente abordada pelo professor no momento que julgar mais oportuno, durante a aplicação das atividades. Apenas acredita-se que a inclusão de fatos históricos acrescenta positivamente o momento de ensino, uma vez que o aluno poderá perceber como a construção do conhecimento matemático ocorre ao longo do tempo. Isto é, de maneira não linear e com a contribuição de diversas mentes.

V. CONCLUSÃO

O software GeoGebra tem se mostrado uma excelente ferramenta de apoio aos professores de Matemática. A possibilidade de realizar manipulações e analisar a evolução de certo processo matemático é ideal para levar o estudante a conjecturar verdades matemáticas consagradas, como no caso trabalhado neste artigo, da aproximação de regiões não convencionais por figuras conhecidas.

Acredita-se que o desenvolvimento deste trabalho tem relevância à medida que apresenta a possibilidade de discussão de fatos históricos que auxiliam na compreensão de como ocorre a construção do conhecimento, em especial do conhecimento matemático em nossa sociedade e, consequentemente, de como se dá o próprio processo de compreensão daquilo que nos cerca, isto é, o caráter acumulativo do conhecimento científico.

O trabalho também se mostra relevante por apresentar, de forma leve, um tema reconhecidamente desafiador para estudantes do ensino superior. Com isso, acredita-se que haja uma melhoria nas chances de êxito quando do contato mais formal com o assunto, contribuindo para a diminuição das altas taxas de evasão nos cursos que contemplam, em suas grades curriculares, disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Aos professores, fica a sugestão de explorar o método de exaustão a partir do cálculo de regiões que se aproximam da realidade de seus estudantes, tornando, com isso, a aprendizagem mais próxima da realidade deles.

REFERÊNCIAS

[1] G. Ávila, "O ensino do cálculo no segundo grau," *Revista do Professor de Matemática*, vol. 18, pp. 1–9, 1991, acessado em 08 de maio de 2025. [Online]. Available: https://rpm.org.br/cdrpm/18/1.htm

[2] J. S. de Melo Rocha, "O ensino de cálculo no ensino médio," Ph.D. dissertation, Universidade Federal de São João Del-Rei, 2018, acessado em 08 de maio de 2025. [Online]. Available: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/

[3] H. Eves, *Introdução à história da matemática*. Editora da UNICAMP, 2008.

[4] C. B. Boyer and U. C. Merzbach, *História da matemática*. Editora Blucher, 2019.

[5] A. Melchiors, "História do cálculo diferencial e integral," *Maiêutica. Ensino de Física e Matemática*, vol. 1, no. 1, 2013.

[6] D. M. FLEMMING and M. B. GONÇALVES, "Cálculo a: Funções, limite, derivação, integração. vol. 1," 2006.

[7] "o que é o geogebra?". [Online]. Available: https://www.geogebra.org/.

[8] L. M. Marques, M. V. L. Oliveira, and W. G. da Silva, "O ensino de funções quadráticas através de recursos computacionais e modelagem matemática," *Academic Journal on Computing, Engineering and Applied Mathematics (AJCEAM)*, vol. 5, no. 2, pp. 1–14, mar 2024. [Online]. Available: https://doi.org/10.20873/uft.2675-3588.2024.v5n2.p1-14

 ISSN: 2675-3588