ACADEMIC JOURNAL ON COMPUTING, ENGINEERING AND APPLIED MATHEMATICS, VOL. 04, NO. 02, OCTOBER 2023

Deconvolução: uma introdução

Deconvolution: an introduction

Maxwell Diógenes Bandeira de Melo[1], Sergio Ricardo Gobira[1], Sergio Manuel Rivera Sanhueza[1], Eduardo Simões[2] e Adson Ferreira da Rocha[3]

[1]*Universidade Federal do Tocantins, Curso de Engenharia Elétrica, Palmas, TO, BR*
[2]*Universidade Federal do Tocantins, Curso de Filosofia, Palmas, TO, BR*
[3]*Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Elétrica, Brasília, DF, BR*

Reception date of the manuscript: 14/08/2023
Acceptance date of the manuscript: 13/09/2023
Publication date: 16/10/2023

Resumo- Convolução é uma maneira de se combinar dois sinais para se obter um terceiro sinal. É uma importante técnica em sistemas lineares. Utilizando a estratégia da decomposição de um impulso, os sistemas são descritos por um sinal chamado de resposta ao impulso. Convolução é importante porque relaciona três sinais de interesse: o sinal de entrada, o sinal de saída e a resposta ao impulso. A operação inversa da convolução é as vezes conhecida como deconvolução. Neste trabalho falamos de deconvolução, a operação inversa à convolução. Apresentamos a teoria generalizada e um breve estudo de caso com e sem ruído.

Palavras-chaves—Convolução, Deconvolução, Ruído.

Abstract- *Convolution is a way of combining two signals to obtain a third signal. It is an important technique in linear systems. Using the strategy of decomposing an impulse, systems are described by a signal called the impulse response. Convolution is important because it relates three signals of interest: the input signal, the output signal and the impulse response. The inverse operation of convolution is sometimes known as deconvolution. In this paper we talk about deconvolution, the inverse operation to convolution. We present the generalised theory and a brief case study with and without noise.*

Keywords-Convolution, Deconvolution, Noise.

I. INTRODUÇÃO

Convolução é uma operação amplamente usada em sistemas físicos. É a maneira matemática de combinar dois sinais, obtendo-se um terceiro, sendo um conceito muito importante em processamento digital de sinais [1]. É um conceito fundamental em matemática e é amplamente utilizado em sistemas físicos, em sistemas de engenharia, em processamento de sinais, em processamento de imagens e em muitas outras áreas [5]. Com base no princípio da superposição, os sistemas podem ser descritos por sua resposta ao impulso. Convolução é um conceito importante porque relaciona três sinais de interesse, a saber: a entrada, a saída e a resposta ao impulso. Convolução é uma operação matemática formal, tal como multiplicação, adição e integração. A adição, dados dois números, produz um terceiro número, e a convolução, dados dois sinais, produz um terceiro sinal [5]. Em sistemas lineares e invariantes no tempo (LTI), a convolução é um processo natural. Para sistemas discretos lineares e invariantes no tempo, a expressão da convolução pode ser dada pela equação (1).

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[n-m]x[m] \tag{1}$$

Onde ***x[m]*** é o sinal discreto de entrada de um sistema, ***h[n-m]*** é a resposta discreta no tempo ao impulso desse sistema, e ***y[n]*** é o sinal de saída discreto no tempo. Então, dado que um sistema é linear e invariante no tempo, uma vez que seja possível obter a resposta ao impulso desse sistema, é possível obter a resposta desse sistema para qualquer entrada. Em trabalhos que envolvem o computador geralmente usa-se sinais discretos, e os sinais ***x[n]***, ***h[n]*** e ***y[n]*** correspondem a sequências de números amostrados a uma frequência conveniente [3].

Deconvolução é o processo inverso da convolução. É usada, por exemplo, para melhorar fotografias digitais. O conceito é que, dada a resposta de um sistema, se pudermos obter o inverso da resposta ao impulso, pode-se reconstruir exatamente o sinal de entrada. O problema no domínio do tempo corresponde à inversão de uma matriz, o que o torna, algumas vezes, um pouco mais demorado e mais instável,

Contact data: Maxwell Diógenes Bandeira de Melo, maxwellmelo@uft.edu.br.

sendo, em geral, mais fácil resolvê-lo no domínio da frequência.

A equação (1) pode ser reescrita de forma mais sintética como

$$y_n = \sum_{m=0}^{N-1} h_{n-m} x_m \qquad (2)$$

onde xm é o sinal discreto de entrada de um sistema, hn-m é a resposta discreta no tempo ao impulso desse sistema, e yn é o sinal de saída discreto no tempo.

O problema da equação (1) pode ser descrito por meio de uma relação matricial, que é indicado de forma mais sintética, pela equação (3).

$$[y] = [h][x] \qquad (3)$$

Em que [y] é o vetor de saída do sistema, [h] é a matriz de Toeplitz representando a convolução discreta e [x] é o vetor discreto de entrada. Uma matriz de Toeplitz é uma matriz em que cada elemento da diagonal principal é igual e os elementos acima e abaixo da diagonal principal são constantes ou seguem um padrão regular. Em outras palavras, os elementos da matriz são constantes ao longo de cada linha e ao longo de cada coluna

Lembrando que, neste caso, M=N, expandindo a equação (3) chega-se à matriz circulante, mostrada na equação (4), que é um caso especial da matriz de Toeplitz.

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ y_{N-4} \\ y_{N-3} \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ h_{M-7} & h_{M-8} & h_{M-9} & h_{M-10} & \bullet & \bullet & \bullet & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{M-3} & h_{M-4} & h_{M-5} & h_{M-6} & \bullet & \bullet & \bullet & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_{M-2} & h_{M-3} & h_{M-4} & h_{M-5} & \bullet & \bullet & \bullet & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{M-1} & h_{M-2} & h_{M-3} & h_{M-4} & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ x_{N-4} \\ x_{N-3} \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Em que [y0...yN-1] é o vetor de saída do sistema, [h]MxN é uma matriz de Toeplitz representando a convolução discreta e [x0...xN-1] é o vetor discreto de entrada [2]

II. DECONVOLUÇÃO

O problema da deconvolução pode ser encarado como a solução inversa do sistema linear proposto pela equação (3). Assim, para realizar a deconvolução é necessário achar o vetor xn tal que:

$$[x] = [h]^{-1}[y] \qquad (5)$$

Em que [y] é o vetor de saída do sistema, [h]-1 é a matriz de Toeplitz inversa representando a convolução discreta e [x] é o vetor discreto de entrada.

Entretanto, na prática o problema da inversão de uma matriz nem sempre é uma tarefa simples e, sempre que possível, procura-se evitar este procedimento, embora, é com o desenvolvimento computacional dos dias atuais, esse procedimento é bastante usado. As vezes, o motivo das instabilidades na inversão ocorre porque pequenos erros em alguns coeficientes podem levar a soluções completamente instáveis. Então, para resolver esse problema, frequentemente usa-se a matriz da Transformada de Fourier Discreta (DFT). A matriz da DFT é mostrada na equação (6),

$$[W] = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \dots & W^{-(N-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \dots & W^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W^{-(N-1)} & W^{-2(N-1)} & \dots & W^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

onde $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ [4] e [W] é a matriz da DFT. Multiplicando ambos os lados da equação (3) pela matriz de Fourier obtém-se a equação (7).

$$[W][y] = [W][h][x] \Leftrightarrow [W][y] = [W][h][W]^{-1}[W][x] \Leftrightarrow [Y] = [H][X] \qquad (7)$$

A matriz W-1 é simplesmente a matriz complexa conjugada da matriz W. Não é difícil mostrar que [W].[h].[W]-1 é uma matriz diagonal. Então, passa-se de um domínio temporal para um domínio onde há apenas a necessidade de multiplicações, e no plano da frequência teremos que resolver a equação (8),

$$X = [H]^r.[Y] \qquad (8)$$

onde [H]r é uma matriz diagonal cujos elementos são os recíprocos (índice r) da matriz [H]. A inversão de uma matriz diagonal tem como elementos os recíprocos dos elementos da matriz [H]. A inversão de uma matriz diagonal é relativamente simples, pois basta calcular o recíproco de cada elemento da diagonal. Em outras palavras, se x é um número real diferente de zero, o recíproco de x é representado como 1/x. É importante notar que uma vantagem de se usar a DFT (Discrete Fourier Transform) é evitar uma inversão de matriz que muitas vezes é lenta no domínio do tempo, e é comum usar uma operação mais eficiente, a FFT (Fast Fourier Transform), que é implementada por um algoritmo mais rápido.

Deconvolução no domínio do tempo: estudo de um caso

É interessante observar como se comporta o problema da deconvolução no domínio do tempo quando há ruído envolvido. Vejamos um caso em que o sistema possui uma

 ISSN: 2675-3588

resposta ao impulso que é uma exponencial. Esse sistema pode ser um sensor de temperatura baseado em um termopar em um meio convectivo, e supomos que a resposta ao impulso do mesmo é uma exponencial. Assume-se então que a função h[n] seja a seguinte exponencial:

$$h[n] = 2e^{-3n} \tag{9}$$

em que h[n] é um vetor representando a convolução discreta de um sistema e n é a variável de tempo discreta.

O gráfico correspondente a h[n] é mostrado na Figura 1. A função exposta está normalizada dividindo-se a amplitude de cada ponto pela soma das amplitudes de todas as amostras, de forma que o sistema não introduza energia no sinal. O intervalo de tempo em questão é 10s e o período de amostragem é 0.1s (frequência de amostragem de 10 Hz).

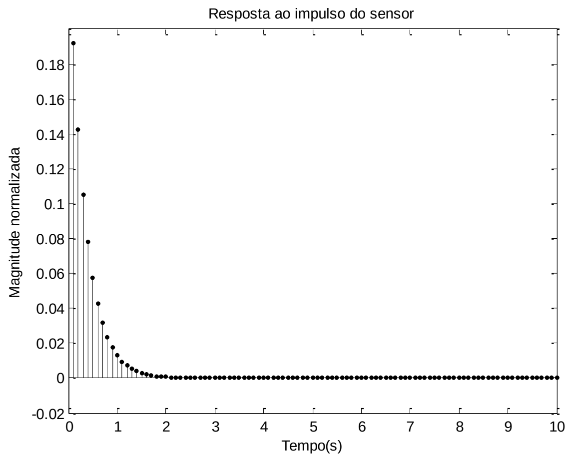

Figura 1. Resposta ao impulso para o sistema em análise. Para o sistema em análise nesta seção supomos uma resposta ao impulso exponencial.

Neste caso o sinal de entrada é um degrau unitário deslocado (u(n-50)) e é ilustrado na Figura 2. A convolução dos sinais discretos das Figuras 1 e 2 é mostrada na curva superior da Figura 3. Aplicando a matemática exposta na introdução deste artigo, usando-se a matriz de Toeplitz, obtém-se a curva mostrada na parte inferior da Figura 2, que reproduz exatamente a curva da entrada do sistema exposto inicialmente na Figura 2.

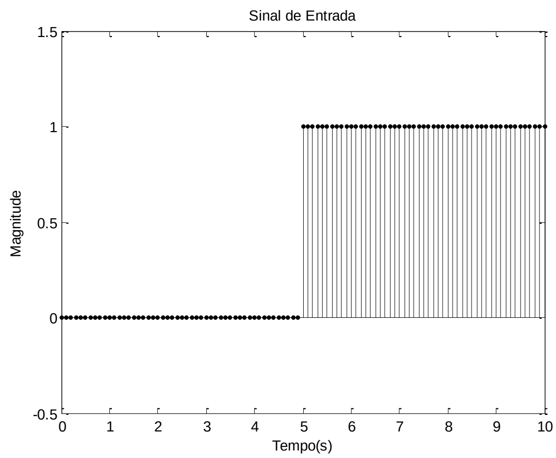

Figura 2. Entrada para o sistema em análise. Um degrau unitário.

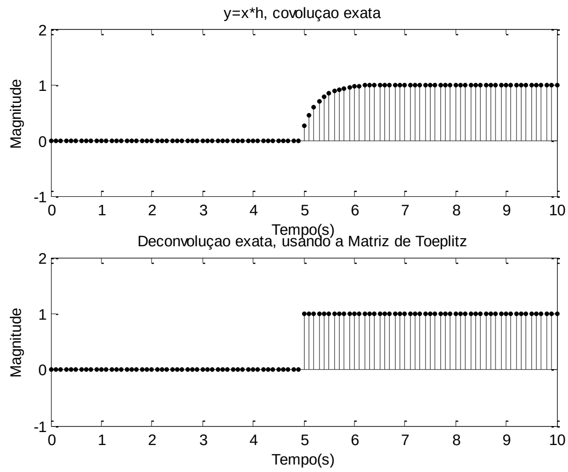

Figura 3. Convolução (curva superior) e deconvolução (curva inferior) para o sistema em análise. A convolução (**y[n]=h[n]*x[n]**) para o sistema em discussão é mostrada na curva superior, e a deconvolução é mostrada na parte inferior da curva. Notar que se não há ruído e a deconvolução é exata.

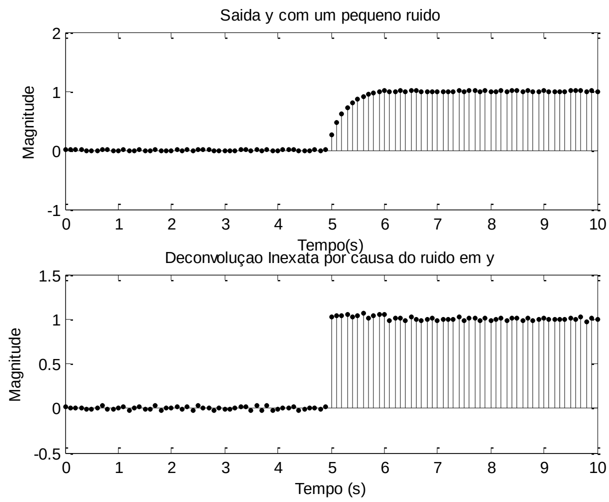

Figura 4. Saída do sistema com um pequeno ruído (curva de cima) e deconvolução inexata (curva de baixo) devido ao ruído. A saída do sistema, ilustrada na curva superior, possui agora um pequeno ruído superposto. Notar o efeito deste pequeno ruído na deconvolução ilustrada no gráfico inferior desta figura.

III. Conclusão

Neste trabalho a principal intenção foi a de trabalhar o conceito de deconvolução a partir de uma introdução na operação matemática conhecida como convolução. A partir de uma resposta ao impulso clássica, uma exponencial decrescente, obteve-se uma resposta na saída de um sistema hipotético LTI, para uma entrada degrau. Logo após, com essa resposta, usamos uma inversão de matriz, a inversão da matriz de Toeplitz, e obtemos uma entrada para esse sistema, que obviamente é a entrada degrau unitário. Em seguida, desenvolvemos o mesmo problema com um ruído acrescido ao sinal de entrada e logo após, com essa saída, obtemos novamente o sinal de entrada, que agora é um degrau unitário com um ruído acrescido. Além de pontuarmos a relevância da operação de convolução e de seu problema inverso, a deconvolução, também verifica-se neste trabalho que ruídos distorcem um sinal deconvoluído. O resultado para um ruído em y[n] (ruído gaussiano, média zero, desvio padrão zero e valores variando entre 0 e 0.1 de amplitude) é mostrado na Figura 4. Percebe-se que o sinal deconvoluído no tempo está distorcido. Tais distorções podem ser tratadas usando-se filtros digitais.

REFERÊNCIAS

[1] GOODFELLOW I;, BENGIO Y and COURVILLE A. Deep Learning. The Mit Press 2016.

[2] MELO, M. D. B, GOBIRA, S. R., SANHUEZA, S. M. R., SIMÕES, E. e ROCHA, A. F. da. Convolução como um apelo da natureza. International Journal of Development Research. Volume:13, July, 2023.

[3] OPPENHEIM, A. V., Schafer, R. W., "Discrete-Time Signal Processing", Pretice-Hall International, Inc, 1989.

[4] ROCHA, A. F. DA, "The Dynamic Behavior of Thermistor Probes", Dissertation for degree of Doctor of Philosophy, University of Texas, Austin, May 1997.

[5] SMITH, S. W., "The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing", California Technical Publishing, San Diego, California, USA, 1999.

ISSN: 2675-3588