

Grafos B₂-EPG Split

Split B₂-EPG Graphs

Luis Fernando dos Santos Marinho¹, Kedson Alves Silva¹ e Tanilson Dias dos Santos¹

¹ Universidade Federal do Tocantins, Curso de Ciência da Computação, Palmas, Tocantins, Brasil

Data de recebimento do manuscrito: 05/11/2022

Data de aceitação do manuscrito: 09/12/2022

Data de publicação: 10/12/2022

Resumo— Nesta pesquisa estudamos os grafos EPG, em particular, estamos interessados em investigar a interseção entre a classe de grafos split com a classe de grafos B₂-EPG. Não há mapeamento na literatura para a pesquisa de grafos B₂-EPG Split. Neste trabalho manipulamos também grafos bipartidos e apresentamos uma representação para alguns grafos bipartidos em B₂-EPG. Construímos um algoritmo que cria uma representação B₂-EPG para qualquer grafo split cujo grau dos vértices do conjunto independente é menor ou igual a 2. Além disso, também propomos um algoritmo que constrói uma representação em uma grade $Q_{w \times (2y+1)}$ para qualquer grafo split. Resultados gerais sobre representações EPG também suplementam esta pesquisa.

Palavras-chave—B₂-EPG, Teoria dos Grafos, Grafos de Interseção, Grafos Split, Representação EPG

Abstract— On this research we study EPG graphs, in particular, we are interested on investigate the intersection between split and B₂-EPG graph classes. There is no mapping in the literature for research of Split B₂-EPG graphs. In this work we also manipulate bipartite graphs and we present representation for some bipartite graphs in B₂-EPG. We build an algorithm that create a Split B₂-EPG representation for any split graph whose degree of vertices on independent set is less than or equal to 2. Futhermore, also we present an algorithm that builds a representation on a grid $Q_{w \times (2y+1)}$ for any split graph. General results on EPG representations also supplement this research.

Keywords—B₂-EPG, Graphs Theory, Intersection Graphs, Split Graphs, EPG Representation

I. INTRODUÇÃO

A palavra EPG representa um acrônimo para Edge-Intersection Graphs of Paths on a Grid, que em sua tradução literal significa grafos de aresta-interseção de caminhos sobre uma grade. A classe dos grafos EPG foi definida por [1], e consiste de grafos cujos vértices podem ser representados por caminhos sobre uma grade retangular, de modo que, dois vértices de um grafo são adjacentes se, e somente se, compartilham pelos menos uma aresta sobre a grade.

Além disso, [1] definiu uma hierarquia que classifica os grafos EPG de acordo com a quantidade máxima de dobras que cada caminho da representação possui. Um grafo G é dito ser B _{k} -EPG quando existe uma representação EPG para G em que cada caminho da representação possui no máximo k dobras, i.e. k mudanças de direção. O *bend number* de um grafo G é o menor número inteiro k para o qual G possui uma representação B _{k} -EPG. De forma análoga o *bend number* de uma classe de grafos é o menor número inteiro k para o qual os grafos desta classe possuem uma representação B _{k} -EPG.

Uma motivação prática para o estudo de grafos EPG é o problema de otimização de *layout* de circuitos digitais [1], problema este trabalhado em outros tipos de grafos de interseção por [2], [3] e [4]. Um problema clássico relacionado ao desenho industrial de circuitos é o de minimização da área de impressão na placa de circuito impresso, o que afeta diretamente o custo de produção de um microchip, por exemplo. Outro problema que surge, naturalmente, neste contexto, é o de impor restrição ao número de dobras que cada caminho (trilhas) do circuito pode possuir.

Observe que, no problema de desenho de circuito industrial, em particular, reduzir a área do circuito é equivalente a reduzir a área da representação EPG associada, da mesma forma impor restrições à quantidade de vezes que uma trilha pode dobrar é equivalente a reconhecer se o grafo associado possui uma representação B _{k} -EPG. Dessa forma, é intuitivo perceber que há alguma relação entre o problema de *design* de circuitos digitais e o problema de modelagem de grafos EPG.

O campo de pesquisa relacionado a grafos EPG é bastante movimentado apesar de novo [1], [5], [6], [7], [8]. Um resultado já conhecido é que a classe de grafos B₀-EPG é equivalente à classe de grafos de intervalo. Todavia, os principais trabalhos da área geralmente são relacionados aos grafos B₁-EPG, [9], [10], [11], [12], [13]. Se por um lado é fácil encon-

Dados de contato: Luis Fernando dos Santos Marinho, fernando.marinho@uft.edu.br

TABELA 1: CLASSES DE GRAFOS E O SEU *bend number*

Classe do grafo	$b(G)$	Referência
Grafos de Intervalo	0	[1]
Florestas e Ciclos	1	[15]
Outerplanar	2	[6]
Planar	$\in [3, 4]$	[6]
Bipartido Planar	2	[16]
Grafo de Linha	2	[16]
Degenerescência(G) $\leq k$	$2k - 1$	[6]
Treewidth(G) $\leq k$	$2k - 2$	[6]
Grau $\leq \Delta$	$\in [\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil, \Delta]$	[6]
Arco-circular	3	[17]
Arco-circular Normal	2	[17]
Grafos Halin	2	[18]
Grafos Split com $ K \geq 3$	1	[9]
Grafos Split com $ S \geq 3$	1	[9]
k -sun	2	[19]

trar pesquisas sobre grafos B_1 -EPG, por outro lado a classe B_2 -EPG já não é tão explorada assim, tendo sido estudada em poucos trabalhos, [14], [8]. A título de exemplo a Tabela 1 ilustra o *bend number* de algumas classes de grafos conhecidas, denotado por $b(G)$.

Os grafos EPG split são citados nos artigos de [9, 10, 11, 13], que estudam, em particular, a classe B_1 -EPG Split. Não foram encontrados na literatura resultados para grafos B_2 -EPG Split.

Neste artigo, estudamos os grafos B_2 -EPG Split e apresentamos alguns resultados para subclasses de B_2 -EPG Split e sobre a área de grade necessária para representar qualquer grafo split. Além disso também apresentamos resultados gerais para grafos B_2 -EPG e para grafos threshold.

A seção a seguir apresenta as definições básicas necessárias ao entendimento deste trabalho.

II. PRELIMINARES

Um grafo é definido como par ordenado $G = (V, E)$, onde $V(G)$ é um conjunto finito não-vazio de *vértices* e $E(G)$ é um conjunto de pares não-ordenados (v_i, v_j) , chamados de *arestas*, sendo $v_i, v_j \in V(G)$.

Dizemos que dois vértices são *adjacentes* se existe uma aresta entre eles. De forma similar, uma aresta é *incidente* aos vértices v_i e v_j , se ela conecta os dois vértices. Podemos então definir o *grau de um vértice* v_i , denotado por $d(v_i)$, como o número de arestas incidentes em v_i . A *cardinalidade* de um conjunto de vértices e arestas é denotada por $|V(G)| = n$ e $|E(G)| = m$. Definimos a *vizinhança* de um vértice $v_i \in V(G)$ como o conjunto de vértices adjacentes a v_i , que denotamos por $N(v_i) = \{u \in V(G) | (v_i, u) \in E(G)\}$

Chamamos de *grade* o espaço Euclidiano formado por coordenadas inteiras ortogonais, no qual cada par de coordenada de inteiros representa um ponto ou vértice da grade, e dois pontos da grade são adjacentes se estão à uma unidade de distância.

A sigla *EPG* denota a classe de grafos de aresta-interseção de caminhos sobre uma grade. Uma *representação* de um grafo EPG é um modelo de aresta-interseção de caminhos sobre uma grade. Denotaremos por \mathcal{P} a *coleção de caminhos* de uma representação EPG. Em uma representação EPG de

um grafo G cada vértice $v_i \in V(G)$ corresponde a um caminho $P_{v_i} \in \mathcal{P}$ sobre a grade; e dois vértices v_i, v_j são adjacentes em G se e somente se os caminhos correspondentes P_{v_i} e P_{v_j} compartilham pelo menos uma aresta da representação.

O *caminho sobre a grade* ou ainda *caminho na representação*, de tamanho m , é definido como uma sequência finita de arestas (e não de vértices) consecutivas $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_2, v_3), e_3 = (v_3, v_4), \dots, e_i = (v_i, v_{i+1}), \dots, e_m = (v_m, v_{m+1})$, tal que, $e_i \neq e_j$ para todo $i \neq j$. Uma *dobra no caminho* é denotada como um par de arestas consecutivas, que possuem direções diferentes na grade. Se o caminho não possui dobras ele é chamado de *segmento*.

Dizemos que um grafo G possui uma representação B_k -EPG quando existe um modelo de aresta-interseção de caminhos que é equivalente ao grafo G , e cada caminho desse modelo possui no máximo k -dobras, i.e. k mudanças de direção. A Figura 1(a) ilustra o grafo G e na Figura 1(b) exibimos uma de suas representações B_0 -EPG, enquanto na Figura 1(c) exibimos uma de suas representações B_1 -EPG.

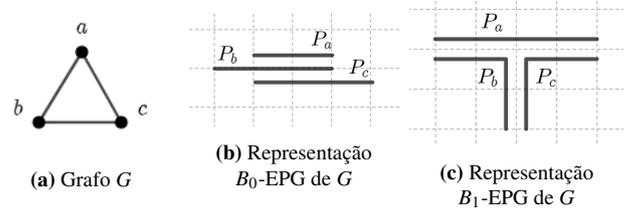


Figura 1: Grafos G e duas representações EPG

O parâmetro *bend number* ou *número de dobras* de um grafo G , denotado por $b(G)$, corresponde ao menor inteiro k para o qual G possui uma representação B_k -EPG. Também faz sentido falar no *bend number* de uma classe de grafos C , $b(C)$, que é o menor k para o qual todos os grafos da classe C possuam representação B_k -EPG.

Uma *shape* é uma forma induzida por um caminho sobre uma grade, e.g. o conjunto de caminhos *L-shape* pode ser representado por $\{\lfloor, \lrcorner, \ulcorner, \rceil\}$, de forma similar podemos representar *C-shapes*. As Figura 2(a) e na Figura 2(b) ilustram exemplos de *L-shape* e *C-shape*.

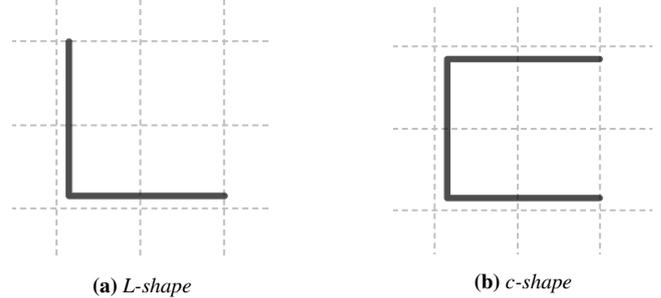


Figura 2: Representações EPG de *shapes*

III. METODOLOGIA E FERRAMENTAS

A pesquisa desenvolvida neste trabalho é do tipo investigativa e exploratória. Uma pesquisa investigativa tem como objetivo investigar ou conhecer algo.

No que diz respeito a uma pesquisa exploratória, tem-se como objetivo conhecer o tema a ser estudado, considerando que este ainda é pouco conhecido, pouco explorado. Diante disso, buscamos descobrir novos resultados sobre uma classe de grafos com potencial de resultados inéditos.

A classe dos EPG Split é ainda pouco estudada na literatura, possuindo resultados conhecidos somente para a classe B_1 -EPG, e.g [9], [10], [13]. Nesta pesquisa buscamos estudar a classe B_2 -EPG Split com o intuito de caracterizar grafos que pertencem a esta classe.

IV. RESULTADOS

A seguir apresentamos alguns resultados obtidos no estudo da classe EPG.

a. Grafos Bipartidos Completos

Define-se *conjunto independente* como um conjunto de vértices S para o qual cada par de vértices distintos deste conjunto não existe adjacência entre eles.

Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é um *grafo bipartido* quando seu conjunto de vértices puder ser dividido em 2 conjuntos independentes distintos, i.e. $V(G) = S_1 + S_2$, onde cada aresta liga um vértice em S_1 a outro vértice em S_2 . Já o *grafo bipartido completo* é o grafo $G = (S_1 + S_2, E)$ no qual para cada $v_i \in S_1$ e $v_j \in S_2$ existe $(v_i, v_j) \in E(G)$, i.e. todo vértice de S_1 possui aresta para todo vértice em S_2 .

É resultado conhecido na literatura que o grafo $K_{3,3} \notin B_1$ -EPG, [1]. De posse desta informação, nos perguntamos: $K_{3,3} \in B_2$ -EPG? Conseguimos mostrar que os grafos $K_{3,i} \in B_2$ -EPG, para i inteiro, onde $3 \leq i \leq 10$, ao apresentar uma representação B_2 -EPG destes grafos. Já era resultado conhecido da literatura que $K_{3,i} \in B_2$ -EPG para $3 \leq i \leq 10$, e que estão em B_3 -EPG para $11 \leq i \leq 39$, e B_4 -EPG para $i \geq 61$, sendo desconhecido o intervalo $40 < i \leq 60$.

No entanto, [20] apresenta somente um resultado matemático provando que $K_{3,i} \in B_2$ -EPG, para i inteiro, onde $3 \leq i \leq 10$, o artigo de [20] não apresenta explicitamente representações B_2 -EPG para estes grafos, com exceção do $K_{3,10}$, o único para o qual é apresentado uma representação B_2 -EPG. Então este trabalho já apresenta alguma contribuição suplementar aos resultados obtidos por [20].

Lema 1. $K_{3,10} \in B_2$ -EPG.

Demonstração. Por apresentação da representação B_2 -EPG de $K_{3,10}$, conforme Figura 3. \square

Assim, reintroduzimos uma representação do $K_{3,10} \in B_2$ -EPG, e para os grafos restantes, $K_{3,i} \in B_2$ -EPG, para i inteiro, onde $3 \leq i \leq 9$, a representação do $K_{3,10}$ é suficiente para provar sua pertinência a B_2 -EPG, já que os demais grafos são subgrafos induzidos de $K_{3,10}$.

b. Grafos Split

Antes de introduzirmos o que é um grafo split, é necessário tomarmos ciência de alguns conceitos de teoria dos grafos, os quais definiremos a seguir.

Um *grafo completo* é um grafo no qual cada par de vértices distintos é mutuamente adjacente entre si. Notaremos por K_n o grafo completo com n vértices. E uma *clique* é um sub-grafo $K \subseteq G$, onde K é um grafo completo. Intuitivamente, o complemento de um grafo completo resulta um conjunto independente.

E assim, um *grafo split* é um grafo G no qual o conjunto $V(G)$ pode ser particionado em duas partes: a primeira,

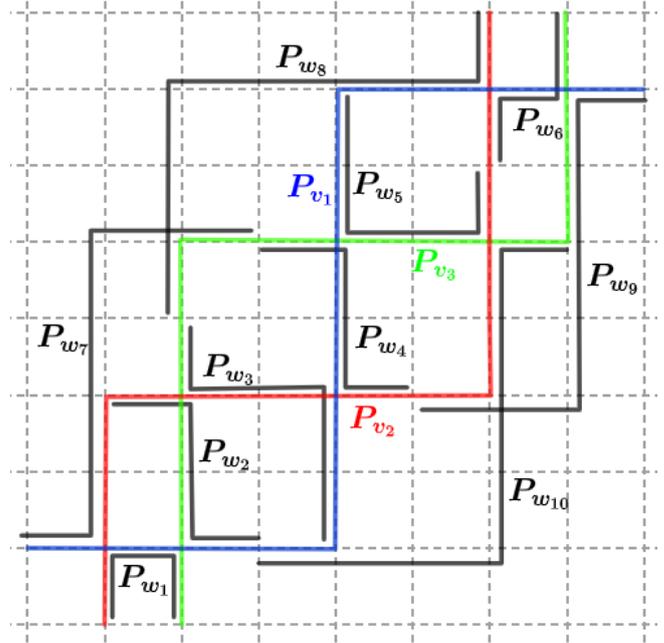


Figura 3: $K_{3,10}$ em sua representação B_2 -EPG

forma uma clique K ; e a segunda parte forma um conjunto independente S . Essa definição foi apresentada por [21].

Como já citado anteriormente, os trabalhos relacionados a grafos EPG split se resumem a classe B_1 -EPG, neste artigo investigaremos os grafos B_2 -EPG Split, caracterizando sub-conjuntos desta classe.

O primeiro resultado alcançado no estudo de grafos split é apresentado a seguir.

Lema 2. *Seja G um grafo split, com conjunto independente S , cujo $d(s_i) \leq 2$, então $G \in B_2$ -EPG.*

Demonstração. Seja $G = (S, K)$ um grafo split, onde S corresponde ao conjunto independente e K sua clique, tal que $|S| = y$ e $|K| = w$. Considere a linha l_0 e a coluna c_0 , respectivamente, como linha e coluna centrais da grade. Para realizar tal representação, as seguintes instruções devem ser seguidas:

1. Cada vértice $k_i \in K$ deve ser representado usando um elemento de L -shape, a Γ -shape, onde cada caminho P_{k_i} possui segmento vertical sobre a coluna c_0 , iniciando na linha l_0 e terminando na linha l_{k_i} . A aresta (l_0, l_1) sobre a coluna c_0 é aresta de interseção de todos os caminhos P_{k_i} correspondendo aos vértices da clique. O segmento horizontal do caminho P_{k_i} está sobre a linha l_i , da coluna c_0 até a coluna c_y .
2. Caso $d(s_i) = 1$, cada vértice do conjunto $s_i \in S$, deve ser representado usando um segmento horizontal sobre a linha l_i , da coluna $c_{s_{i-1}}$ até a coluna c_{s_i} .
3. Caso $d(s_i) = 2$, $N(s_i) = \{K_a, K_b\}$, então s_i será representado pelo caminho P_{s_i} da seguinte forma: representamos um segmento horizontal sobre a linha l_a , da coluna $c_{s_{i-1}}$ até a coluna c_{s_i} , o segmento vertical de P_{s_i} sobre a coluna c_{s_i} , da linha l_a até a linha l_b , e por fim, o último segmento horizontal do caminho P_{s_i} sobre a linha l_b , da coluna $c_{s_{i-1}}$ até a coluna c_{s_i} .

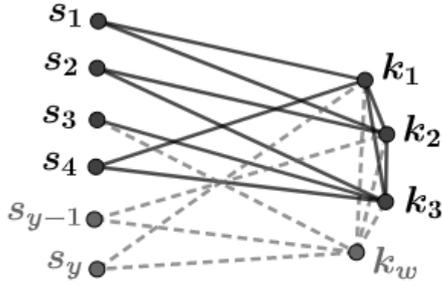


Figura 4: Grafo split com $d(s_i) \leq 2$.

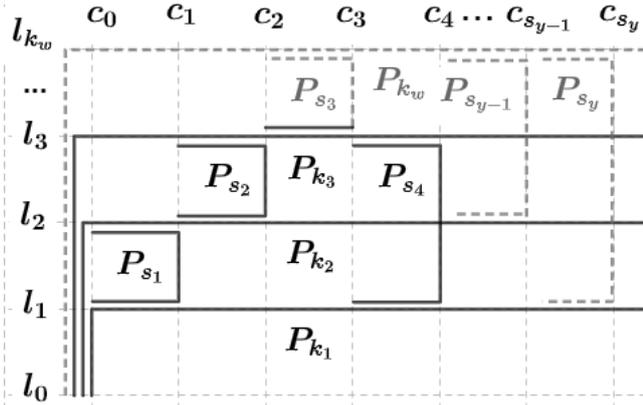


Figura 5: Representação B₂-EPG de grafo split com $d(s_i) \leq 2$

A título de exemplo, a Figura 4 ilustra um grafo split com $d(s_i) \leq 2$, enquanto na Figura 5 temos sua representação B₂-EPG.

□

Podemos codificar a demonstração do Lema 2 de uma forma alternativa através do pseudocódigo ilustrado no Algoritmo 1.

Como consequência do Lema 2 somos capazes de delimitar o espaço ocupado, na grade, pela representação, construída pelo Algoritmo 1. O resultado é exposto pelo corolário a seguir.

Corolário 3. *Seja G um grafo split, com conjunto independente S , cujo $d(s_i) \leq 2$, então G pode ser representado sobre uma grade retangular $Q_{w \times y}$.*

Demonstração. Esse resultado pode ser facilmente verificado pela representação construída no Lema 2, conforme ilustrado na Figura 5. Como pode ser observado, o número de colunas é delimitado pelo vértice s_y do conjunto independente S , enquanto o número de linhas é delimitado pelo vértice k_w do conjunto K , portando o tamanho desses conjuntos é igual ao tamanho da grade. □

De forma mais genérica, removendo a restrição de $d(s_i) \leq 2$, conseguimos um algoritmo que prova que é possível representar qualquer grafo EPG Split, sendo suficiente uma grade cuja dimensão é dada por uma combinação da cardinalidade dos conjuntos K e S . Logo, apresentamos o corolário a seguir.

Corolário 4. *Qualquer grafo split $G(K \cup S, E)$, onde $|K| = w$, $|S| = y$, pode ser representado em uma grade de área $O(w \times y)$.*

Algoritmo 1: GRAFO B₂-EPG SPLIT COM $d(s_i) \leq 2$

Entrada: Grafo $G = (K, S)$

Saída: Representação B₂-EPG do grafo

```

1 início
2    $y \leftarrow |S|$ ;
3   para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leq |K|$  faça
4     Desenha um segmento vertical na coluna  $c_0$ ,
       entre as linhas  $l_0$  e  $l_i$ ;
5     Desenha um segmento horizontal na linha  $l_i$ ,
       entre as colunas  $c_0$  e  $c_y$ ;
6   fim
7   para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leq |S|$  faça
8     se  $d(s_i) = 1$  então
9        $K_a \leftarrow N(s_i).first()$ ;
10      Desenha um segmento horizontal sobre a
        linha  $l_a$ , da coluna  $c_{i-1}$  até a coluna  $c_i$ ;
11     fim
12     se  $d(s_i) = 2$  então
13        $K_a \leftarrow N(s_i).first()$ ;
14        $K_b \leftarrow N(s_i).last()$ ;
15       Desenha um segmento horizontal sobre a
        linha  $l_a$ , da coluna  $c_{i-1}$  até a coluna  $c_i$ ;
16       Desenha um segmento vertical sobre a
        coluna  $c_i$ , da linha  $l_a$  até a linha  $l_b$ ;
17       Desenha um segmento horizontal sobre a
        linha  $l_b$ , da coluna  $c_{i-1}$  até a coluna  $c_i$ ;
18     fim
19   fim
20 fim
21 retorna Representação B2-EPG

```

Demonstração. Considere uma grade $Q_{w \times 2y+1}$, com linhas l_0, \dots, l_{w-1} , de baixo para cima, e colunas c_0, \dots, c_{2y} , da esquerda para direita.

Vamos representar os elementos da clique K pelos caminhos P_1, \dots, P_{w-1} . Onde cada caminho P_j forma na grade uma L-shape, exclusivamente o caminho P_1 será representada por uma \perp -shape, sobre a coluna c_0 , entre as linhas l_0 e l_1 , dobrando horizontalmente em l_0 , da coluna c_0 até c_{2y} . Os demais caminhos da clique serão representados por Γ -shape sobre a coluna c_0 , da linha l_0 até a linha l_{i-1} , dobrando horizontalmente sobre a linha l_{i-1} , da coluna c_0 até c_{2y} .

Os elementos do conjunto independente S , serão representados pelos caminhos P'_1, \dots, P'_y . Considerando que os vértices do conjunto independente podem ser adjacentes a qualquer vértice da clique, cada $s_i \in S$ será representado nesta demonstração com colunas vazias a sua esquerda e direita, isso garante que nenhum dos caminhos de P'_y sejam aresta-intersectantes ou vértice-intersectantes entre si.

Dado que os vértices da clique K , estejam indexados por j e ordenados de forma crescente em relação a j , tal que $j = 1, \dots, w$. Propomos o seguinte algoritmo para a representação do vértice s_i como o caminho P'_i :

1. Tomar como valor de j o primeiro índice de k , e para cada $k_j \in N(s_i)$, de forma crescente, representar o caminho P'_i ;

2. Adicione um segmento horizontal sobre a linha l_{j-1} , da coluna c_{2i-1} até a coluna c_{2i} . Se o vértice s_i ainda possui vizinhos sem representação, atribua a uma variável z o valor de j e a j o próximo índice de k e passe para o próximo passo, caso contrário, encerre;
3. Seja o vértice s_i adjacente ao vértice k_j , então o caminho P'_i possui um segmento vertical sobre a coluna c_{2i} , da linha l_{z-1} até a linha l_{j-1} , seguido de um segmento horizontal sobre a linha l_{j-1} , da coluna c_{2i-1} até a coluna c_{2i} . Se o vértice s_i ainda possui vizinhos sem representação, atribua a uma variável z o valor de j e a j o próximo índice de k e passe para o próximo passo, caso contrário, encerre;
4. Adicione ao caminho P'_i um segmento vertical sobre a coluna c_{2i-1} , da linha l_{z-1} até a linha l_{j-1} e retorne ao passo 2.

Logo, conseguimos representar todo vértice $s_i \in S$. Observe que esta representação de S ocupa uma quantidade de colunas igual a $2y + 1$.

Assim obtemos uma representação EPG para um grafo split hospedado em uma grade de dimensão $Q_{w \times 2y+1}$. A Figura 6 ilustra como se dá a representação genérica de um grafo split construída por este algoritmo. \square

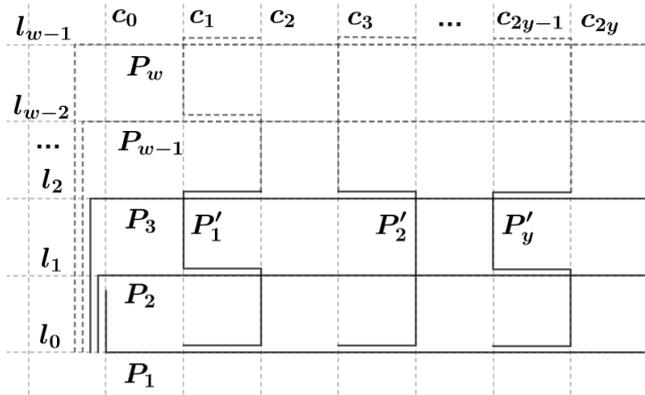


Figura 6: Grafo split representado em uma grade $Q_{w \times 2y+1}$

Em suplemento, para o Corolário 4, ilustramos o pseudocódigo do Algoritmo 2.

c. Grafos Threshold

Um grafo é dito ser um *grafo threshold* se ele pode ser construído, a partir de um grafo vazio, através de repetidas adições de um *vértice isolado* ($d(v_i) = 0$) ou um *vértice dominante* ($d(v_i) = n - 1$). Os grafos threshold correspondem a uma subclasse dos grafos split [22], e também correspondem a uma subclasse de grafos de intervalo [22]. Ao iniciar a investigação dessa subclasse dos grafos split, percebemos que há uma classificação imediata da classe pelo Lema 5.

Em resumo, a relação entre essas classes pode ser dada da seguinte forma: Grafos Threshold \subseteq Grafos de Intervalo \cap Grafos Split.

Lema 5. *Grafos threshold* $\in B_0$ -EPG.

Demonstração. Essa prova é dada por demonstração direta. Sejam os grafos threshold um subconjunto de grafos de intervalo, então grafos threshold $\in B_0$ -EPG [1]. Isso é verdade

Algoritmo 2: GRAFO SPLIT EM GRADE $Q_{w \times 2y+1}$

Entrada: Grafo $G = (K, S)$

Saída: Representação B_2 -EPG do grafo

```

1 início
2    $y \leftarrow |S|;$ 
3   para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leq |K|$  faça
4     se  $i = 1$  então
5       Desenha um segmento vertical na coluna
6          $c_0$ , entre as linhas  $l_0$  e  $l_1$ ;
7       Desenha um segmento horizontal na linha
8          $l_0$ , entre as colunas  $c_0$  e  $c_y$ ;
9     fim
10    senão
11      Desenha um segmento vertical na coluna
12         $c_0$ , entre as linhas  $l_0$  e  $l_{i-1}$ ;
13      Desenha um segmento horizontal na linha
14         $l_{i-1}$ , entre as colunas  $c_0$  e  $c_y$ ;
15    fim
16  para  $i \leftarrow 1$  até  $i \leq |S|$  faça
17     $j \leftarrow N(s_i).first();$ 
18     $viz \leftarrow N(s_i);$ 
19     $z \leftarrow null;$ 
20    enquanto  $j \neq \emptyset$  faça
21      Desenha um segmento horizontal sobre a
22        linha  $l_{j-1}$ , da coluna  $c_{2i-1}$  até a coluna
23         $c_{2i}$ ;
24       $z \leftarrow j;$ 
25       $viz \leftarrow viz - j;$ 
26       $j \leftarrow N(S_i).first();$ 
27      se  $j = \emptyset$  então
28        encerra;
29      fim
30      Desenha um segmento vertical sobre a
31        coluna  $c_{2i-1}$ , da linha  $l_{z-1}$  até a linha
32         $l_{j-1}$ ;
33      Desenha um segmento horizontal sobre a
34        linha  $l_{j-1}$ , da coluna  $c_{2i-1}$  até a coluna
35         $c_{2i}$ ;
36       $z \leftarrow j;$ 
37       $viz \leftarrow viz - j;$ 
38       $j \leftarrow N(S_i).first();$ 
39      se  $j = \emptyset$  então
40        encerra;
41      fim
42      Desenha um segmento vertical sobre a
43        coluna  $c_{2i-1}$ , da linha  $l_{z-1}$  até a linha
44         $l_{j-1}$ ;
45    fim
46  retorna Representação  $B_2$ -EPG

```

porque a propriedade de pertinência a uma classe é hereditária para subgrafos induzidos. \square

d. Demais resultados para a classe B₂-EPG

Um conjunto de caminhos independentes em vértice refere-se a um conjunto de caminhos onde para cada par de caminhos, P_{v_i} e P_{v_j} , a intersecção entre os vértices destes caminhos é vazia, i.e., $P_{v_i} \cap_v P_{v_j} = \emptyset$. Analogamente, um conjunto de caminhos independentes em aresta refere-se a um conjunto de caminhos onde para cada par de caminhos, P_{v_i} e P_{v_j} , a intersecção entre as arestas destes caminhos é vazia, i.e., $P_{v_i} \cap_e P_{v_j} = \emptyset$.

Tendo estes conceitos em mente, apresentamos o seguinte lema.

Lema 6. *Sejam L_1 e L_2 dois segmentos perpendiculares entre si, onde $|L_1 \cap_v L_2| = 1$, e seja o conjunto de caminhos independentes em aresta $\mathcal{P}^e = \{P_1, P_2, P_3\}$. Se cada $P_i \in \mathcal{P}^e$ é aresta-intersectante a L_1 e L_2 , então em qualquer representação EPG de $L_1 \cup L_2 \cup \mathcal{P}^e$, pelo menos 1 dos caminhos $P_i \in \mathcal{P}^e$ possui no mínimo 3 dobras.*

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que L_1 e L_2 estão posicionadas, respectivamente, na vertical e horizontal da grade, e $|L_1 \cap_v L_2| = 1$ no ponto (l_0, c_0) , enquanto $L_1 \cap_e L_2 = \emptyset$. Suponha que o caminho P_1 aresta-intersecta L_1 com um segmento vertical entre o primeiro e segundo quadrante, e para aresta-intersectar L_2 , o caminho P_1 deve dobrar no ponto onde $L_1 \cap_v L_2$, ou seja, no ponto (l_0, c_0) , sendo adicionado um segmento horizontal que aresta-intersecta L_2 , digamos, entre o primeiro e quarto quadrante. Já o caminho P_2 deve aresta-intersectar L_1 , logo isso pode ocorrer em alguma aresta entre o terceiro e quarto quadrante, ou em alguma aresta entre o primeiro e segundo quadrante. No caso de um segmento de P_2 colocado na aresta entre o primeiro e segundo quadrante, então P_2 necessita possuir no mínimo 3 dobras para aresta-intersectar L_2 . Assim, nos resta supor que o caminho P_2 aresta-intersecta L_1 com um segmento vertical entre o terceiro e quarto quadrante. O caminho P_2 deverá aresta-intersectar L_2 , necessariamente, dobrando para a esquerda (entre o segundo e terceiro quadrante), caso contrário $P_1 \cap_e P_2 \neq \emptyset$. E por último, devemos representar o caminho P_3 . Perceba que todas as arestas incidentes ao ponto (l_0, c_0) , nesse momento, estão cobertas por uma aresta do caminho P_1 ou do caminho P_2 . Logo, necessariamente para o caminho P_3 intersectar o segmento L_1 , temos que P_3 deve ser posicionado após a última aresta do caminho P_1 ou P_2 , sobre L_1 . Suponha, sem perda de generalidade, que P_3 possua um segmento entre o primeiro e segundo quadrante. Para que P_3 possa aresta-intersectar L_2 , ele deve evitar aresta-intersectar qualquer aresta sobre L_1 ou L_2 que seja ocupada pelos caminhos P_1 ou P_2 (o análogo simétrico ocorreria se P_3 fosse um segmento entre o terceiro e quarto quadrante). Logo, a única opção que resta é que o caminho P_3 deverá dobrar para a direita (ou esquerda), ver Figura 7, adiciona-se um segmento horizontal, em seguida uma segunda dobra deve ser realizada para alcançar L_2 , sendo adicionado então um segmento vertical em direção ao segmento L_2 . Uma terceira dobra em P_3 deve ser adicionada para que o caminho consiga aresta-intersectar o segmento L_2 . Portanto, concluímos que qualquer representação EPG de $L_1 \cup L_2 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3$ não está em

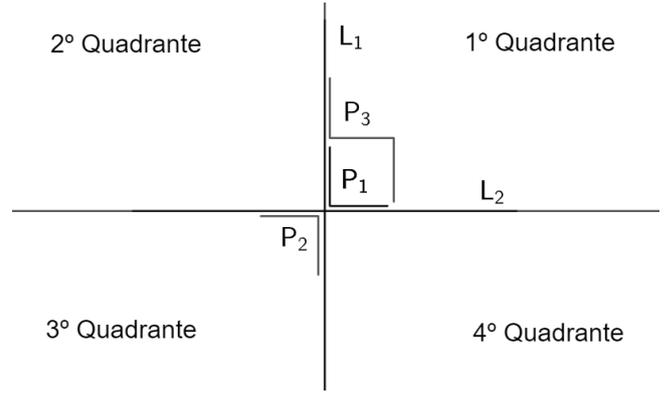


Figura 7: Exemplo de representação dos caminhos P_1, P_2 e P_3

B₂-EPG. \square

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo trabalhamos com grafos B₂-EPG Split. Mostramos que todo grafo split com $d(s_i) \leq 2$ está em B₂-EPG, isto permitiu construir um algoritmo para representar toda uma sub-família de grafos B₂-EPG Split. Como consequência também fomos capazes de propor um algoritmo que constrói a representação de qualquer grafo split em uma grade de área $O(w \times y)$. Ademais, também apresentamos outros resultados para grafos EPG que, com restrições particulares, não estão em B₂-EPG.

Este artigo apresenta conclusões revelantes do ponto de vista científico no que diz respeito ao estudo de grafos B₂-EPG Split, um tópico avançado de estudo em teoria dos grafos. A profundidade dos resultados expande horizontes para novas pesquisas com outras subclasses de grafos EPG.

Como trabalhos futuros propomos a investigação da caracterização de grafos B₂-EPG Split por meio de subgrafos induzidos proibidos. Outra questão de interessante investigação seria a seguinte: sabemos que uma grade de dimensão $O(w \times y)$ é suficiente para representar qualquer grafo split, mas seria essa grade necessária para representar todos grafos splits ou podemos representar qualquer grafo split em uma grade de menor dimensão?

REFERÊNCIAS

- [1] M. C. Golumbic, M. Lipshteyn, and M. Stern, "Edge intersection graphs of single bend paths on a grid," *Networks: An International Journal*, vol. 54, no. 3, pp. 130–138, 2009.
- [2] F. W. Sinden, "Topology of thin film rc circuits," *Bell System Technical Journal*, vol. 45, no. 9, pp. 1639–1662, 1966.
- [3] M. L. Brady and M. Sarrafzadeh, "Stretching a knock-knee layout for multilayer wiring," *IEEE Transactions on Computers*, vol. 39, no. 1, pp. 148–151, 1990.
- [4] P. Molitor, "A survey on wiring," *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, vol. 27, no. 1, pp. 3–19, 1991.
- [5] A. Asinowski and A. Suk, "Edge intersection graphs of systems of paths on a grid with a bounded number of bends," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 157, no. 14, pp. 3174–3180, 2009. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X09002595>
- [6] D. Heldt, K. Knauer, and T. Ueckerdt, "On the bend-number of planar and outerplanar graphs," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 179, pp. 109–119, 2014.

- [7] L. Alcón, M. P. Mazzoleni, and T. D. dos Santos, "Relationship among B1-EPG, VPT and EPT graphs classes," *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.7151/dmgt.2408>
- [8] K. A. Silva and T. D. Santos, "The K-sun graphs are in B2-EPG-Helly," 2022, accepted to publish in Latin American Workshop on Cliques in Graphs.
- [9] A. Asinowski and B. Ries, "Some properties of edge intersection graphs of single-bend paths on a grid," *Discrete Mathematics*, vol. 312, no. 2, pp. 427–440, 2012.
- [10] K. Cameron, S. Chaplick, and C. T. Hoàng, "Edge intersection graphs of l-shaped paths in grids," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 210, pp. 185–194, 2016.
- [11] Z. Deniz, S. Nivelle, B. Ries, and D. Schindl, "On split B1-EPG graphs," in *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*. Springer, 2018, pp. 361–375.
- [12] C. Bornstein, M. Golumbic, T. D. Santos, U. Souza, and J. Szwarcfiter, "The complexity of Helly-B1 EPG graph recognition," *Discret. Math. Theor. Comput. Sci.*, vol. 22, 2020.
- [13] Z. Deniz, S. Nivelle, B. Ries, and D. Schindl, "On some subclasses of Split B1-EPG graphs," in *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*. Springer, 2021, pp. 625–636.
- [14] M. Pergel and P. Rzażewski, "On edge intersection graphs of paths with 2 bends," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 226, pp. 106–116, 2017.
- [15] M. C. Golumbic, M. Lipshteyn, and M. Stern, "Single bend paths on a grid have strong Helly number 4: errata atque emendationes ad "edge intersection graphs of single bend paths on a grid"," *Networks*, vol. 62, no. 2, pp. 161–163, 2013.
- [16] T. Biedl and M. Stern, "On edge-intersection graphs of k-bend paths in grids," *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol. 12, no. 1, pp. 1–12, 2010.
- [17] L. Alcón, F. Bonomo, G. Durán, M. Gutierrez, M. P. Mazzoleni, B. Ries, and M. Valencia-Pabon, "On the bend number of circular-arc graphs as edge intersection graphs of paths on a grid," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 234, pp. 12–21, 2018.
- [18] M. C. Francis and A. Lahiri, "VPG and EPG bend-numbers of Halin graphs," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 215, pp. 95–105, 2016.
- [19] E. Çela and E. Gaar, "Monotonic representations of outerplanar graphs as edge intersection graphs of paths on a grid," *ArXiv*, vol. abs/1908.01981, 2019.
- [20] D. Heldt, K. Knauer, and T. Ueckerdt, "Edge-intersection graphs of grid paths: the bend-number," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 167, pp. 144–162, 2014.
- [21] S. Foldes and P. L. Hammer, "Split graphs," Proc. 8th southeast. Conf. on Combinatorics, graph theory, and computing; Baton Rouge 1977, 311-315 (1977)., 1977.
- [22] V. Chvátal, *Set-packing Problems and threshold graphs*, 1973. [Online]. Available: <https://books.google.com.br/books?id=I4T5jgEACAAJ>