ACADEMIC JOURNAL ON COMPUTING, ENGINEERING AND APPLIED MATHEMATICS, VOL. 04, NO. 02, OCTOBER 2023

Uma Breve Investigação Sobre Grafos B_1-EPG$_t$

A Brief Investigation on B_1-EPG$_t$ Graphs

Jackson Pereira dos Santos[1] e Tanilson Dias dos Santos[1]

[1] *Universidade Federal do Tocantins, Ciência da Computação, Tocantins, Palmas*

Data de recebimento do manuscrito: 08/08/2023
Data de aceitação do manuscrito: 13/09/2023
Data de publicação: 16/10/2023

Resumo— Os grafos EPG correspondem exatamente à classe de grafos de aresta-interseção de caminhos sobre uma grade. A maioria dos resultados na literatura envolvendo grafos EPG consideram problemas onde o hospedeiro da representação é uma grade retangular simples que possui somente duas direções (horizontal e vertical). Neste trabalho de conclusão de curso iremos explorar uma nova classe dos grafos EPG, pouco estudada na literatura, os grafos B_1-EPG$_t$. Definida como a classe dos grafos de aresta-interseção cujos caminhos possuem no máximo uma dobra e o hospedeiro da representação é uma grade triangular com 3 direções(horizontal, vertical e uma diagonal). Esta pesquisa contém resultados iniciais inéditos sobre a exploração da classe B_1-EPG$_t$ e apresenta pontos interessantes para continuação da investigação.

Palavras-chave— Grafos de interseção, B_1-EPG$_t$, Grades triangulares.

Abstract— *EPG graphs correspond exactly to the class of edge-intersection graphs of paths on a grid. Most results in the literature involving EPG graphs consider problems where the host of the representation is a simple rectangular grid with only two directions (horizontal and vertical). In this undergraduate thesis, we will explore a new class of EPG graphs, which has been relatively less studied in the literature, the B_1-EPG$_t$ graphs. This class is defined as the class of edge-intersection graphs whose paths have at most one bend, and the host of the representation is a triangular grid with three directions (horizontal, vertical, and one diagonal). This research contains novel initial results on the exploration of the B_1-EPG$_t$ class and presents interesting points for further investigation.*

Keywords—*Intersection graphs, B_1-EPG$_t$, Triangular grids*

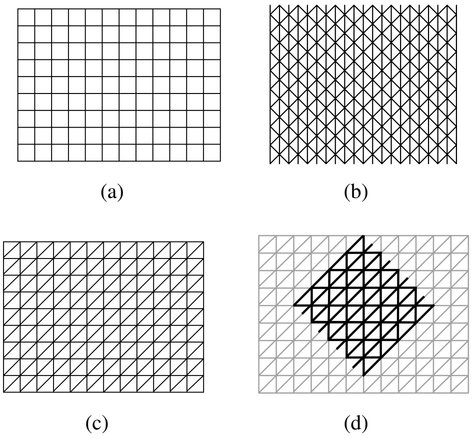
I. Introdução

Uma classe particular de grafos de interseção é a classe dos grafos EPG (Edge-intersection Graph of Paths on a Grid), definida por Golumbic et al em 2009 [1]. A classe de grafos EPG corresponde exatamente à classe de grafos que possuem um modelo de interseção sobre uma grade retangular, onde cada vértice é representado por um caminho na grade. Além disso, dois vértices são adjacentes, i.e. possuem uma aresta entre si, se e somente se, os caminhos correspondentes compartilham no mínimo uma aresta da representação.

A maioria dos resultados na literatura envolvendo grafos EPG consideram problemas em uma grade retangular simples, e.g. [2], [3],[4],[5],[6], [7] e [8]. Grades retangulares simples possuem somente duas direções (horizontal e vertical), veja Figura 1(a). Além desse modelo de grade, existem na literatura trabalhos que fazem uso da grade triangular *lattice*, e.g. [9] e [10], com 3 direções (vertical e com duas diagonais), veja Figura 1(b). No contexto deste projeto estudaremos as representações de grafos de interseção de arestas sobre uma grade triangular com 3 direções (horizontal, vertical e uma diagonal), denotadas como B_k-EPG$_t$, veja Figura 1(c). Note que a grade representada na 1(b) corresponde exatamente à grade da 1(c) rotacionada adequadamente, isto é são ambas grades equivalentes, veja Figura 1(d).

Como os trabalhos envolvendo grafos EPG em geral, se limitam a representações sobre uma grade retangular tradicional, esperamos obter novos resultados com essa nova abordagem de representação de grafos introduzida por [11]. Neste contexto, o presente trabalho lança os seguintes questionamentos: A adição de uma nova direção na grade retangular, facilita a representação EPG de algum grafo? As classes B_k-EPG e B_k-EPG$_t$ coincidem, são distintas, estão contidas propriamente uma na outra ou são incomparáveis? Em tempo, também é um interessante problema de investigação saber se: dado um grafo G que é B_k-EPG existe uma representação B_{k-i}-EPG$_t$ para esse grafo, para algum $i \leq k$, onde i é inteiro e positivo?

Dados de contato: Tanilson Dias dos Santos, tanilson.dias@uft.edu.br



(a) (b) (c) (d)

Figura 1: Representação de (a) grade retangular, (b) grade triangular *lattice*, (c) grade triangular tradicional e (d) grade *lattice* rotacionada

II. DEFINIÇÕES INICIAIS

Uma grade retangular é um espaço euclidiano de coordenadas ortogonais inteiras. Ela exerce a função de hospedeiro para as representações. A grade é hospedeira da representação porque suporta/hospeda os elementos (caminhos) que vamos utilizar, de forma similar ao que ocorre em outros modelos de representação, e.g. com os grafos arco-circulares, que utilizam respectivamente um círculo como base/hospedeiro para as representações, [12], [13],[14]. Na grade, hospedeira da representação, os pares de coordenadas inteiras correspondem a um ponto ou vértice da grade. A título de exemplo de grade, observe as grades ilustradas na Figura 1.

A sigla EPG é utilizada para denotar a classe de grafos de aresta-interseção de caminhos sobre uma grade. Uma representação EPG de um grafo G é um modelo de aresta-intersecção de caminhos para G, denotada por $\langle \mathscr{P}, \mathscr{G} \rangle$ onde $\mathscr{P}$ é o conjunto de caminhos e $\mathscr{G}$ é a grade da representação. Dizemos que um grafo é um grafo EPG quando ele possui uma representação EPG. É comum também falarmos que $\langle \mathscr{P}, \mathscr{G} \rangle$ é uma representação B_k-EPG quando existe uma representação EPG para o grafo G onde todo caminho nesta representação pode ser representado com no máximo k-dobras, i.e. k mudanças de direção. Além disso, existe uma função bijetora entre os vértices do grafo G e os caminhos da representação. Uma vez que um grafo EPG é um grafo de interseção, a função bijetora correspondente pode ser descrita da seguinte forma:

- Cada vértice $v_i \in V(G)$ corresponde a exatamente um caminho $P_i \in \mathscr{P}$, onde $\mathscr{P}$ consiste do conjunto de caminhos da representação EPG;
- Dois vértices $(v_i, v_j) \in E(G)$ se e somente se os caminhos correspondentes $P_{v_i}, P_{v_j} \in \mathscr{P}$ possuem interseção em pelo menos uma aresta da grade, i.e. $E(P_{v_i}) \cap E(P_{v_j}) \neq \emptyset$; e
- Além disso, se a representação é B_k-EPG, então todo caminho $P_i \in \mathscr{P}$ possui no máximo k-dobras.

A seguir, definiremos a classe que é o principal foco de estudos nesta pesquisa, a classe de grafos EPG$_t$, introduzida por [11].

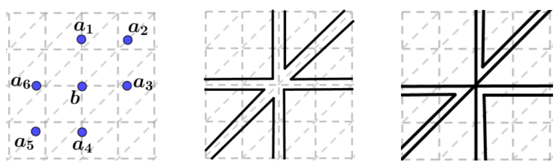
A classe de grafos EPG$_t$ corresponde exatamente à classe de grafos de aresta-interseção de caminhos sobre uma grade triangular. Essa classe está relacionada com a classe EPG, uma vez que a única diferença entre essas duas classes é o hospedeiro. Uma representação EPG$_t$ de um grafo G é um modelo de aresta-intersecção de caminhos para G, denotada por $\langle \mathscr{P}, \mathscr{G}_t \rangle$ onde $\mathscr{P}$ é o conjunto de caminhos e $\mathscr{G}_t$ é a grade triangular. Além disso, denotamos por B_k-EPG$_t$ a representação $\langle \mathscr{P}, \mathscr{G}_t \rangle$ onde todo caminho possui no máximo k-dobras, i.e. k mudanças de direção. Analogamente ao definido para grafos EPG, um grafo EPG$_t$ também é um grafo de interseção com função bijetora descrita da mesma forma. Além disso, se a representação é B_k-EPG$_t$, então todo caminho $P_i \in \mathscr{P}$ possui no máximo k-dobras.

Nesta pesquisa utilizamos a grade triangular como hospedeiro para as representações EPG$_t$. Na grade triangular, análogo ao que ocorre na grade retangular, os pares de coordenadas inteiras correspondem a um ponto ou vértice da grade. A Figura 2 ilustra um exemplo de representação B_1-EPG$_t$ para o ciclo C_6 na grade triangular.

Definição 1. *Uma* generic true pie *é um n-estrela tal que cada 'fatia' $(a_i,b) \cup (a_{i+1},b)$ para $i = 1, \ldots, n$ está contido em um membro diferente de $\mathscr{P}$, onde a adição é assumida como o módulo n. Em uma* true pie*, cada um dos n caminhos dobram no mesmo ponto além de respeitar a adjacência entre os caminhos do ciclo. Conforme a Figura 2.*

Definição 2. *Uma* generic false pie *é um n-estrela tal que cada 'fatia' $(a_1,b) \cup (a_4,b), (a_1,b) \cup (a_2,b), (a_2,b) \cup (a_5,b), (a_3,b) \cup (a_6,b), (a_3,b) \cup (a_4,b), (a_4,b) \cup (a_6,b)$, está contido em um membro diferente de $\mathscr{P}$, conforme a Figura 2. Em uma* false pie*, pelo menos dois dos caminhos dobram em b.*

Definição 3. *Dado um ponto c qualquer de uma grade triangular. Sejam r_1, r_2 e r_3, respectivamente, as retas que cruzam c nas direções vertical, horizontal, diagonal. Então essas retas dividem o plano em 6 porções P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6.*



(a) 6-star (b) *generic true pie* (c) *generic false pie*

Figura 2: Representação B_1-EPG$_t$ do C_6

A seguir, apresentamos uma seção com os resultados iniciais obtidos em nossa pesquisa.

III. RESULTADOS INICIAIS

O início da pesquisa nos traz alguns resultados interessantes que apresentamos a seguir. Primeiro, vamos provar que existe uma relação de continência própria entre as classes B_1-EPG e B_1-EPG$_t$, é o que nos mostra o Lema 4.

Lema 4. *B_1-EPG $\subset$ B_1-EPG$_t$.*

 ISSN: 2675-3588

Demonstração. *Observe, em primeiro lugar, que o hospedeiro da representação B_1-EPG$_t$ nada mais é do que uma grade B_1-EPG com a adição de uma nova direção (diagonal). Dessa forma, essa observação é suficiente para provar que toda representação B_1-EPG é também uma representação B_1-EPG$_t$. Para provarmos que a continência é própria, é suficiente apresentar 1 grafo que possua representação B_1-EPG$_t$ porém não possua representação B_1-EPG. A Figura 3 ilustra a representação B_1-EPG$_t$ dos grafos $K_{2,5}$ e $K_{2,6}$ que não são B_1-EPG, [1] e [2], entretanto são B_1-EPG$_t$.*

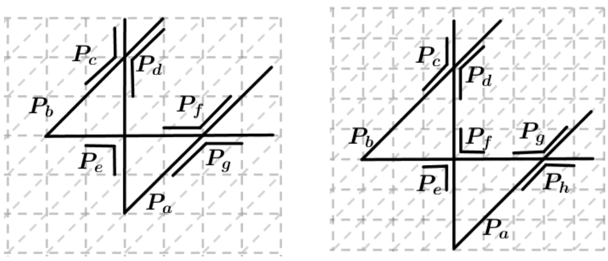


Figura 3: Exemplo de representação B_1-EPG$_t$ para o grafo $K_{2,5}$ e $K_{2,6}$

É fato conhecido que em representações B_1-EPG, é possível representar, no máximo, os ciclos de tamanho 4 por *true/false pie*, enquanto os ciclos C_n para $n \geq 5$ podem ser representados por *frames* ou outras estruturas distintas, [1]. A seguir, o Lema 5 nos mostra que o maior ciclo que conseguimos representar por *generic true pie* ou por *generic false pie* é o de tamanho 6 em B_1-EPG$_t$.

Lema 5. *Em qualquer representação B_1-EPG$_t$, o grafo C_6 é maior ciclo induzido que pode ser representado por* generic true pie *ou por* generic false pie.

Demonstração. *Por contradição, considere que é possível obter representações C_n para $n > 6$ por* generic true/false pie *em B_1-EPG$_t$. Distinguindo em casos, teremos:*

- *Caso 1. As representações de C_n para $n > 6$ são construídas por* generic true pie. *Veja que em uma* generic true pie *cada caminho P_i, onde $1 \leq i \leq n$, ou seja cada 'fatia' está contida em uma das 6 diferentes porções existentes, sempre respeitando a adjacência entre os caminhos do ciclo, definições 1 e 3. Perceba que pelo princípio da casa dos pombos teremos então 6 porções e 7 ou mais caminhos para alocar nestas porções, portanto necessitaremos alocar um ou mais caminhos na mesma porção, contrariando assim a definição de* generic true pie.
- *Caso 2. As representações de C_n para $n > 6$ são construídas por* generic false pie. *Sabemos que cada caminho P_i, onde $1 \leq i \leq n$, pode ser uma 'fatia' e pode estar contida em no máximo uma das 3 porções possíveis. Analogamente, até 3 desses caminhos cruzam o ponto central c. Note que, quando ampliamos para casos onde temos um $n > 6$, apesar de ser possível alocar esses novos caminhos na representação, estes não irão respeitar a adjacência existente entre os vértices do ciclo.*

Considerando os Casos 1 e 2, podemos concluir que é um absurdo supor que é possível representar um C_n com $n > 6$ em B_1-EPG$_t$ por generic true/false pie. *Com isso, concluímos que, o grafo C_6 é, de fato, o maior ciclo induzido que pode ser representado por* generic true/false pie *em B_1-EPG$_t$.*

Resultados similares aos encontrados nesta pesquisa podem ser encontrados em [11].

IV. Considerações Finais

Esta pesquisa corresponde a um trabalho de investigação e exploração de uma classe de grafos pouco estudada na literatura. Os resultados preliminares são animadores e lançam luz sobre algumas questões ainda desconhecidas sobre a classe de grafos EPG$_t$. Na literatura existem poucos trabalhos que estudam a representação de grafos EPG sobre grades triangulares, podemos citar [11].

Há pontos positivos e negativos em se estudar uma classe de grafos tão pouco explorada. Como maior ponto positivo, vem o fato de a classe ser necessariamente pouco explorada, o que dá uma grande margem para levantamento de resultados inéditos. Talvez o pior contraponto seja o fato da escassez de material de pesquisa e consulta correlato.

Como trabalhos futuros desejamos saber se é possível delimitar uma família de subgrafos induzidos proibidos para B_1-EPG$_t$. Seria também de interesse, investigar o parâmetro *bend number*, construir um mapeamento de relacionamento entre classes de grafos na hierarquia B_k-EPG$_t$, e investigar se existe um comportamento monótono na hierarquia B_k-EPG$_t$.

Referências

[1] M. C. Golumbic, M. Lipshteyn, and M. Stern, "Edge intersection graphs of single bend paths on a grid," *Networks: An International Journal*, vol. 54, no. 3, pp. 130–138, 2009.

[2] A. Asinowski and A. Suk, "Edge intersection graphs of systems of paths on a grid with a bounded number of bends," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 157, no. 14, pp. 3174–3180, 2009.

[3] L. F. dos Santos Marinho, K. A. Silva, and T. D. dos Santos, "B_2-EPG Split," *Academic Journal on Computing, Engineering and Applied Mathematics*, vol. 4, no. 1, pp. 1–7, 2023.

[4] C. F. Bornstein, U. S. Souza, T. D. Santos, M. C. Golumbic, and J. L. Szwarcfiter, "The complexity of Helly-B_1-EPG graph recognition," *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, vol. 22, 2020.

[5] C. F. Bornstein, G. Morgenstern, T. D. Santos, U. S. Souza, and J. L. Szwarcfiter, "Helly and strong Helly numbers of B_k-EPG and B_k-VPG graphs," *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, vol. 43, no. 4, May 2021.

[6] T. D. dos Santos, "On the Helly property of some intersection graphs," Ph.D. dissertation, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2020.

[7] D. Heldt, K. Knauer, and T. Ueckerdt, "On the bend-number of planar and outerplanar graphs," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 179, pp. 109–119, 2014.

[8] J. Cardinal, H. Ito, M. Korman, and S. Langerman, "Helly numbers of polyominoes," *Graphs and Combinatorics*, vol. 29, no. 5, pp. 1221–1234, 2013.

[9] Y. Zhang, Q. Shi, A. El-Makadema, L. Danoon, and A. K. Brown, "Triangular grid interconnected crossed rings antenna for large-scale ultra-wideband dual-polarised arrays," *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, vol. 14, no. 15, pp. 2115–2122, 2020.

[10] N. A. Fleck, V. S. Deshpande, and M. F. Ashby, "Micro-architectured materials: past, present and future," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 466, no. 2121, pp. 2495–2516, 2010.

[11] V. T. de Luca, M. P. Mazzoleni, F. S. Oliveira, T. D. Santos, and J. L. Szwarcfiter, "Edge intersection graphs of paths on a triangular grid," *arXiv preprint arXiv:2203.04250*, 2022.

[12] E. J. F. Primrose, "Combinatorial geometry in the plane. by h. hadwiger and h. debrunner. translated by v klee. pp. vii, 113. 30s. 1964. (holt, rinehart and winston, london)," *Mathematical gazette*, vol. 49, no. 367, pp. 112–112, 1965.

[13] V. Klee, "What are the intersection graphs of arcs in a circle?" *The American Mathematical Monthly*, vol. 76, no. 7, pp. 810–813, 1969.

[14] L. Alcón, F. Bonomo, G. Durán, M. Gutierrez, M. P. Mazzoleni, B. Ries, and M. Valencia-Pabon, "On the bend-number of circular-arc graphs as edge intersection graphs of paths on a grid," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 234, pp. 12–21, 2016.

 ISSN: 2675-3588