Método prático para cálculo de área de um polígono convexo tendo conhecimento dos seus vértices

Practical Method for Calculating the Area of a Convex Polygon with Knowledge of Its Vertices

Henrique Lobato da Silva[1], Rogério Figuereido Lira[1], Paulo Cleber Texeira Mendonça[1] e Warley Gramacho da Silva[1]

[1] *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal do Tocantins (UFT), Palmas/TO, Brasil*

Data de recebimento do manuscrito: 29/08/2023
Data de aceitação do manuscrito: 07/11/2023
Data de publicação: 09/11/2023

Resumo—Este artigo tem como objetivo apresentar um método prático para calcular a área de polígonos convexos com base em seus vértices, tornando esse processo compreensível para alunos em diferentes níveis educacionais, desde o ensino fundamental até o ensino superior. Para estudantes do ensino médio e superior, a abordagem será mais acessível devido ao conhecimento prévio de matrizes e determinantes. No entanto, esse método prático é projetado para ser compreendido por alunos independentemente de sua familiaridade com esses conceitos matemáticos. O artigo apresenta um método prático que foi previamente discutido por Zerbinatti em 2015, visando oferecer uma ferramenta acessível e aplicável para calcular áreas de polígonos convexos.

Palavras-chave— Método Prático. Cálculo de Área. Polígonos. Vértices.

Abstract—*This article aims to present a practical method for calculating polygon areas based on their vertices, making this process comprehensible for students at various educational levels, from elementary to higher education. While high school and college students will find the approach more accessible due to their prior knowledge of matrices and determinants, this practical method is designed to be understood by students regardless of their familiarity with these mathematical concepts. The article presents a formula previously discussed by Zerbinatti in 2015, aiming to provide an accessible and applicable tool for calculating polygon areas.*

Keywords— *Practical Method. Area Calculation. Polygons. Vertices.*

I. Introdução

No âmbito da geometria, calcular a área de um polígono pode parecer uma tarefa desafiadora. O desafio reside em determinar uma abordagem que seja acessível e eficaz, especialmente para estudantes em diferentes níveis educacionais. O cálculo da área de um polígono é uma noção matemática fundamental, desde as antigas civilizações. A idéia de calcular áreas de polígonos, como triângulos e quadriláteros, é muito antiga e não pode ser atribuída a uma única pessoa ou cultura específica. O matemático grego Euclides, em sua obra "Os Elementos", discutiu muitos aspectos da geometria, incluindo propriedades de polígonos e métodos para calcular suas áreas.

A habilidade de calcular a área de polígonos não é apenas um conceito abstrato na matemática, mas também tem aplicações práticas em várias áreas, como por exemplo: engenharia civil, arquitetura e até mesmo nas ciências ambientais, para catalogar regiões geográficas e avaliar a distribuição de ecossistemas.

Este artigo tem como propósito exemplificar um método prático para calcular a área de polígonos com base em seus vértices, com o objetivo de tornar esse processo compreensível para alunos em diversos níveis educacionais, abrangendo desde o ensino fundamental até o ensino superior. A abordagem é especialmente acessível aos estudantes de ensino médio e superior, devido à familiaridade prévia com conceitos de matrizes e determinantes.

No entanto, esse método prático foi desenvolvido para ser acessível a todos os alunos, independentemente de possuírem conhecimento prévio sobre matrizes e determinantes. Apresentaremos, a seguir, uma fórmula que também foi explorada por Zerbinatti em 2015 [1], com a intenção de oferecer uma ferramenta acessível e aplicável para calcular as áreas de polígonos.

Dados de contato: Henrique Lobato da Silva, hlobato.silva@gmail.com

II. Área de um triângulo via determinante

O estudo da geometria desempenha um papel fundamental no currículo de matemática do ensino médio, abrangendo diversos tópicos, incluindo o cálculo da área de triângulos por meio do uso de determinantes. Esse método, amplamente ensinado, é frequentemente explorado tanto em livros didáticos comuns do ensino médio como no aclamado "Geometry: A Comprehensive Course", escrito por Dan Pedoe [2]. A fórmula que serve de base para esse cálculo é:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

se $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3) são os vértices do triângulo.

III. Área de um polígono convexo qualquer via determinante

Para o cálculo de um polígono qualquer, basta decompormos em vários triângulos e fazermos o cálculo da área separado e somá-las, conforme demonstrado por [1]. Essa área é obtida através do conceito de determinante, justamente para chegarmos no método prático de cálculo de área de um polígono qualquer. Dessa maneira, teremos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right) \tag{2}$$

Ainda podemos reescrever essa fórmula para entendermos com mais clareza o método da seguinte forma,

$$A = \frac{1}{2} \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + \dots + x_{n-1} \cdot y_n + x_n y_1 - y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_3 - \dots - y_{n-1} \cdot x_n - y_n \cdot x_1) \tag{3}$$

Apesar do conceito de determinantes ser claro e bem abordado em sala de aula com os alunos, apresentar o cálculo de área nesse formato pode acabar gerando certa dificuldade pelo aluno, conforme foi abordado por [3]. Vejamos o exemplo da Figura 1.

Antes de iniciarmos o cálculo, é necessário decompor em triângulos, como mostrado na Figura 2.

Tendo o triângulo ABC como ΔABC, o triângulo ACD como ΔACD, o triângulo ADE como ΔADE e o triângulo AEF como ΔAEF, temos que a área do polígono em questão se dá pela soma das áreas dos triângulos ΔABC, ΔACD, ΔADE e ΔAEF, de tal forma que, pelas fórmulas comumente abordadas por [2] e outras referências, ficaria:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

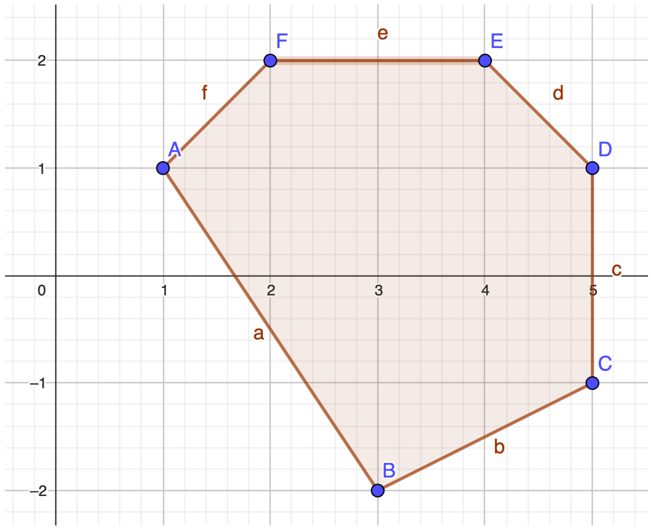

Figura 1: Hexágono ABCDEF.

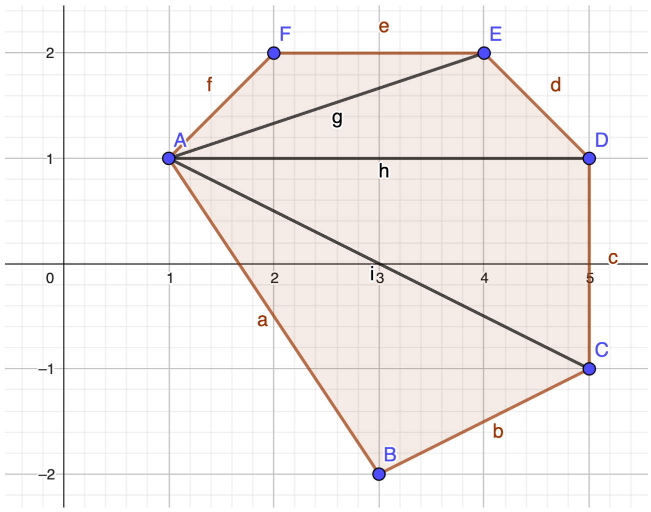

Figura 2: Hexágono decomposto em triângulos

Utilizando a regra de Sarrus para resolver os determinantes, obtemos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (8 + 8 + 4 + 2) \tag{5}$$

$$A = 11u.a. \tag{6}$$

IV. Método prático para cálculo de áreas

O método prático que é abordado aqui, visa facilitar a forma com que o aluno enxerga e extrai os pares ordenados de uma determinada atividade, para isso reescrevemos a multiplicação conforme o método da Figura 3, com as setas indicando os produtos que devem ser efetuados, ressaltando que o vértice escolhido para iniciar sempre é repetido no final.

Em seguida, fazemos a diferença entre a adição dos resultados obtidos à direita da Figura 3 e a adição dos resultados obtidos à esquerda da Figura 3. A área do polígono será o produto de $\frac{1}{2}$ pelo resultado obtido anteriormente.

 ISSN: 2675-3588

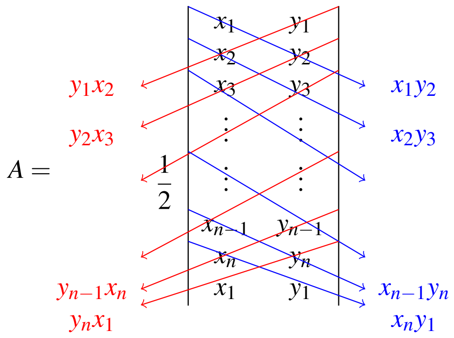

Figura 3: Método prático.

Pensando em facilitar o entendimento dos alunos, aplicamos o método prático, e o mais importante, sem precisar fazer a decomposição em triângulos. Resolvendo o mesmo exemplo feito na seção anterior, teremos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot [20 - (-2)] \tag{7}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot [20 + 2] \tag{8}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 22 \tag{9}$$

$$A = 11u.a. \tag{10}$$

E por fim, a Figura 4 ilustra o mesmo exemplo em forma de passo a passo para entendimento do método.

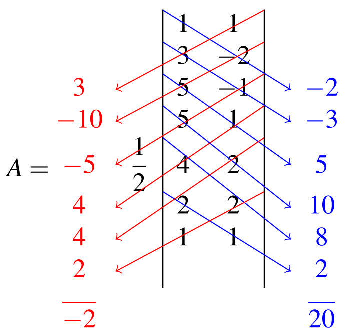

Figura 4: Exemplo do método prático.

V. Conclusões

A abordagem traçada neste artigo visa alcançar uma compreensão mais aberta e acessível no campo do cálculo de áreas de polígonos. Ao exemplificar um método prático que se baseia nos vértices dos polígonos, este artigo tenta desmistificar um conceito que pode ser intimidante para alunos em diversos níveis educacionais, desde o ensino fundamental até o ensino superior.

Facilitar o cálculo para os alunos desempenha um papel crucial na educação matemática e no desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas. A importância de tornar os processos de cálculo mais acessíveis está intrinsecamente ligada a vários aspectos positivos da aprendizagem e do desenvolvimento dos estudantes.

Referências

[1] P. H. Zerbinatti, "Áreas de polígonos via determinantes," Master's thesis, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro/SP, 2015.

[2] D. Pedoe, *Geometry: A Comprehensive Course*, ser. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=s7DDxuoNr_0C

[3] S. M. d. Santos and I. M. M. Z. P. d. Almeida, "Medo de matemática e trauma na relação com o aprender: uma leitura psicanalítica," *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, vol. 36, no. 74, p. 1273–1292, Sep 2022. [Online]. Available: https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a16

ISSN: 2675-3588