Raízes de Equações Polinomiais via Teorema de Bolzano-Cauchy

Roots of Polynomial Equations using the Bolzano-Cauchy Theorem

Paulo Henrique de Araujo Pereira[1] e Rogério Azevedo Rocha[2]

[1] *Instituto Federal do Tocantins (IFTO), Curso de Matemática, Campus Paraíso, Brasil*
[2] *Universidade Federal do Tocantins (UFT), Curso de Ciência da Computação, Campus Palmas, Brasil*

Data de recebimento do manuscrito: 14/11/2023
Data de aceitação do manuscrito: 11/12/2023
Data de publicação: 11/12/2023

Resumo—Neste artigo apresentamos uma demonstração (acessível para estudantes do ensino médio) de um importante Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy que garante, sob certas condições, raízes de equações polinômiais. Expomos os resultados teóricos necessários para um desejável entendimento do mesmo, sempre ilustrando-os através de exemplos e comentários. E por fim, buscamos mostrar a importancia do Corolário apresentando algumas de suas diversas aplicações.

Palavras-chave— Teorema de Bolzano-Cauchy; Raízes de equações polinomiais; Aplicações

Abstract—*In this article we present a proof (accessible to high school students) of an important corollary of the Bolzano-Cauchy Theorem that guarantees, under certain conditions, roots of polynomial equations. We expose the theoretical results necessary for a desirable understanding of it, always illustrating them through examples and comments. And finally, we seek to show the importance of the Corollary by presenting some of its various applications.*

Keywords—*Bolzano-Cauchy theorem; Roots of polynomial equations; Applications*

I. Introdução

O Teorema de Bolzano-Cauchy, também conhecido como Teorema de Bolzano ou Teorema do Valor Intermediário, é um dos conceitos fundamentais da análise matemática. Desenvolvido pelo matemático Bernard Bolzano (1781 à 1848) e formalizado por Augustin-Louis Cauchy (1789 à 1857), este teorema estabelece uma condição crucial para a existência de um ponto onde uma função contínua atinge um valor específico entre dois pontos dados do seu contra-domínio.

De maneira mais precisa, o Teorema de Bolzano-Cauchy garante que se uma função contínua f está definida em um intervalo fechado $[a,b]$, então para qualquer valor $\bar{y}$ que esteja entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um valor c no intervalo aberto (a,b) tal que $f(c) = \bar{y}$.

Além da Matemática, esse Teorema é de grande importância em diversas áreas, incluindo:

Economia e Finanças: Em economia, o Teorema é usado para demonstrar a existência de equilíbrios em mercados. Por exemplo, em um mercado de bens, onde a oferta e a demanda são funções contínuas, o teorema garante que existe um preço de equilíbrio onde a quantidade demandada é igual à quantidade oferecida.

Geografia e Cartografia: Na cartografia, o Teorema é aplicado para garantir a existência de pontos em um terreno que possuam as mesmas coordenadas geográficas (latitude e longitude), considerando um mapa contínuo.

Física: Em física, especialmente na mecânica, o teorema é usado para provar que, em determinados casos, um objeto em movimento contínuo deve passar por uma posição específica durante seu percurso.

Biologia e Medicina: Em estudos de processos biológicos e fisiológicos, o Teorema pode ser aplicado para garantir a existência de momentos em que uma variável biológica (como a concentração de uma substância em um organismo) atinge um valor intermediário entre dois pontos de observação.

Otimização: Em problemas de otimização, o Teorema é usado para garantir que, sob certas condições, existe um ponto onde uma função atinge seu valor máximo ou mínimo.

Nesse trabalho, apresentaremos uma demonstração algébrica de um importante Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy que diz: "Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função contínua, tal que, em um intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $f(a).f(b)<0$, então a equação $f(x)=0$ tem (pelo menos) uma raiz neste intervalo". Apresentaremos a demostração, acessível para alunos do

Dados de contato: Rogério Azevedo Rocha, azevedo@uft.edu.br

ensino médio, para o caso particular em que a função f é uma função polinômial e, nesse caso, o Corolário é utilizado para garantir possíveis raízes da referida equação polinômial.

Na seção II, apresentaremos as funções polinomiais com alguns resultados preliminares ilustrados através de exemplos; na seção III, apresentaremos a demostração algébrica do Corolário e, por fim, na seção IV, apresentaremos algumas aplicações.

II. FUNÇÃO POLINOMIAL

Neste artigo, as funções que vamos considerar são funções polinomiais com coeficientes reais, isto é, $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_o$$

onde $a_i \in \mathbb{R};\ 0 \le i \le n$. Caso $a_n \neq 0$, dizemos que o grau da função polinomial é n. Um número complexo α é raíz da equação polinomial $p(x) = 0$ se $p(\alpha) = 0$.

Exemplo 1 *A função $p(x) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$p(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 36x - 36$$

é uma função polinomial de grau 5 e a equação polinomial $p(x) = 0$ tem como raízes $-3,\ -2,\ 2,\ -1-i\sqrt{2}$ e $-1+i\sqrt{2}$.

O Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) garante que para qualquer polinômio não constante com coeficientes complexos, sempre haverá pelo menos uma raiz complexa. Esse resultado é crucial em diversas áreas da matemática e em muitos contextos práticos. Como vamos considerar funções polinomiais com coeficientes reais, o TFA, em particular, poderá ser aplicado no nosso contexto. Segue o enunciado.

Teorema 1 (Fundamental da Álgebra) *Seja $p(x)$ uma função polinomial com coefientes complexos, isto é,*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_o$$

onde $a_i \in \mathbb{C};\ 0 \le i \le n$. Se o grau de $p(x)$ for maior ou igual a 1 então, a equação $p(x) = 0$ tem pelo menos uma raíz complexa.

Prova: Conferir [1] ou [2].

Exemplo 2 *A equação polinomial $p(x) = x^2 + 2x + 3 = 0$ não possui raizes reais ($\Delta < 0$), no entanto, o Terema Fundamental da Álgebra garante pelo menos uma raíz complexa. Neste caso, são duas: $\alpha_1 = -1 - i\sqrt{2}$ e $\alpha_2 = -1 + i\sqrt{2}$.*

O Teorema do Resto é um resultado importante na divisão de polinômios. Ele fornece uma maneira de dividir um polinômio por um binômio da forma $x - c$, onde c é uma constante.

Teorema 2 (Teorema do Resto) *Seja*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_o$$

uma função polinomial de grau n com coefientes complexos e c uma constante, então o resto da divisão de $p(x)$ por $x - c$ é igual a $p(c)$, isto é, existe uma função polinomial $q(x)$ tal que $p(x) = (x - c)q(x) + p(c)$.

Prova: Conferir [3].

Exemplo 3 *Dividindo a função polinomial*

$$p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

por $(x - 2)$ obtemos, como quociente, a função polinomial $q(x) = x^3 + x^2 - 5x - 9$ e, como resto, a constante real igual a -12, isto é,

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 2)(x^3 + x^2 - 5x - 9) - 12.$$

Note que o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 2$ é igual a $p(2)$.

Corolário 1 *Seja*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_o$$

uma função polinomial de grau n com coefientes complexos e c uma constante. Se c for uma raíz da equação polinomial $p(x) = 0$, isto é, se $p(c) = 0$ então, $x - c$ divide $p(x)$, isto é, existe uma função polinomial $q(x)$ tal que

$$p(x) = (x - c)q(x).$$

Prova: Basta aplicar o Teorema 2 e observar que $p(c) = 0$.

Exemplo 4 *Considere a função polinomial*

$$p(x) = x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 4x - 20.$$

A equação polinomial $p(x) = 0$ possui $x = 5$ como raíz, isto é, $p(5) = 0$. Além disso, $p(x) = (x^4 - 5x^2 + 4)(x - 5)$.

Conhecendo uma raíz de uma equação polinomial, o Corolário 1 nos fornece uma maneira de fatorar o referido polinômio. E, como consequência, conhecendo todas as raízes de um polinômio, obtemos uma importante relação entre as raízes e a sua forma fatorada completa. Segue o resultado.

Teorema 3 (Teorema da Decomposição) *Seja*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_o$$

uma função polinomial de grau $n \ge 1$ com coefientes complexos que possui $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ como raízes reais ou complexas (possivelmente com repetição). Então,

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n).$$

Prova: Aplicando o Corolário 1 para $p(x)$ e $c = \alpha_1$, existe uma função polinomial $q_1(x)$ de grau $n - 1$ tal que

$$p(x) = q_1(x)(x - \alpha_1).$$

Desde que, $q_1(\alpha_2) = 0$, aplicando o Corolário 1 para $q_1(x)$ e $c = \alpha_2$, existe uma função polinomial $q_2(x)$ de grau $n - 2$ tal que

$$q_1(x) = q_2(x)(x - \alpha_2).$$

Assim, $p(x) = q_2(x)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$. Repetindo sucessivamente esse processo, obtemos:

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n).$$

 ISSN: 2675-3588

Exemplo 5 *Considere a função polinomial*

$$p(x) = x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 11x + 6$$

que possui $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = -2$ *e* $\alpha_3 = -1$ *como raízes reais e* $\alpha_4 = i$ *e* $\alpha_5 = -i$ *como raízes complexas. Nesse caso, temos*

$$p(x) = (x+3)(x+2)(x+1)(x-i)(x+i).$$

Observação 1 *As possíveis repetições das raízes são conhecidas como multiplicidade da raíz. Por exemplo, uma raíz que aparece duas vezes possui multiplicidade 2; uma raíz que aparece três vezes possui multiplicade 3 e, assim por diante.*

Existem outras relações que envolvem as raízes de um polinômio. Por exemplo, as relações de Girard envolvem as raízes e os coeficientes do referido polinômio. Elas generalizam as fórmulas da soma e produto das raízes de uma equação polinomial de grau 2 para um polinômio de grau n. Em seguida, apresentamos as relações de Girard para uma equação polinomial de grau 2 e 3. O caso geral, isto é, para uma equação polinômial de grau n, pode ser conferido em [4].

Proposição 1 (Relações de Girard) *a) (caso* $n = 2$*) Considere*

$$p(x) = a_2.x^2 + a_1.x^1 + a_0$$

um polinõmio de grau 2 *e suas respectivas raízes reais e/ou complexas* x_1, x_2. *Temos as seguintes relações:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & \frac{-a_1}{a_2} \\ x_1.x_2 & = & \frac{a_0}{a_2} \end{cases}$$

b) (Caso $n = 3$*) Considere*

$$p(x) = a_3.x^3 + a_2.x^2 + a_1.x^1 + a_0$$

um polinõmio de grau 3 *e suas respectivas raízes reais e/ou complexas* x_1, x_2 *e* x_3. *Temos as seguintes relações:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & \frac{-a_2}{a_3} \\ x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 & = & \frac{a_1}{a_3} \\ x_1.x_2.x_3 & = & -\frac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

Exemplo 6 *Consisidere o polinômio*

$$p(x) = x^2 + 2x - 8.$$

a) *Encontre as relações de Girard para* $p(x)$*;*
b) *Sabendo que as raízes de* $p(x)$ *são* -4 *e* 2*, verifique que as relações encontradas no item a) são satisfeitas.*
Solução:
a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & \frac{-a_1}{a_2} = \frac{-2}{1} = -2 \\ x_1.x_2 & = & \frac{a_0}{a_2} = \frac{-8}{1} = -8 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -4 + 2 = -2. \\ x_1.x_2 &= -4(2) = -8. \end{aligned}$$

O próximo exemplo ilustra as relações de Girard para o caso em que $n = 3$

Exemplo 7 *Consisidere o polinômio*

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10.$$

a) *Encontre as relações de Girard para* $p(x)$*;*
b) *Sabendo que as raízes de* $p(x)$ *são* 2, $2 - i$ *e* $2 + i$*, verifique que as relações encontradas no item a) são satisfeitas.*
Solução:
a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & \frac{-a_2}{a_3} = \frac{-(-6)}{1} = 6 \\ x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 & = & \frac{a_1}{a_3} = \frac{13}{1} = 13 \\ x_1.x_2.x_3 & = & \frac{-a_0}{a_3} = \frac{-(-10)}{1} = 10 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 + 2 + i + 2 - i = 6. \\ x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 &= 2(2+i) + 2(2-i) + (2+i)(2-i) \\ &= 4 + 2i + 4 - 2i + 5 = 13. \\ x_1.x_2.x_3 &= 2(2+i)(2-i) \\ &= 2(5) = 10. \end{aligned}$$

As equações polinomiais com coeficientes reais possuem a sequinte propriedade: Se um numéro complexo for raíz da referida equação, então o seu conjugado também será raíz. Segue o resultado:

Teorema 4 (Raízes conjugadas) *Seja*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

uma função polinomial de grau $n \geq 2$ *com coefientes reais. Se um número complexo* $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$ *é raíz de* $p(x)$ *então,* $\bar{z} = a - bi$ *(conjugado de* z*) também é raíz de* $p(x)$ *e tem a mesma multiplicidade de* z*.*

Prova: Sejam z e w números complexos e $\bar{z}$ e $\overline{w}$ seus respectivos conjugados. Temos:

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \overline{w}, \ \overline{xz} = x\bar{z} \ \text{ e } \ \overline{z^n} = (\bar{z})^n.$$

Suponha que $p(z) = 0$, isto é, que

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_o = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} p(\bar{z}) &= a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_2 \bar{z}^2 + a_1 \bar{z} + a_o \\ &= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_2 \overline{z^2} + a_1 \bar{z} + a_o \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_2 z^2} + \overline{a_1 z} + a_o \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_o} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observação 2 *Como consequência do Teorema 4, temos: a) O número de raízes complexas de um polinômio com coeficientes reais é um número par; b) Todo polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raíz real.*

Exemplo 8 *a) A função polinomial*

$$p(x) = x^5 + 8x^4 + 14x^3 - 14x^2 - 63x - 90$$

possui como raízes reais $-5, -3$ *e* 2 *e, como raízes complexas, os conjugados* $-1 + i\sqrt{2}$ *e* $-1 - i\sqrt{2}$*;*
b) A função polinomial

$$p(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 16x - 16$$

possui o número 2 *como raíz real e, como raízes complexas, os conjugados* $-1+i$, $-1-i$, $-1+i\sqrt{3}$ *e* $-1-i\sqrt{3}$.

III. O Teorema de Bolzano-Cauchy

O Teorema do Bolzano-Cauchy, também conhecido como Teorema de Bolzano ou Teorema do Valor intermediário é um importante conceito da análise matemática que descreve uma propriedade fundamental das funções contínuas em um intervalo fechado.

Teorema 5 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e, suponha sem perda de generalidades, que $f(a) < f(b)$. Então, se $\bar{y} \in (f(a), f(b))$, existe pelo menos um valor $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \bar{y}$.*
Prova: Conferir [5].

Exemplo 9 *Considere $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \text{seno x}.$$

Considere $1/2 \in (f(0), f(\pi/2)) = (0,1)$. O Teorema 5 garante a existência de $c \in (0, \pi/2)$ tal que $f(c) = 1/2$. Observe que $c = \pi/6 \in (0, \pi/2)$ satisfaz

$$f(\pi/6) = sen\pi/6 = 1/2.$$

O seguinte Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy (Teorema 5) garante a existência de uma raíz da equação polinomial $p(x) = 0$, quando p for um polinômio de grau $n \geq 1$. Apresentaremos uma demonstração algébrica desse corolário acessível para o público do ensino médio.

Corolário 2 *Considere a função polinomial*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

de grau $n \geq 1$ com coefientes reais ($a_i \in \mathbb{R}$; $i = 1, ..., n$), tal que, em um intervalo $[a,b]$, $p(a)p(b) < 0$, então a equação polinomial $p(x) = 0$ possui um número ímpar de raízes reais no intervalo (a,b).

Prova: Caso $n = 1$, isto é, caso $p(x) = a_1 x + a_0$ com $a_1 \neq 0$, $p(x) = 0$ possui como única raíz real o número $\alpha = -a_0/a_1$. Considere, então, que $n \geq 2$. Sejam:
a) $z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, ..., z_r, \overline{z_r}$ as raízes complexas de $p(x) = 0$ que ocorrem em pares de conjugados (devido ao Teorema 4);
b) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ as raízes reais de $p(x) = 0$ internas ao intervalo $[a,b]$;
c) $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ as raízes reais de $p(x) = 0$ externas ao intervalo $[a,b]$.
Pelo Teorema Fundamental da Álbegra (Teorema 1), temos

$$2r + s + t = n$$

e, pelo Teorema da decomposição (Teorema 3),

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n (x - z_1)(x - \overline{z_1})...(x - z_r)(x - \overline{z_r}) \\ & \quad (x - \alpha_1)...(x - \alpha_s)(x - \beta_1)...(x - \beta_t). \end{aligned}$$

Faça

$$\begin{aligned} R(x) &= (x - z_1)(x - \overline{z_1})...(x - z_r)(x - \overline{z_r}), \\ S(x) &= (x - \alpha_1)...(x - \alpha_s) \text{ e} \\ T(x) &= (x - \beta_1)...(x - \beta_t). \end{aligned}$$

Assim, $p(x) = a_n R(x) S(x) T(x)$.
Em seguida, faremos o estudo do sinal de

$$p(a)p(b) = a_n^2 R(a)R(b)S(a)S(b)T(a)T(b). \quad (1)$$

a) Se $z = a + bi$; $b \neq 0$, então

$$(x - z)(x - \overline{z}) = [(x - a) - bi][(x - a) + bi] = (x - a)^2 + b^2 > 0.$$

Logo,

$$R(x) = (x - z_1)(x - \overline{z_1})...(x - z_r)(x - \overline{z_r}) > 0; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Em particular,

$$R(a)R(b) > 0;$$

b) β_i externa ao intervalo $[a,b]$ implica $\beta_i < a$ ou $\beta_i > b$. Caso $\beta_i < a$, temos: $a - \beta_i > 0$ e $b - \beta_i > 0$. Caso $\beta_i > b$, temos: $a - \beta_i < 0$ e $b - \beta_i < 0$. Assim, em ambos os casos, temos: $(a - \beta_i)(b - \beta_i) > 0$. Logo,

$$T(a)T(b) > 0;$$

c) α_i interna ao intervalo $[a,b]$ implica $a - \alpha_i < 0$ e $b - \alpha_i > 0$. Logo, $S(a)S(b)$ é um produto de s termos negativos da forma $(a - \alpha_i)(b - \alpha_i)$. Desde que, $R(a)R(b) > 0$, $T(a)T(b) > 0$ e $p(a)p(b) < 0$, por (1), devemos ter

$$S(a)S(b) < 0.$$

Portanto, o número de fatores de $S(a)S(b)$ deve ser um número ímpar, isto é, devem existir um número ímpar de raízes reais no intervalo (a,b).

IV. Aplicações

Problema 1 *Ao tentar determinar a acidez de uma solução saturada de hidróxido de magnésio em ácido clorídrico, um químico obteve a seguinte equação*

$$\frac{3,6.10^{-11}}{[H_3O^+]^2} = [H_3O^+] + 3,6.10^{-4} \quad (2)$$

para a concentração do íon hidrônio $[H_3O^+]$. Calcule a quantidade aproximada de $[H_3O^+]$ presente nessa solução.

Solução: A equação (2) é equivalente a

$$[H_3O^+]^3 + 3,6.10^{-4}[H_3O^+]^2 - 3,6.10^{-11} = 0. \quad (3)$$

Multiplicando a equação (3) por 10^{12}, obtemos

$$(10^4 [H_3O^+])^3 + 3,6.(10^4 [H_3O^+])^2 - 36 = 0. \quad (4)$$

Faça $x = 10^4 [H_3O^+]$ (Observe que x é positivo, pois $[H_3O^+]$ representa a concentração do íon hidrônio e, portanto, deve ser positivo). Deste modo, a equação (4) passa a ser

$$p(x) = x^3 + 3,6.x^2 - 36 = 0. \quad (5)$$

Uma vez que, em (5),

$$p(2) = -13,6 < 0 \;\text{ e }\; p(3) = 23,4 > 0,$$

o Corolário 2 garante que existe $x_0 \in (2,3)$ tal que $p(x_0) = 0$. Portanto, a quantidade de $[H_3O^+]$ é um valor entre 2.10^{-4} e 3.10^{-4}.

Problema 2 *A figura a seguir mostra uma escada de 12m apoiada, por cima de um muro de 5m, em uma parede situada a 3m atrás do muro. Calcule a(s) possível(is) distância(s) aproximada(s) da base da escada à base do muro.*

 ISSN: 2675-3588

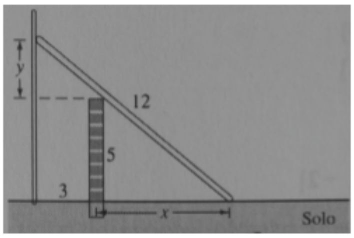

Figura 1: Escada Apoiada em um Muro.

Solução: Pelo Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo Maior, temos:

$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 144. \tag{6}$$

Pela semelhança dos triângulos menores, temos:

$$\frac{y}{5} = \frac{3}{x}. \tag{7}$$

Da equação (7), temos $y = 15/x$. Então, substituindo esse valor de y na equação (6), obtemos

$$(x+3)^2 + (\frac{15}{x} + 5)^2 = 144,$$

donde obtemos a seguinte equação polinomial

$$p(x) = x^4 + 6x^3 - 110x^2 + 150x + 225 = 0. \tag{8}$$

Da equação (6), concluímos que $x \in (0,9)$. Logo, testando valores (inteiros) para x nesse intervalo observamos que

$$p(2) = 149,\ \ p(3) = -72,\ \ p(6) = -243 \ \text{ e } \ p(7) = 344.$$

Então, pelo Corolário 2, existem $x_0 \in (2,3)$ e $x_1 \in (6,7)$ tal que $p(x_0) = 0$ e $p(x_1) = 0$. Portanto, as possíveis distâncias da base da escada à base do muro estão compreendidas entre $2m$ e $3m$, ou entre $6m$ e $7m$.

Problema 3 *Uma televisão, cujo preço a vista é de $R\$500,00$, é vendida em 6 prestações iguais de $R\$120,00$, a primeira sendo paga um mês após a compra. Qual é a taxa mensal de juros aproximada que está sendo cobrada?*

Solução: Se i denota a taxa mensal de juros que está sendo cobrada, então

$$500 = 120.\frac{1-(1+i)^{-6}}{i},$$

que é equivalente a

$$500i(1+i)^6 - 120(1+i)^6 + 120 = 0. \tag{9}$$

Fazendo $x = 1+i$ em (9), obtemos:

$$500(x-1)x^6 - 120x^6 + 120 = 0,$$

ou ainda,

$$500x^7 - 620x^6 + 120 = 0.$$

E assim, dividindo a equação por 20, obtemos

$$p(x) = 25x^7 - 31x^6 + 6 = 0.$$

Desde que

$$p(1,1) = -0,2004635 \ \text{ e } \ p(1,2) = 3,014016,$$

pelo Corolário 2, exsiste $x_0 \in (1,1;\ 1,2)$ tal que $p(x_0) = 0$. Portanto, $0,1 < i < 0,2$.

V. Conclusões

Apresentamos nesse artigo uma demonstração algébrica de um importante corolário do Teorema de Bozando-Cauchy (que garante raízes de equações polinomiais com coeficientes reais) acessível ao público do ensino médio. Os resultados teoricos necessários para o um bom entendimento do Corolário foram ilustados com exemplos e comentários, o que auxília na compreensão do mesmo. Por fim, apresentamos algumas de suas aplicações. Como trabalho futuro, desejamos aplicar a demonstração à turmas (testes) do ensino médio com o intuito de mensurar a absorção/receptividade do desenvolvimento da demonstração por parte dos alunos.

Referências

[1] C. D. Salvado, ***Teorema Fundamental da Álgebra: Ferramentas Para Demonstrar Para Alunos do Ensino Médio***. Rio de Janeiro: PROFMAT, 2016.

[2] B. Fine and G. Rosenberger, ***The Fundamental Theorem of Algebra***. New York: Springer, 1997.

[3] H. bing Yu, ***Problems And Solutions In Mathematical Olympiad***. China: World Scientific, 2022.

[4] P. H. A. Pereira, ***Polinômios: Teoria e Aplicações - Imagens Simétricas Através de Interpolação de Lagrange***. Palmas: PROFMAT, 2020.

[5] G. Àvila, ***Introdução à análise matemática***. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

 ISSN: 2675-3588