Nem sempre o menor caminho é uma linha reta

The shortest path is not always a straight line

Lisandra Maria Malaquias de Sousa[1], Frank Alves Lustosa[1], Hellena Christina Fernandes Apolinário[1] e Warley Gramacho da Silva[1]

[1] *Universidade Federal do Tocantins, PROFMAT, Tocantins, Brasil*

Data de recebimento do manuscrito: 10/07/2025
Data de aceitação do manuscrito: 25/12/2025
Data de publicação: 28/12/2025

Resumo—A Geometria Euclidiana é a geometria mais conhecida e de grande utilização nas aulas de matemática, mas até que ponto ela é aplicável no cotidiano? Ao se locomover pela cidade, não é possível usar o menor caminho proposto pela geometria euclidiana, passando por edifícios, por exemplo. A Geometria do Táxi, uma geometria não muito comentada, é a que melhor descreve os possíveis percursos no cotidiano. A geometria do táxi, ou Geometria de Manhattan, utiliza apenas segmentos horizontais ou verticais, assemelhando-se a uma malha quadriculada, como o plano cartesiano. Este artigo propõe atividades simples que buscam instigar o estudante do Ensino Médio a investigar o uso da geometria no seu cotidiano, conjecturar seus resultados e verificar qual geometria é mais adequada.

Palavras-chave—Geometria Euclidiana, Geometria do Táxi, GeoGebra

Abstract—*Euclidean geometry is the best-known geometry and is widely used in math classes, but to what extent is it applicable in everyday life? When moving around the city, it's not possible to use the shortest path proposed by euclidean geometry, passing by buildings, for example. The Taxicab Geometry, a geometry not often discussed, is the one that best describes possible routes in everyday life. The taxicab geometry, or Manhattan Geometry, uses only horizontal or vertical segments, resembling a grid, like the Cartesian plane. This article proposes simple activities designed to encourage high school students to investigate the use of geometry in their daily lives, conjecture their results and verify which geometry is most appropriate.*

Keywords—*Euclidean Geometry, Taxicab Geometry, GeoGebra*

I. INTRODUÇÃO

A Geometria euclidiana está presente na vida escolar do estudante desde o Ensino Fundamental, sendo que o primeiro contato com ela é, geralmente, pelo plano cartesiano. Assim como ocorre com alguns conceitos e ideias matemáticas, ao serem introduzidos ao plano cartesiano, os estudantes se perguntam 'onde usarei isso na minha vida?'. E a resposta não é muito simples, mas pode ser melhor construída com a Geometria do Táxi, uma geometria não euclidiana em que os segmentos são linhas ou verticais ou horizontais, simulando uma viagem de táxi em uma cidade onde as ruas são dispostas como na malha quadriculada [1]. A Figura 1 mostra um possível trajeto dessa viagem na malha urbana.

Um ponto principal para a escolha da geometria do táxi é que nem sempre o cálculo da distância euclidiana é suficiente para a aplicação na geometria urbana, pois o trajeto não pode ser realizado na prática [1]. As situações apresentadas nas atividades propostas evidenciam e comparam a possibilidade de uso de cada geometria, mostrando que o uso da geometria euclidiana para tráfego no dia a dia é raro e específico para alguns veículos.

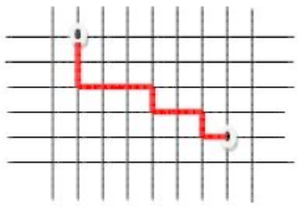

Figura 1: Trajeto na malha urbana

A aplicação de geometrias não euclidianas em sala de aula ainda é limitada por questões como, por exemplo, lacunas na formação de professores [2]. A dificuldade de aplicar tais conceitos também pode ser justificada pela complexidade das atividades propostas, há casos em que o professor que ministra a disciplina de matemática não é formado em Licenciatura em Matemática. Pensando nessas possíveis dificuldades, este trabalho apresenta atividades

Dados de contato: Lisandra Maria Malaquias de Sousa, lisandra-maria8@gmail.com

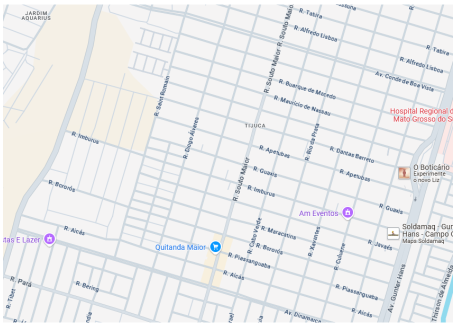

Figura 2: Vista aérea do bairro Tijuca, Campo Grande, MS

simples que podem ser aplicadas aos estudantes de qualquer série do Ensino Médio e até mesmo do Ensino Fundamental, considerando que os estudantes já estejam familiarizados com os conceitos iniciais de geometria euclidiana, tornando possível relacioná-los à geometria do táxi.

As aulas de matemática podem ser monótonas quando o estudante não percebe a aplicação do cálculo realizado em sua realidade. Esse problema não ocorre com tanta frequência na geometria do táxi, que tem sua métrica mais semelhante à disposição das vias de trânsito de uma cidade do que a geometria euclidiana. Algumas cidades tem suas vias ainda mais próximas à disposição da malha do plano cartesiano do que outras, como, por exemplo, o bairro Tijuca em Campo Grande - MS, como mostra a Figura 2, sendo possível fazer uma relação direta. No caso da cidade apresentada neste trabalho, Palmas - TO, a disposição das vias de trânsito não ocorre como a malha quadriculada, mas se assemelha o suficiente para aplicar as atividades propostas e obter o resultado esperado por parte dos estudantes.

Suponha que se deseje calcular o gasto mensal com combustível no deslocamento entre a residência e o local de trabalho. Para esse cálculo, é necessário saber a distância percorrida. Ao se locomover pela cidade, não é possível atravessar prédios e edifícios. Então, como calcular a distância entre dois pontos no mapa de uma cidade? A menor distância entre dois pontos é uma linha reta? Nem sempre. Pela Figura 1 é fácil perceber que basta somar as distâncias horizontais e verticais que ligam os pontos.

II. Teoria Preliminar

Esta seção apresenta algumas definições importantes para a aplicação das atividades propostas, como distância entre dois pontos na geometria euclidiana e na geometria do táxi. As demonstrações das propriedades apresentadas nessa seção podem ser encontradas em [1] e [3].

a. Geometria Euclidiana

Considere os pontos $A=(x_a,y_a)$ e $B=(x_b,y_b)$. A distância euclidiana entre eles é dada por:

$$d_e(A,B)=\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2}.$$

A partir dessa definição, a função d_e satisfaz as seguintes propriedades:

i) $d_e(A,A)=0$;

ii) Se $A\neq B$ então $d_e(A,B)>0$;

iii) $d_e(A,B)=d_e(B,A)$;

iv) $d_e(A,B)\leq d_e(A,C)+d_e(C,B)$.

b. Geometria do Táxi

Considere os pontos $A=(x_a,y_a)$ e $B=(x_b,y_b)$. A distância do táxi entre eles é dada por:

$$d_t(A,B):=|\,x_a-x_b\,|+|\,y_a-y_b\,|.$$

A partir dessa definição, a função d_t satisfaz as seguintes propriedades:

i) $d_t(A,A)=0$;

ii) Se $A\neq B$ então $d_t(A,B)>0$;

iii) $d_t(A,B)=d_t(B,A)$;

iv) $d_t(A,B)\leq d_t(A,C)+d_t(C,B)$

As propriedades *i, ii* e *iii* são demonstradas diretamente pela definição. Para mostrar que a propriedade *iv* é válida, utiliza-se a definição de módulo: $|\,x+y\,|\leq|\,x\,|+|\,y\,|$ para $x,\ y\in\mathbb{R}$. Daí segue que $|\,x_a-x_b\,|\leq|\,x_a-x_c\,|+|\,x_c-x_b\,|$ e $|\,y_a-y_b\,|\leq|\,y_a-y_c\,|+|\,y_c-y_b\,|$. E, por consequência,

$$|x_a-x_b|+|y_a-y_b|\leq|x_a-x_c|+|x_c-x_b|+|y_a-y_c|+|y_c-y_b|$$

$$\therefore\ d_t(A,B)\leq d_t(A,C)+d_t(C,B).$$

c. Relação entre as geometrias

A geometria euclidiana e a geometria do táxi podem ser relacionadas por

$$d_t(A,B)\geq d_e(A,B).$$

Essa relação é de fácil demonstração. Para os pontos $A=(x_a,y_a)$ e $B=(x_b,y_b)$, temos $2\cdot|x_a-x_b|\cdot|y_a-y_b|\geq 0$. Somando $(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2$ a ambos os membros da desigualdade, temos:

$$(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2+2\cdot|x_a-x_b|\cdot|y_a-y_b|\geq (x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2$$

$$\Rightarrow (\,|x_a-x_b|+|y_a-y_b|\,)^2\geq(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2$$

Assim,

$$\sqrt{(\,|x_a-x_b|+|y_a-y_b|\,)^2}\geq\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2}$$

$$\Rightarrow |x_a-x_b|+|y_a-y_b|\geq\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2}$$

$$\therefore\ d_t(A,B)\geq d_e(A,B).$$

Existem duas condições para que a igualdade ocorra, ou seja, para que a distância do táxi entre dois pontos seja igual a distância euclidiana entre eles. A primeira é $A=B$, sendo imediato que $d_t(A,B)=0=d_e(A,B)$.

Para $A=(x_a,y_a)$ e $B=(x_b,y_b)$ pontos distintos,

$$d_t(A,B)=d_e(A,B)$$

$$\Rightarrow |x_a-x_b|+|y_a-y_b|=\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2}$$

ISSN: 2675-3588

$$\Rightarrow (\ |x_a - x_b| + |y_a - y_b|\ )^2 = \left(\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow |x_a - x_b|^2 + 2 \cdot |x_a - x_b| \cdot |y_a - y_b| + |y_a - y_b|^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot |x_a - x_b| \cdot |y_a - y_b| = 0.$$

Observe que, se $|x_a - x_b| = 0$ então $x_a = x_b$ e, de modo análogo, $|y_a - y_b| = 0$ implica $y_a = y_b$. Isso significa que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo das abscissas Ox ou ao eixo das ordenadas Oy. Assim, a segunda condição para que a distância do táxi e a distância euclidiana entre dois pontos A e B seja igual é que tais pontos estejam em uma reta paralela ao eixo das abscissas ou das ordenadas.

Exemplo 1: Seja $A = (1,3)$ e $B = (1,3)$ então

$$d_e(A,B) = \sqrt{(1-1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{0} = 0$$

$$d_t(A,B) := |1-1| + |3-3| = |0| + |0| = 0$$

$$\therefore d_e(A,B) = d_t(A,B)$$

Exemplo 2: Seja $C = (-1,3)$ e $D = (1,3)$ então

$$d_e(C,D) = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$d_t(C,D) := |-1-1| + |3-3| = |-2| + |0| = 2$$

$$\therefore d_e(C,D) = d_t(C,D)$$

Exemplo 3: Seja $E = (-1,3)$ e $F = (1,-3)$ então

$$d_e(E,F) = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$d_t(E,F) := |-1-1| + |-3-3| = |-2| + |-6| = 8$$

$$\therefore d_e(E,F) \neq d_t(E,F)$$

III. Orientações metodológicas gerais

As geometrias não euclidianas não possuem habilidades e competências específicas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), mas podem ser apresentadas aos estudantes por meio da Competência Específica 5, permitindo a formulação de conjecturas e validando-as ou não com base em investigações matemáticas, fundamentais para a parte pedagógica.

> Competência Específica 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. ([4] p. 532)

Além da competência específica, é importante citar as habilidades previstas na BNCC [4] que estão relacionadas às atividades propostas:

EM13MAT501 Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

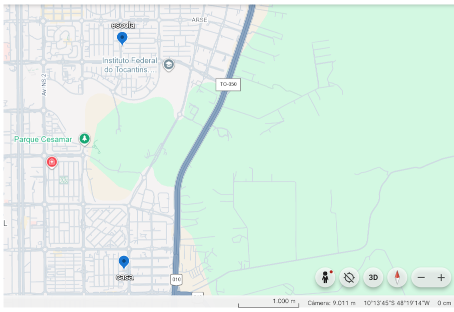

Figura 3: Vista aérea de parte da cidade de Palmas, TO.

Figura 4: Segmento entre casa e escola no GeoGebra

EM13MAT505 Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.

IV. Atividades

As atividades aqui apresentadas buscam envolver ambas as geometrias, tornando possível a comparação direta entre elas e buscando, como determina a competência 5, que o estudante formule conjecturas e valide-as, ou não, por meio de investigações matemáticas.

a. O caminho de casa até a escola

A primeira atividade busca que os alunos desenhem dois pontos no *GeoGebra* e tracem segmentos que representem o caminho entre sua casa e sua escola. Para isso, o aluno pode usar uma imagem retirada do *Google Maps*, ou outro aplicativo, como o *Google Earth*, em que seja possível visualizar os pontos. A Figura 3 apresenta um exemplo de imagem que pode ser utilizada, mostrando a vista de parte da cidade de Palmas - TO.

Colando essa imagem no GeoGebra e marcando os segmentos, temos a Figura 4:

Utilizando a ferramenta *Distância* temos as medidas entre os pontos, como destacada em Figura 5:

Aqui segue a pergunta: Qual é a menor distância entre os pontos C e K? A do segmento pontilhado, $\overline{CK}$, obviamente. Mas ela é aplicável no cotidiano? Vendo a Figura 3 novamente, percebe-se que não, não é aplicável para a locomoção na cidade, pois, para isso, teria que ser possível atravessar prédios, casas e também o parque. Seria ótimo se pudéssemos atravessar tudo, mas não é possível.

De acordo com a Figura 5, qual geometria descreve melhor o cálculo da distância do segmento pontilhado, $\overline{CK}$? E qual geometria descreve melhor a soma dos segmentos em

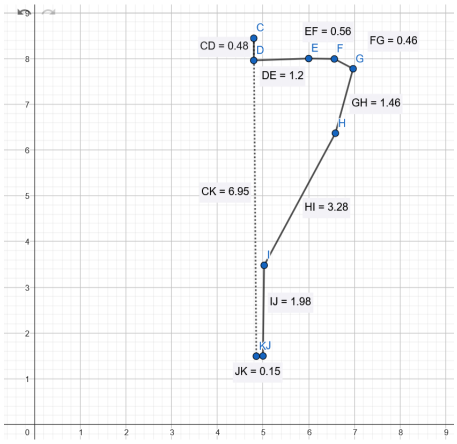

Figura 5: Medidas dos segmentos entre casa e escola no GeoGebra

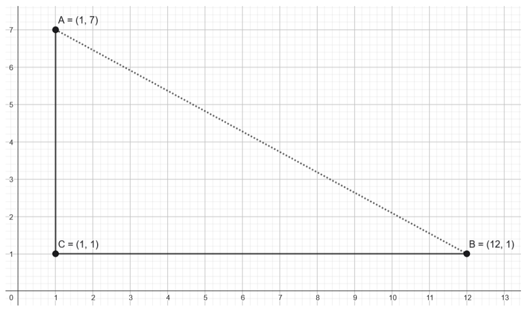

Figura 6: Distância entre os pontos A = (1, 7) e B = (12, 1)

linha contínua, $\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HI}+\overline{IJ}+\overline{JK}$?

b. Calculando distâncias

Aqui seguem algumas atividades para evidenciar a diferença entre o menor caminho na geometria euclidiana e na geometria do táxi.

Questão 1. Mateus está na praça central de sua cidade, localizada no ponto A = (1, 7), e quer visitar sua amiga Carla, que mora no ponto B = (12, 1). As ruas da cidade seguem o formato de quadras e a praça permite atravessar em linha reta pelo gramado. Mateus tem duas opções: atravessar pelo gramado ou andar pelas ruas.

a) Qual a distância que Mateus percorre se atravessar a praça e andar pelo gramado?

b) Qual distância ele percorre se andar pelas ruas?

c) Qual é a opção mais curta? E qual é a mais realista no dia a dia?

Utilizando o *software GeoGebra*, Mateus irá percorrer os caminhos indicados nos segmentos contínuos ou pontilhados, sendo o caminho contínuo o das ruas e o pontilhado o que ele atravessa a praça, como mostra a Figura 6.

a) Notando que o percurso é o segmento $\overline{AB}$, e ele é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC, podemos calcular sua medida pelo Teorema de Pitágoras. Para isso, precisamos dos valores dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$.

$$\overline{AC} = |1-1|+|7-1| = |6| = 6$$
$$\overline{CB} = |1-12|+|1-1| = |-11| = 11$$

Vale ressaltar que os módulos são de extrema importância, pois estamos trabalhando com distâncias.

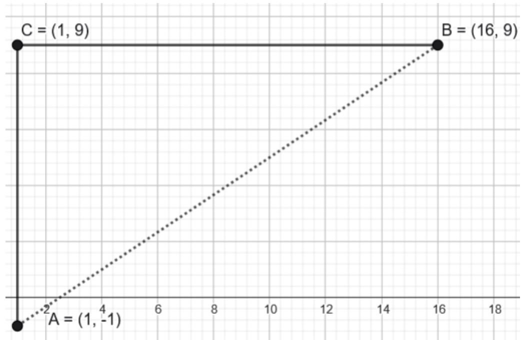

Figura 7: Caminho 1 entre os pontos A = (1, -1) e B = (16, 9)

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$$
$$\overline{AB}^2 = 6^2+11^2 = 36+121 \Longrightarrow \overline{AB} = \sqrt{157}$$
$$\text{e, sendo } \overline{AB} \geq 0 \text{ temos que } \overline{AB} \approx 12,53$$

b) Andando pelas ruas, Mateus irá percorrer a distância $\overline{AC}+\overline{CB}$ que pode ser calculada simplesmente pela soma das distâncias vertical e horizontal.

$$\overline{AC}+\overline{CB} = 6+11 = 17$$

Aqui, o estudante pode perceber que a definição de distância entre dois pontos na geometria do táxi está sendo aplicada:

$$\overline{AB} = |1-12|+|7-1| = |-11|+|6| = 11+6 = 17$$

c) A opção mais curta para Mateus é atravessar a praça, pois $12,53 < 17$. No dia a dia não é tão simples andar pelas diagonais, pois ao invés da praça podemos encontrar edifícios e construções que impedem esse trajeto.

Questão 2. Na aula de matemática, os estudantes recebem um mapa de uma cidade quadriculada, onde só é possível andar para cima e para os lados. No jogo, o personagem deve ir do ponto A = (1, -1) ao ponto B = (16, 9).

a) Qual é a distância percorrida pelo personagem?

b) Se o personagem pudesse voar em linha reta, qual seria a distância percorrida por ele?

c) Qual geometria descreve a cidade?

Uma das características da Geometria do Táxi é que há diversas opções para traçar o menor caminho entre dois pontos. Nas imagens abaixo, temos essa comparação nas Figura 7 e Figura 8, onde a distância euclidiana é o segmento pontilhado entre A e B, e a distância do táxi é o segmento contínuo passando pelos pontos C, D e E.

a) A distância pode ser calculada pela geometria do táxi. Utilizando a Figura 7, temos:

$$\overline{AB} = |1-16|+|-1-9| = |-15|+|-10| = 15+10 = 25$$

Utilizando a Figura 8:

$$\overline{AB} = \overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EB}$$

$$\overline{AB} = (|1-1|+|-1-5|)+(|1-6|+|5-5|)+ (|6-6|+|5-9|)+(|6-16|+|9-9|)$$

 ISSN: 2675-3588

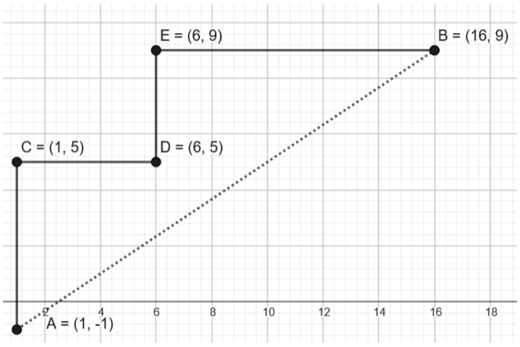

Figura 8: Caminho 2 entre os pontos A = (1, -1) e B = (16, 9)

Figura 9: Caminho entre escola e casa pelo *Google Earth*

$$\overline{AB} = |-6|+|-5|+|-4|+|-10| = 6+5+4+10 = 25$$

b) Se o personagem pudesse voar, ele percorreria o segmento $\overline{AB}$, a hipotenusa do triângulo retângulo ABC na Figura 7.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = (|1-1|+|-1-9|)^2 + (|1-16|+|9-9|)^2$$

$$\overline{AB}^2 = 10^2 + 15^2 \Longrightarrow \overline{AB} = \sqrt{325} \approx 18,03$$

c) A geometria do táxi é a geometria que melhor descreve a cidade, pois simula ruas em grades onde não se pode andar na diagonal.

c. Relação entre as duas geometrias

Essa atividade tem como objetivo fazer uma comparação entre o uso das duas geometrias no cotidiano do aluno, e tem como base o município de Palmas-TO e o Colégio Estadual Dom Alano Marie Du Noday.

Questão 1. Utilizando o aplicativo *Google Earth*, calcule a distância entre a sua casa e a sua escola.

Aqui utilizaremos o Colégio Estadual Dom Alano Marie Du Noday em Palmas-TO como referência. A Figura 3 já representa os pontos da escola e casa, bastando calcular a distância entre eles. Utilizando a ferramenta *Adicionar caminho ou polígono* clique nos pontos marcados para criar um caminho. A Figura 9 mostra que o comprimento / distância encontrada foi de 3.496,77 metros.

Questão 2. Utilizando o aplicativo *Google Maps*, calcule a distância entre a sua casa e a sua escola.

Encontre sua casa copiando as informações das coordenadas do *Google Earth* para o *Google Maps* e selecione a

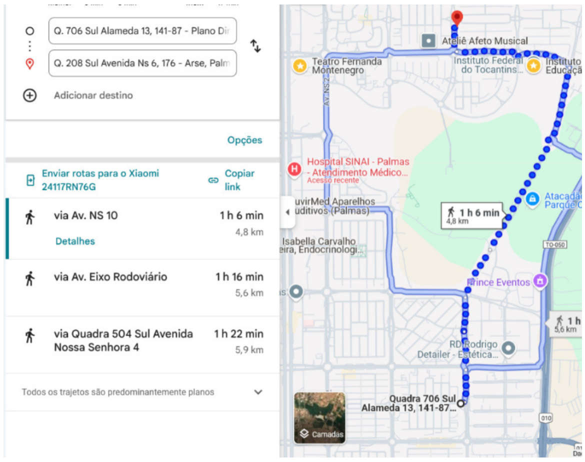

Figura 10: Caminho entre escola e casa pelo *Google Maps*

opção *Rotas*. A Figura 10 mostra que o trajeto sugerido pelo *Google Maps* tem 4,8 km de distância.

Sugerimos que o professor peça para os estudantes observarem os trajetos sugeridos pelo aplicativo. Essa diferença entre distâncias é justificada pelo quê? Por que as distâncias entre os aplicativos são diferentes? Essas perguntas irão guiar as investigações do uso das geometrias euclidiana e do táxi. É importante também investigar como os alunos entenderam essas atividades. Uma lista com algumas perguntas que podem guiar o professor por essa investigação:

- Qual tipo de geometria você utiliza mais no dia a dia?
- Qual tipo de geometria você utiliza mais na sala de aula/ aulas de matemática?
- Por que você acha que essa diferença entre os cálculos das distâncias nas GE e Geometria do Táxi ocorre?
- A distância na geometria do táxi sempre será maior do que na geometria euclidiana? Quando ela será igual?
- Cite algum veículo que não se move como a geometria euclidiana e geometria do táxi estão propondo.
- Quais outras geometrias você acha que existem?
- O que é necessário para 'criar' uma geometria?
- Você acha que as atividades propostas foram boas? Explique.
- Existem alguma cidade que as vias de trânsito se parecem mais com uma malha quadriculada? Pode citar algum exemplo?
- Se fosse possível utilizar sempre a geometria euclidiana para deslocamentos na sua cidade, você acha que seria mais fácil ou mais difícil o trânsito? Explique.

V. CONCLUSÕES

Apesar de serem simples, as atividades apresentadas são importantes para que os estudantes possam expandir seu conhecimento sobre a matemática. A inclusão da geometria do táxi nas aulas de matemática não toma muito tempo e proporciona maior interação entre o conteúdo e o contexto do estudante, deixando também de relacionar a matemática a algo muito teórico e de difícil aplicação, ou algo muito relacionado a calculadoras.

Os *softwares Google Earth* e *Google Maps* foram escolhidos pela facilidade de uso e gratuidade. O *Geogebra* é uma ferramenta que tem influência muito positiva na aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos. A visualização gráfica dos conceitos permite ao estudante elaborar conjecturas sobre os conceitos mostrados nos livros.

REFERÊNCIAS

[1] E. M. BARBARESCO and M. F. Z. MORGADO, "Geometria do taxi e suas aplicações," *XXV Semana da Matemática IBILCE/UNESP*, pp. 1–28, 2013.

[2] E. C. R. T. da SILVA, P. M. B. BELLEMAIN, and T. F. GALVÃO, "Para aonde vai esse táxi? uma revisão da literatura sobre a geometria do táxi no brasil," *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, vol. 16, pp. 1–21, 2021.

[3] E. F. KRAUSE, *Taxicab Geometry*. Dover Publications, 1986.

[4] B. M. da Educação., "Base nacional comum curricular," *MEC, Brasília*, 2018.

 ISSN: 2675-3588